К теоремам Галлахера о нулях групповых характеров

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Пусть G-конечная неабелева группа: $\operatorname{Irr}(G)$-множество всех её непрводимых комплексных характеров; $T_\chi=\{g\in G|\chi(g)=0\}$-множество всех нулей характера $\chi\in\operatorname{Irr}(G)$; $U_\chi=\{g\in G||\chi(g)|=1\}$; $N_\chi=\langle T_\chi\rangle$; $\Delta_\chi=G\setminus N_\chi$; $\operatorname{Irr}_1(G)=\{\chi\in\operatorname{Irr}(G)|N_\chi=G\}$-множество всех неприводимых характеров 1-го рода группы G; $\operatorname{Irr}_2(G)=\operatorname{Irr}(G)\setminus\operatorname{Irr}_1(G)$-множество всех неприводимых характеров 2-го рода группы C; χ_H-ограничение характера χ на подгруппу H группы G.

Если $\chi\in\operatorname{Irr}_2(G)$, то, как доказал Галлахер в статье [2], $\chi_{N_\chi}\in\operatorname{Irr}(N_\chi)$ и $\Delta_\chi\subseteqq U_\chi$. Там же доказано, что группа G порождается объединением множеств нулей всех её неприводимых характеров. В настоящей работе эти результаты усиливаются и дополняются. В частности, в ней доказана неприводимость ограничения характера $\chi\in\operatorname{Irr}_2(G)$ на любую субнормальную подгруппу группы G, не содержащуюся в N_χ, а также — неприводимость его ограничения на коммутант группы G. В ней доказано также, что $\operatorname{Irr}_1(G)\neq\emptyset$, т. е. группа G порождается нулями одного из её неприводимых характеров.*)

Дополним введенные выше обозначения: если $\emptyset\neq S\subseteqq G$, $g\in G$, то $S^g=\{x^g=g^{-1}xg|x\in S\}$, $S^G=\bigcup_{g\in G}S^g$; $x^G=\{x\}^G$ — G-класс элемента $x\in G$; $0(g)$-порядок элемента $g\in G$; $Z(G)$-центр G; G'-коммутант G; $F(G)$-подгруппа Фиттинга группы G; $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$-сердцевина подгруппы H группы G; $\leqq$ ($<$) — символ отношения «быть подгруппой (собственной подгруппой)»; $\operatorname{Char}(G)$-множество всех комплексных характеров группы G; $\operatorname{Ker}\chi$-ядро характера χ; $Z(\chi)=\{g\in G\big||\chi(g)|=\chi(1)\}$; $\operatorname{Lin}(G)$-группа линейных характеров группы G; $\operatorname{Irr}^\#(G)=\operatorname{Irr}(G)\setminus\operatorname{Lin}(G)$; ψ^G-характер группы G, индуцированный характером ψ подгруппы $H\leqq G$; если $N\lhd G$, $\psi\in\operatorname{Char}(N)$, то ψ^g-характер подгруппы N G-сопряженный с ψ: $\psi^g(x)=\psi(gxg^{-1})$ $(g\in G, x\in N)$; 1_G-главный характер группы G; $\mathbf{C}$-поле комплексных чисел; $\langle\Theta_1,\Theta_2\rangle=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\Theta_1(g)\overline{\Theta_2(g)}$-скалярное произведение функций Θ_i: $G\to\mathbf{C}$; $\mathbf{Z}$-кольцо целых чисел. Символ $\subset$ всюду обозначает строгое включение.

1. В этом пункте предполагается, что $\chi\in\operatorname{Irr}^\#(G)$.

Лемма 1. [1] $T_\chi\neq\emptyset$.

---

* Последний результат впервые доказан в [4]. В настоящей работе дается более простое доказательство.

Лемма 2. *Множества T_χ и U_χ нормальны в G.*

Лемма 3. *Если $g \in U_\chi$, то $\chi(g)$-корень из 1.*

Доказательство. Модули целого алгебраического числа $\chi(g)$ и всех чисел алгебраически сопряженных с ним равны, как легко видеть, 1. Отсюда вытекает, на основании известной леммы Кронекера, что $\chi(g)$—корень из 1.

Лемма 4. [2] (а) $\chi_{N_\chi} \in \mathrm{Irr}(N_\chi)$; (б) $\Delta_\chi \subseteq U_\chi$.

Следствие 1. $Z(G) \leqq Z(N_\chi) \leqq Z(\chi_{N_\chi}) \leqq Z(\chi)$. *Если* $\ker \chi = \{1\}$, *то* $Z(G) = Z(N_\chi) = Z(\chi_{N_\chi}) = Z(\chi)$.

