Publ. Math. Debrecen
38 / 1–2 (1991), 13–17

Une méthode de construction de plans en blocs de chaînettes

By FRANCIS MAURIN (Paris)

Abstract. Handcuffed designs have been studied by HUNG and MENDELSOHN and by J. F. LAWLESS. J. F. LAWLESS applied a "difference method" in order to construct handcuffed designs when the number v of elements of the set on which such designs are built is a prime power. We generalize here the Lawless's method in the case when v is not necessarily a prime power.

1. Introduction

Les plans en blocs de chaînettes (handcuffed designs) ont été introduits par HUNG et MENDELSOHN dans [1].

J. F. LAWLESS a présenté dans [2] une méthode des différences pour construire de tels plans lorsque le cardinal v de l'ensemble sur lequel ils sont construits est une puissance d'un nombre premier.

Nous exposons ici une méthode de composition des ensembles des différences de J. F. LAWLESS afin d'odtenir des plans en blocs de chaînettes lorsque v est un entier quelconque.

2. Définition et notations

Soit V un ensemble tel que card $V = v$ et soit $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ un ensemble de blocs formés d'éléments distincts de V tels que card $B_i = k < v$, $\forall i = 1, 2, \dots, b$. Notons $B_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k})$.

A partir d'un tel bloc dans lequel les éléments sont ordonnés, nous pouvons former un ensemble de $(k-1)$ 2–parties de V:

$$B_i{}^* = \Big\{ \{a_{i,1}, a_{i,2}\}, \dots, \{a_{i,j}, a_{i,j+1}\}, \dots, \{a_{i,k-1}, a_{i,k}\} \Big\}$$

Si chaque élément de V se trouve dans exactement r blocs et si chaque 2–partie de V se trouve dans exactement λ ensembles de 2–parties tels que

$B_i{}^*$, nous dirons que $\mathcal{B}$ est un plan en blocs de chaînettes de paramètres v, k et λ que nous désignerons par (v, k, λ) - HD.

Il est alors facile de montrer que le nombre b de blocs, r et u nombre de blocs qui contiennent un élément donné à l'intérieur d'un bloc (c'est-à-dire soit en $2^{\text{ème}}$, soit en $3^{\text{ème}}$, ..., soit en $(k-1)^{\text{ème}}$ position) sont:

$$\text{(I)} \qquad b = \frac{\lambda\, v\,(v-1)}{2\,(k-1)}$$

$$\text{(II)} \qquad r = \frac{\lambda\, k\,(v-1)}{2\,(k-1)}$$

$$\text{(III)} \qquad u = \frac{\lambda\,(v-1)\,(k-2)}{2\,(k-1)}$$

Les conditions (I), (II) et (III) sont donc nécessaires pour qu'il existe un (v, k, λ) - HD.

3. La méthode de J. F. Lawless

Soit une suite ordonnée d'élements appartenant à un module M : $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Nous appellerons *différences à droite* la suite : $(a_2 - a_1)$, $(a_3 - a_2)$, ..., $(a_k - a_{k-1})$ et *différences à gauche* la suite : $(a_1 - a_2)$, $(a_2 - a_3)$, ..., $(a_{k-1} - a_k)$.

Théorème. *Soit un module M tel que card $M = v$. Si l'on peut trouver m blocs $B_1, B_2, \ldots, B_m$, à l'intérieur desquels il n'y a pas de répétition, de taille commune k, tels que parmi les $2m(k-1)$ différences à droite et à gauche que l'on peut former à partir de chaque bloc, chacun des $v-1$ éléments différents de 0 se trouve λ fois, alors l'ensemble $\mathcal{B} = \{B_i + \Theta \; ; \; \forall i = 1, 2, \ldots, m \;\text{ et }\; \forall \Theta \in M\}$ est un (v, k, λ) - HD.*

Nous remarquons que, pour pouvoir appliquer le théorème de Lawless, il faut que $m = \frac{\lambda\,(v-1)}{2\,(k-1)}$ soit entier. On sait déjà que, lorsque (I), (II) et (III) sont satisfaites, $n = r - u = \frac{\lambda\,(v-1)}{k-1}$ est entier; si v est impair, $b = \frac{n}{2} v$ entraîne que n est pair et donc m est entier; mais si v est pair, on est obligé de supposer que $\frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ est pair.