Лемма 5. *Пусть $u \in G$, $o(u) = p^\alpha$, где p-простое число, α-целое > 0. Если $\Theta \in \mathrm{Char}(G)$, то для любого $g \in G_G(u)$ имеет место сравнение $\Theta(ug)^{p^\alpha} \equiv \Theta(g)^{p^\alpha} \pmod p$ в кольце $\mathbf{R}$ всех целых алгебраических чисел.*

Доказательство. Пусть $H = G_G(u)$, $\Theta_H = \psi_1 + \ldots + \psi_k$, где $\psi_i \in \mathrm{Irr}(H)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Так как $u \in Z(H)$, то $\psi_i(u) = \varepsilon_i \psi_i(1)$, где ε_i-корень степени p^α из 1. Так как $g \in H$, то $\psi_i(ug) = \varepsilon_i \psi_i(g)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Отсюда вытекает, что

$$\Theta(ug)^{p^\alpha} = \Big(\sum_i \psi_i(ug)\Big)^{p^\alpha} = \Big(\sum_i \varepsilon_i \psi_i(g)\Big)^{p^\alpha} \equiv \sum_i \psi_i(g)^{p^\alpha} \equiv$$

$$\equiv \Big(\sum_i \psi_i(g)\Big)^{p^\alpha} \equiv \Theta(g)^{p^\alpha} \pmod p.$$

Лемма 6. *Если множество U_χ содержит хотя бы один p-элемент, то $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod p$.*

Доказательство. Пусть $u \in U_\chi$, $o(u) = p^\alpha$ $(\alpha > 0)$. Полагая $\Theta = \chi\bar{\chi}$, к силу леммы 5 будем иметь $\Theta(u)^{p^\alpha} \equiv \Theta(1)^{p^\alpha} \equiv \Theta(1) \pmod p$ в кольце $\mathbf{R}$. Так как $\Theta(u) = |\chi(u)|^2 = 1$, $\Theta(1) = \chi(1)^2$, то $\chi(1)^2 \equiv 1 \pmod p$ в $\mathbf{R}$, а потому и в $\mathbf{Z}$. Поэтому $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod p$.

Лемма 7. *Если $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G)$ и p-простой делитель числа $|G/N_\chi|$, то $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod p$.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $P \cap \Delta_\chi \neq \emptyset$. Так как по лемме 4 $\Delta_\chi \subseteq U_\chi$, то $P \cap U_\chi \neq \emptyset$, откуда в сиду леммы 6 $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod p$.

Следствие 2. $(\chi(1), |G/N_\chi|) = 1$.

Пусть $H_0 \lhd H < G$. Систему (G, H, H_0) назовем W-тройкой, если $H \cap H^t \leqq H_0$ для любого $t \in G \setminus H$. По теореме Виланда подгруппа H обладает единственным нормальным дополнением N над подгруппой H_0: $N \lhd G$, $N \cdot H = G$, $N \cap H = H_0$; при этом имеет место разбиение $G \setminus N = \bigcup_i (H \setminus H_0)^{t_i}$, где $\{t_i\}$-полная система представителей правых смежных классов группы G по H. Подгруппу N назовем ядром W-тройки (G, H, H_0). Из определения последней следует, что $N_G(H) = H$ и $H \setminus H_0 - (\mathrm{TI})$-подмножество.

Лемма 8. *Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G)$, $\chi = \psi^G$, где $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$, $H < G$. Положим $H_0 = H \cap N_\chi$. Тогда (G, H, H_0)—W-тройка с ядром N_χ.*

Доказательство. Так как $\chi(1)=|G\colon H|\psi(1)$, то в силу следствия 2 $(|G\colon H|, |G\colon N_\chi|)=1$, откуда вытекает, что $N_\chi H=G$. Таким образом N_χ— нормальное дополнение подгруппы H над H_0. Из $N_\chi H=G$ следует, что $G/N_\chi\cong\cong H/H_0$. Отсюда вытекает, ввиду $N_\chi\neq G$, что $H_0\neq H$. Обозначив $m=|G\colon H|$, получим

$$m|H_0| = |N_\chi|. \tag{1}$$

Пусть $g\in\Delta_\chi$. Так как $\chi(g)\neq 0$ и по формуле Фробениуса

$$\chi(g) = |H|^{-1}\sum_{t\in G}\mathring{\psi}(tgt^{-1})$$

($\mathring{\psi}$-функция на G совпадающая с ψ на H и исчезающая на $G\setminus H$), то найдется элемент $t\in G$ такой, что $g\in H^t$. Поэтому $\Delta_\chi\subseteq H^G=\bigcup H^{t_i}$. Так как Δ_χ нормально, то $\Delta_\chi=\Delta_\chi\cap(\bigcup H^{t_i})=\bigcup(\Delta_\chi\cap H^{t_i})=\bigcup\Omega_\chi^{t_i}$, где $\Omega_\chi=H\cap\Delta_\chi==H\setminus H_0=H\setminus N_\chi$. Отсюда следует в силу (1), что $|\Delta|_\chi\leqq\Sigma|\Omega_\chi^{t_i}|=m|\Omega_\chi|==m(|H|-|H_0|)=|G|-|N_\chi|=|\Delta_\chi|$. Поэтому $|\bigcup\Omega_\chi^{t_i}|=\Sigma|\Omega_\chi^{t_i}|$, откуда вытекает, что подмножества $\Omega_\chi^{t_i}/i\ (i=1, \ldots, m)$ попарно не пересекаются и, следовательно, образуют разбиение множества Δ_χ. В дальнейшем считаем $t_1=1$. Пусть $t\in G\setminus H$. Тогда $t\in Ht_i$, где $i>1$. Так как Ω_χ H-инвариантно, то $\Omega_\chi\cap\Omega_\chi^t==\Omega_\chi\cap\Omega_\chi^{t_i}=\emptyset$. Так как, кроме того, $H_0\cap\Omega_\chi^t=\Omega_\chi\cap H_0^t=\emptyset$, то

$$H\cap H^t = (H_0\cup\Omega_\chi)\cap(H_0^t\cup\Omega_\chi^t) =$$
$$= (H_0\cap H_0^t)\cup(H_0\cap\Omega_\chi^t)\cup(\Omega_\chi\cap H_0^t)\cup(\Omega_\chi\cap\Omega_\chi^t)=H_0\cap H_0^t\leqq H_0.$$

Таким образом, $H\cap H^t\leqq H_0$, если $t\in G\setminus H$. Следовательно $(G, H, H_0)-W$-тройка с ядром N_χ.

Следствие 3. *Если характер χ и подгруппа H группы G удовлетворяют условиям леммы 8, то $H_G\leqq H_0$.*

Лемма 9. *Если $\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$, $N\lhd G$, $N\nless N_\chi$, то $\chi_N\in\mathrm{Irr}(N)$; при этом $\chi_N\in\mathrm{Irr}_2(N)$, если $N\nleqq N_\chi$.*

Доказательство. Если $N=G$ утверждение очевидно. При $N=N_\chi$ оно следует из леммы 4. Допустим теперь, что $N\nleqq N_\chi$, $N\neq G$. Рассмотрим клиффордово разложение $\chi_N=e(\Phi_1+\ldots+\Phi_l)$ характера χ_N. Здесь $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_l\}$-класс характеров подгруппы N G-сопряженных с $\Phi_1=\Phi\in\mathrm{Irr}(N)$, $l=|G\colon H|$, где $H=I_G(\Phi)$-группа инерции характера Φ и l-индекс ветвления χ над N. Допустим, что $l>1$. Тогда $H<G$. Так как характер χ индуцируется из H.

то в силу следствия 3 $N\leqq H_G\leqq H_0\leqq N_\chi$-противоречие. Таким образом, $l=1$ и, следовательно, $\chi_N=e\Phi$. Так как $N\nleqq N_\chi$, то $N\cap\Delta_\chi\neq\emptyset$. Пусть $g\in N\cap\Delta_\chi$. Так как $\chi(g)=e\Phi(g)$ и по лемме 3 $\chi(g)$-корень из 1, то e делит 1 в кольце $\bar{R}$. Поэтому $e=1$ и, следовательно, $\chi_N=\Phi\in\mathrm{Irr}(N)$. Так как $T_\Phi=N\cap T_\chi$, то $N_\Phi=\langle T_\Phi\rangle\leqq N\cap\langle T_\chi\rangle=N\cap N_\chi\neq N$, откуда следует, что $\Phi\in\mathrm{Irr}_2(N)$. Итак, $\chi_N\in\mathrm{Irr}_2(N)$.

Теорема 1. *Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$, N-субнормальная подгруппа группы G, $N\nless N_\chi$. Тогда $\chi_N\in\mathrm{Irr}(N)$, причем $\chi_N\in\mathrm{Irr}_2(N)$, если $N\nleqq N_\chi$.*

Доказательство. Пусть $G \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_k = N$-отрезок композиционного ряда группы G проходящего через N. Как и при доказательстве леммы 9, мы считаем, что $N \not\leqq N_\chi$, $N \neq G$. Так как $N \not\leqq N_\chi$, то $G_i \not\leqq N_\chi$ $(i=1, \ldots, k)$. В частности, из $G_1 \lhd G$, $G_1 \not\leqq N_\chi$ вытекает в силу леммы 9, что $\chi_1 = \chi_{G_1} \in \operatorname{Irr}_2(G_1)$. Так как $G_2 \lhd G_1$ и $G_2 \not\leqq N_{\chi_1}$, то аналогично получим $\chi_2 = \chi_{G_2} \in \operatorname{Irr}_2(G_2)$. После k шагов мы докажем, что $\chi_N \in \operatorname{Irr}_2(N)$.

Следствие 4. *При выполнении условий теоремы* 1 *из* $N \not\leqq N_\chi$ *следует* $\chi_D \in \operatorname{Irr}(D)$, *где* $D = N \cap N_\chi$.

Следствие 5. *Пусть* $\chi \in \operatorname{Irr}_2(G)$ *и* M-*любой максимальный нормальный делитель группы* G. *Тогда* $\chi_M \in \operatorname{Irr}(M)$.

Следствие 6. *Пусть* $\chi \in \operatorname{Irr}_2(G)$, $N \lhd G$, $N \cap T_\chi = \emptyset$. *Тогда* $N < N_\chi$.

Доказательство. Если $N \nless N_\chi$, то по лемме 9 $\chi_N \in \operatorname{Irr}(N)$, откуда в силу леммы 1 $N \cap T_\chi \neq \emptyset$-противоречие.

Лемма 10. *Если* $\chi = \psi^G$, *где* $\psi \in \operatorname{Irr}(N)$, $N \lhd G$, *то* $G \setminus N \subseteq T_\chi$.

Доказательство. Утверждение вытекает из формулы Фробениуса для ψ^G.

Следствие 7. *Неприводимый характер* 2-*го рода не может индуцироваться из собственной Нормальной подгруппы группы* G.

Доказательство. Пусть $\chi \in \operatorname{Irr}_2(G)$. Если χ индуцируется из собственного нормального делителя N группы G, то по лемме 10 $G \setminus N \subseteq T_\chi$. Поэтому $N_\chi = \langle T_\chi \rangle \geqq \langle G \setminus N \rangle = G$, т. е. $N_\chi = G$-противоречие.

Лемма 11. *Нильпотентные группы не имеют нелинейных неприводимых характеров* 2-*го рода.*

Доказательство. Неприводимый нелинейный характер нильпотентной группы индуцируется из её максимальной подгруппы. Так как последняя нормальна, то утверждение вытекает из следствия 6.

Следствие 8. $F(G) \leqq N_\chi$.

Доказательство. Если $\chi \in \operatorname{Irr}_2(G)$, $F(G) \not\leqq N_\chi$, то по лемме 9 $\chi_{F(G)} \in \operatorname{Irr}_2(F(G))$, что противоречит лемме 11.

Лемма 12. *Если* $g \in T_\chi$, *то* $C_G(g) < N_\chi$.

Доказательство. Допустим, что $C_G(g) = H \not\leqq N_\chi$. Тогда N_χ не содержит по крайней мере одну из силовских подгрупп группы H. Пусть $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$ (p-простое число), причем $P \not\leqq N_\chi$. Тогда $P \cap \Delta_\chi \neq \emptyset$. Если $u \in P \cap \Delta_\chi$, то $gu \in P \cap \Delta_\chi \subseteq \Delta_\chi$, откуда по лемме 4 $gu \in U_\chi$. Пусть $o(u) = p^\alpha$ $(\alpha > 0)$. Полагая $\Theta = \chi\bar{\chi}$, по лемме 5 получим $\Theta(ug)^{p^\alpha} \equiv \Theta(g)^{p^\alpha} \pmod p$ в кольце R. Так как $ug \in U_\chi$, то $\Theta(ug) = |\chi(ug)|^2 = 1$. Замечая, что $\Theta(g) = |\chi(g)|^2 = 0$, приходим к невозможному сравнению $I \equiv 0 \pmod p$. Таким образом, $C_G(g) \leqq N_\chi$. Из $C_G(g) = N_\chi$ вытекает $g \in Z(N_\chi)$, откуда, ввиду следствия 1, $g \in Z(\chi)$, что невозможно, так как $Z(\chi) \cap T_\chi = \emptyset$. Итак, $C_G(g) < N_\chi$.

Теорема 2. $\mathrm{Irr}_1(G)\neq\emptyset$, *т. е. группа* G *порождается множеством нулей одного из её неприводимых характеров.*

Доказательство. Если $\mathrm{Irr}_1(G)=\emptyset$, то $N_\chi\neq G$ для любого $\chi\in\mathrm{Irr}^\#(G)$. Пусть M-максимальный нормальный делитель группы G, содержащий N_χ. Так как $\mathrm{Irr}_2(G)=\mathrm{Irr}(G)$, то в силу следствия 5 $\Theta_M\in\mathrm{Irr}(M)$ для любого $\Theta\in\mathrm{Irr}(G)$. Поэтому все неприводимые характеры подгруппы M продолжаемы на группу G, откуда следует, что все M-классы являются G-классами. Следовательно $|C_G(g)|=|G:M|\cdot|C_M(g)|>|C_M(g)|$ для любого $g\in M$. Так как $\chi_M\in\mathrm{Irr}(M)$ и $\chi_M(1)>1$, то в силу леммы 1 $T_\chi\cap M\neq\emptyset$. Пусть $g\in T_\chi\cap M$. Тогда по лемме 12 $C_G(g)<N_\chi\leqq M$, откуда $C_G(g)=C_M(g)$, что противоречит неравенству $|C_G(g)|>|C_M(g)|$. Таким образом $\mathrm{Irr}_1(G)\neq\emptyset$.

Доказанная выше теорема 1 даёт усиление утверждения (а) леммы 4. Нижеследующей теоремой усиливается утверждение (б) леммы 4.

Теорема 3. *Пусть* $N\lhd G$, $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $\chi_N\in\mathrm{Irr}(N)$. *Тогда* $\Omega=G\setminus NT_\chi\subseteqq U_\chi$.

Доказательство. Если $x\in\Omega$, то, как легко видеть, (i) $Nx\in\Omega$, (ii) $x^\nu\in\Omega$ для любого $\nu\in\mathbf{Z}$, $(\nu,|G|)=1$. Воспользуемся следующим результатом Галлахера (см., напр. лемму 8. 14 в [3]): при условиях теоремы 3 для любого $g\in G$ имеет место равенство $|N|^{-1}\sum_{x\in Ng}|\chi(x)|^2=1$. Из этого результата и (i) вытекает, что $A=|\Omega|^{-1}\sum_{x\in\Omega}|\chi(x)|^2=1$. Из (ii)) вытекает, что $\alpha=\prod_{x\in\Omega}\chi(x)\in\mathbf{Z}$. Так как $\alpha\neq0$, то $|\alpha|\geqq1$. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим даёт: $1\leqq\alpha^2=\prod_{x\in\Omega}|\chi(x)|^2\leqq A^{|\Omega|}=1$. Поэтому $|\chi(x)|=1$ для всех $x\in\Omega$. Таким образом, $\Omega\subseteqq U_\chi$.

Дальнейшее имеет целью изучение поведения неприводимых характеров 2-го рода группы G на её коммутанте.

Лемма 13. *Если* $\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$, *то* (а) $\lambda\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$ *при любом* $\lambda\in\mathrm{Lin}(G)$; (б) *Отображение* $\lambda\mapsto\lambda\chi$ $(\lambda\in\mathrm{Lin}(G))$ *множества* $\mathrm{Lin}(G)$ *в* $\mathrm{Irr}_2(G)$ *инъективно.*

Доказательство. Очевидно $\lambda\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ *и* $T_{\lambda\chi}=T_\chi$. Поэтому $N_{\lambda\chi}=N_\chi\neq G$, т. е. $\lambda\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$. Пусть $\lambda_1,\lambda_2\in\mathrm{Lin}(G)$ и $\lambda_1\chi=\lambda_2\chi$. Тогда $\lambda\chi=\chi$, где $\lambda=\lambda_1\lambda_2^{-1}\in\mathrm{Lin}(G)$. Если $g\in G$, то $(\lambda(g)-1)\chi(g)=0$. Поэтому из $g\in G\setminus\mathrm{Ker}\,\lambda$ следует, что $\chi(g)=0$. Таким образом $G\setminus\mathrm{Ker}\,\lambda\subseteqq T_\chi$. Если $\lambda\neq1_G$, то $G\setminus\mathrm{Ker}\,\lambda\neq\emptyset$ и, следовательно, $\langle G\setminus\mathrm{Ker}\,\lambda\rangle=G$. Но тогда $\langle T_\chi\rangle=G$, т. е. $\chi\in\mathrm{Irr}_1(G)$-противоречие. Итак, $\lambda=I_G$, т. е. $\lambda_1=\lambda_2$. Лемма доказана.

Следствие 9. $|G/G'|$ *делит* $|\mathrm{Irr}_2(G)|$.

Доказательство. Отображение $(\lambda,\chi)\to\lambda\chi$ множества $\mathrm{Lin}(G)\times\mathrm{Irr}_2(G)$ в $\mathrm{Irr}_2(G)$ является действием группы $\mathrm{Lin}(G)$ на $\mathrm{Irr}_2(G)$. Лемма 13 показывает, что это действие полурегулярно. Его орбиты поэтому имеют длину $|\mathrm{Lin}(G)|=|G/G'|$, откуда вытекает, что $|G/G'|$ делит $|\mathrm{Irr}_2(G)|$.

Теорема 4. *Если* $\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$, *то* $\chi_{G'}\in\mathrm{Irr}(G')$.

Доказательство. Пусть $\psi\in\mathrm{Irr}(G')$, $\langle\chi_{G'},\psi\rangle=e>0$, $H=I_G(\psi)$, $|G:H|=l$. Тогда $\chi_{G'}=e(\psi_1+\ldots+\psi_l)$, где $\{\psi_1,\ldots,\psi_l\}$-класс характеров подгруппы

G' G-сопряженных с $\psi_1=\psi$. Так как $H\lhd G$ и χ индуцируется из H, то в силу леммы 10 $G\setminus H\subseteqq T_\chi$. Если $l>1$, то $G\setminus H\neq\emptyset$. Поэтому $\langle G\setminus H\rangle=G$ и, следовательно, $\langle T_\chi\rangle=G$, т. е. $\chi\in\mathrm{Irr}_1(G)$. Противоречие показывает, что $l=1$, т. е. $\chi_{G'}=e\psi$. Характер ψ поэтому G-инвариантен. Пусть $\mathrm{Irr}_\psi(G)=\{\Theta\in\mathrm{Irr}(G)|\langle\Theta_{G'},\psi\rangle=e_\Theta>0\}$. При помощи теоремы взаимности Фробениуса легко доказывается равентво

(2)
$$\sum_{\Theta\in\mathrm{Irr}_\psi(G)} e_\Theta^2=|G/G'|.$$

Очевидно $\lambda\chi\in\mathrm{Irr}_\psi(G)$ при любом $\lambda\in\mathrm{Lin}(G)$, причем $e_{\lambda\chi}=e_\chi=e$. Поэтому $\mathrm{Lin}(G)\chi\subseteqq\mathrm{Irr}_\psi(G)$, откуда следует ввиду (2) и леммы 13, что

$$|G/G'|=\sum_{\Theta\in\mathrm{Irr}_\psi(G)} e_\Theta^2\geqq\sum_{\Theta\in\mathrm{Lin}(G)\chi} e_\Theta^2=\sum_{\lambda\in\mathrm{Lin}(G)} e_{\lambda\chi}^2=e^2|\mathrm{Lin}(G)|=e^2|G/G'|\geqq|G/G'|.$$

Поэтому $\sum_{\Theta\in\mathrm{Irr}_\psi(G)} e_\Theta^2=\sum_{\Theta\in\mathrm{Lin}(G)\chi} e_\Theta^2$, откуда следует, что $\mathrm{Irr}_\psi(G)=\mathrm{Lin}(G)\chi$ и $e=1$. Следовательно $\chi_{G'}=\psi\in\mathrm{Irr}(G')$. Попутно доказано, что $\mathrm{Lin}(G)\chi$ совпадает с множеством всех продолжений характера ψ на группу G.

Следствие 10. *Если $\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$, $\mathrm{Ker}\,\chi=\{1\}$, то $Z(G)$-наибольший по включению циклический нормальный делитель группы G.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Ker}\,\chi=\{1\}$, то $Z(G)$ цикличен. Допустим, что $N\lhd G$ цикличен. Зададим гомоморфизм $\varphi\colon G\to\mathrm{Aut}(N)$ группы G в группу автоморфизмов подгруппы N, полагая $\varphi(g)(x)=gxg^{-1}$ $(g\in G,\ x\in N)$. Так как $\mathrm{Ker}\,\varphi=C_G(N)$ и $\mathrm{Aut}(N)$ абелева, то $C_G(N)\geqq G'$. Полагая $C_G(N)=K$, в силу теоремы 4 будем иметь $\chi_K\in\mathrm{Irr}(K)$. Так как χ и χ_K точны и неприводимы, то на основании следствия 1 $Z(G)=Z(\chi)$, $Z(K)=Z(\chi_K)$, откуда следует, ввиду $Z(\chi_K)\leqq Z(\chi)$, что $Z(K)\leqq Z(G)$. Так как $N\leqq Z(K)$, то $N\leqq Z(G)$.

Следствие 11. *Сверхразрешимая группа $G\neq\{1\}$, обладающая точным неприводимым характером 2-го рода, имеет нетривиальный центр.*

Следствие 12. *Метабелева группа не имеет нелинейных неприводимых характеров 2-го рода.*

Доказательство. Пусть G-метабелева группа (т. е. неабелева группа с абелевым коммутантом). Если $\chi\in\mathrm{Irr}_2(G)$, то в силу теоремы 4 $\chi_{G'}$ неприводим, откуда следует, ввиду абелевости G', что $\chi\in\mathrm{Lin}(G)$.

Следствие 13. *Если G сверхразрешима и $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, то G/N_χ абелева.*

Доказательство. Так как G' нильпотентен и $G'\lhd G$, то в силу следствия 8 $G'\leqq N_\chi$.

Пусть N-субнормальная подгруппа группы G. Введем следующие обозначения: $h_s(N)$-длина l отрезка $G\rhd G_1\rhd\ldots\rhd G_l=N$ композиционного ряда группы G, проходящего через N; если $N\lhd G$, то $h_n(N)$-длина отрезка главного ряда группы G, проходящего через N; если $N\lhd G$ и G/N разрешима, то $h_a(N)$-ступень разрешимости G/N; если $N\lhd G$ и G/N не разрешима, то $h_a(N)=\infty$. Пусть $\mathscr{E}$-свойство групп наследственное по отношению к фактор-группам, $\bar{\mathscr{E}}$-отрицание свойства $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}$-группы — группы, обладающие свойством $\mathscr{E}$.

При помощи теорем 1 и 4 легко доказывается следующее утверждение:

Теорема 5. *Ограничение характера* $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G)$ *на субнормальную подгруппу* N *неприводимо, если выполнено одно из условий:*

(а) $h_s(N) \leqq h_s(N_\chi)$.

(б) $N \lhd G$ и $h_n(N) \leqq h_n(N_\chi)$

(в) $N \lhd G$, G/N *разрешима и* $h_a(N) \leqq h_a(N_\chi)$.

(г) $N \lhd G$, G/N — $\mathscr{E}$-*группа*, G/N_χ — $\bar{\mathscr{E}}$-*группа*.

2. Элемент $g \in G$ назовем регулярным, если $\chi(g) \neq 0$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Подгруппу $H < G$ назовем регулярной, если все её элементы регулярны. В этом пункте мы используем полученные выше результаты для получения некоторых достаточных условий существования в группе G нетривиальных регулярных элементов (подгрупп).

Введем обозначения:

$$\varrho_i = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_i(G)} \chi(1)\chi, \quad K_i = \mathrm{Ker}\,\varrho_i = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}_i(G)} \mathrm{Ker}\,\chi (i=1,2).$$

Очевидно $K_i \lhd G$ $(i=1,2)$, $K_1 \neq G$, $K_1 \cap K_2 = \{I\}$.

Лемма 14. *Характеры* ϱ_i $(i=1,2)$ *исчезают на* $G \setminus G'$.

Доказательство. Если $\lambda \in \mathrm{Lin}(G)$, то $\lambda\,\mathrm{Irr}_i(G) = \mathrm{Irr}_i(G)$ $(i=1,2)$. Поэтому $\lambda\varrho_i = \varrho_i$ $(i=1,2)$, откуда и вытекает утверждение.

Следствие 12. $K_i \leqq G'$ $(i=1,2)$, *причем* $K_1 \neq G'$.

Лемма 15. *Пусть* $\mathrm{Irr}(G) = S_1 \cup S_2$, $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$; $L_i = \bigcap_{\chi \in S_i} \mathrm{Ker}\,\chi$ $(i=1,2)$; $N \lhd G$; $\chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$ *для всех* $\chi \in S_2$. *Тогда* $g^G = g^N$ *для каждого* $g \in L_1 \cap N = D$.

Доказательство. Пусть $g, h \in D$, $h \in g^G$. Если $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$, то $\langle \psi, \chi_N \rangle > 0$ для некоторого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Если $\chi \in S_1$, то $D \leqq \mathrm{Ker}\,\chi \cap N = \mathrm{Ker}\,\chi_N \leqq \mathrm{Ker}\,\psi$. Поэтому $\psi(g) = \psi(h)$ $(=\psi(1))$. Если $\chi \in S_2$, то $\chi_N \in \mathrm{Irr}(N)$, откуда $\psi = \chi_N$. Поэтому $\psi(g) = \chi(g) = \chi(h) = \psi(h)$. Таким образом, $\psi(g) = \psi(h)$ для каждого $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$, откуда следует, что $h \in g^N$. Тем самым доказано, что $g^G = g^N$.

Следствие 13. *Пусть* $D(M) = K_1 \cap M$, *где* M*-максимальный нормальный делитель группы* G. *Тогда* $g^G = g^M$ *для любого* $g \in D(M)$.

Доказательство. Полагая $S_i = \mathrm{Irr}_i(G)$ $(i=1,2)$, $N = M$, применяем лемму 15 и следствие 5.

Следствие 14. $g^G = g^{G'}$ *для любого* $g \in K_1$.

Доказательство. Полагая $S_i = \mathrm{Irr}_i(G)$ $(i=1,2)$, $N = G'$, применяем следствие 12, теорему 4 и лемму 15.

Лемма 16. *Пусть* $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G) \setminus \mathrm{Lin}(G)$, $N_\chi \leqq M \lhd G$. *Тогда* $g^G \neq g^M$ *для* $g \in T_\chi$.

Доказательство. В силу леммы 12 $C_G(g) = C_M(g)$. Поэтому $|g^G| = |G: C_G(g)| = |G: M| \cdot |M: C_M(g)| = |G: M| \cdot |g^M| > |g^M|$, откуда и вытекает утверждение.

Лемма 17. *Если* $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$, *то* $N_\chi \not\geqq K_1$.

Доказательство. Если $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$, утверждение очевидно. Если $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G)$, то $N_\chi \leqq M$, где M-максимальный нормальный делитель группы G. В силу леммы 16 $g^G \neq g^M$ для любого $g \in T_\chi$. Если $N_\chi \leqq K_1$, то $g \in K_1 \cap M$, откуда вытекает, ввиду следствия 13, что $g^G = g^M$. Противоречие показывает, что $N_\chi \not\geqq K_1$.

Лемма 18. *Пусть* $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$, $K \lhd G$, $K \leqq K_1$. *Тогда следующие утверждения равносильны:* (а) χ_K *приводим;* (б) $K < N_\chi$; (в) $K \cap T_\chi = \emptyset$.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Допустим, что χ_K приводим, но $K \not< N_\chi$. Тогда по лемме 9 $\chi_K \in \mathrm{Irr}(K)$-проитворечие. Таким образом, $K < N_\chi$.

(б)$\Rightarrow$(в). Допустим, что $K < N_\chi$. Если $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$, то $K \leqq \mathrm{Ker}\,\chi$, откуда $K \cap T_\chi = \emptyset$. Если $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G)$, то $N_\chi \leqq M$, где M-максимальный нормальный, делитель группы G. Если $K \cap T_\chi \neq \emptyset$ и $g \in K \cap T_\chi$, то в силу леммы 16 $g^G \neq g^M$, что противоречит следствию 13. Таким образом, $K \cap T_\chi = \emptyset$.

(в)$\Rightarrow$(а). Если $K \cap T_\chi = \emptyset$, то χ_K приводим ввиду леммы 1.

Следствие 15. *Если* $K \lhd G, K \leqq K_1$, *то подгруппа* K *регулярна тогда и только тогда, когда* $K \leqq \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} N_\chi$.

Пусть $N \lhd G$ и $\mathrm{Sc}_G(N) = N \cap \mathrm{Sc}(G)$, где $\mathrm{Sc}(G)$-цоколь группы G. Если $N \neq \{1\}$, то $\mathrm{Sc}_G(N)$-произведение всех содержащихся в N минимальных нормальных делителей группы G. Отсюда, в частности, следует, что $\mathrm{Sc}_G(N) \neq \{1\}$ тогда и только тогда, когда $N \neq \{1\}$.

Теорема 6. *Подгруппа* $\mathrm{Sc}_G(K_1)$ *регулярна.*

Доказательство. Из леммы 12 следует, что все минимальные нормальные делители группы G содержатся в $\bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)} N_\chi$. Поэтому $\mathrm{Sc}_G(K_1) \leqq \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)} N_\chi$, откуда вытекает регулярность $\mathrm{Sc}_G(K_1)$ в силу следствия 15.

Следствие 16. *Группа* G *обладает нетривиальными регулярными элементами, если* $K_1 \neq \{1\}$.

Теорема 7. *Если* $K \lhd G, K \leqq K_1$, K *разрешима, то* K *регулярна.*

Доказательство. Пусть $K \neq \{1\}$, $K \rhd K' \rhd \ldots \rhd K^{(r)} = \{1\}$ — производный ряд подгруппы K. Если $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$, $K \not\leqq N_\chi$, то в силу леммы 9 $\chi_K \in \mathrm{Irr}_2(K)$, откуда вытекает на основании теоремы 4, что $\chi_{K'} \in \mathrm{Irr}(K')$. Ввиду лемм 17 и 18 отсюда следует, что $K' \not\leqq N_\chi$. Таким образом, из $K \not\leqq N_\chi$ вытекает $K' \not\leqq N_\chi$. По индукции получим: $\{1\} = K^{(r)} \not\leqq N_\chi$, что приводит к противоречию. Итак, $K \leqq N_\chi$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$. Поэтому $K \leqq \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)} N_\chi$ откуда вытекает регулярность подгруппы K в силу следствия 15.

Отметим без доказательства следующее утверждение легко получающееся с помощью предыдущих результатов:

Теорема 8. *Пусть* $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G) \setminus \mathrm{Lin}(G)$, $K \lhd G$, $K \leqq K_1$. *Тогда следующие условия равносильны:* (а) $\chi_K \in \mathrm{Irr}(K)$; (б) $K \not\leqq N_\chi$; (в) $N_\chi K = G$.

Литература

[1] W. Burnside, On an arithmetical theorem connected with root of unity and its applications to group characteristics, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **1** (1904), 112—116.
[2] P. X. Gallagher, Zeros of characters of finite groups, *J. of Algebra*, **4**, N 1, (1966), 42—45.
[3] I. M. Isaacs, Character theory of finite groups., *N. Y., S. Francisco, L.*, (1976).
[4] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров, *Успехи матем. наук*, 1977, **32**, № 6, 223—224.

(Поступило 17. VII. 1987)