Dans la suite, nous appellerons les m blocs $B_1, B_2, \ldots, B_m$ qui satisfont aux conditions du théorème précédent "*ensemble complet de* (v, k, λ) *- blocs de Lawless construit sur* M".

4. Construction de plans en blocs de chaînettes sur un ensemble de cardinal $v = \prod_{i=1}^{l} p_i^{n_i}$ (p_i nombre premier et n_i nombre entier)

Théorème 1. *S'il existe un ensemble complet de (v_1, k, λ) – blocs de Lawless construit sur un groupe G_1 et un ensemble complet de (v_2, k, λ) – blocs de Lawless construit sur un groupe G_2, alors il existe un ensemble complet de $(v_1 v_2, k, \lambda)$ – blocs de Lawless construit sur un groupe $G = G_1 \times G_2$.*

Aussi bien pour G_1 que pour G_2, nous employons ici la notation additive pour les lois de composition de groupe.

Soit $B_{i_1} = (a_{1,i_1}, a_{2,i_1}, \dots, a_{k,i_1})$ un bloc de l'ensemble complet de (v_1, k, λ) – blocs de Lawless construit sur G_1. A partir de B_{i_1}, nous construisons, pour $x \in G_2$, les blocs

$$B_{i_1,x} = \Big((a_{1,i_1}, 0), (a_{2,i_1}, x), \ \dots, \ (a_{j,i_1}, \varepsilon_j x), \ \dots, \ (a_{k,i_1}, \varepsilon_k x)\Big)$$

où $\varepsilon_j x = x$ si j est pair et $\varepsilon_j x = 0$ si j est impair.

Un tel bloc $B_{i_1,x}$ fait apparaître les différences à droite

$$\left(a_{2,i_1} - a_{1,i_1}\, ,\, x\right), \left(a_{3,i_1} - a_{2,i_1}\, ,\, -x\right), \dots, \left(a_{k,i_1} - a_{k-1,i_1}\, ,\, (-1)^k x\right)$$

et les différences à gauche

$$\left(a_{1,i_1} - a_{2,i_1}\, ,\, -x\right), \left(a_{2,i_1} - a_{3,i_1}\, ,\, x\right), \dots, \left(a_{k-1,i_1} - a_{k,i_1}\, ,\, (-1)^{k-1} x\right)$$

Si x est d'ordre 2, l'ensemble de ces différences à droite et à gauche décrit, lorsque i_1 varie de 1 à m_1, exactement λ fois l'ensemble des éléments différents de $(0, x)$ qui appartiennent à la classe (G_1, x) de G_1 dans $G_1 \times G_2$.

Si x n'est pas d'ordre 2, $B_{i_1,-x}$ fait apparaître les différences à droite

$$\left(a_{2,i_1} - a_{1,i_1}, -x\right), \left(a_{3,i_1} - a_{2,i_1}, x\right), \dots, \left(a_{k,i_1} - a_{k-1,i_1}, (-1)^{k+1} x\right)$$

et les différences à gauche

$$\left(a_{1,i_1} - a_{2,i_1}, x\right), \left(a_{2,i_1} - a_{3,i_1}, -x\right), \dots, \left(a_{k-1,i_1} - a_{k,i_1}, (-1)^k x\right)$$

Si bien que, lorsque i_1 varie de 1 à m_1, l'ensemble des différences à droite et à gauche des blocs $B_{i_1,x}$ et $B_{i_1,-x}$ décrit exactement λ fois l'ensemble des éléments différents de $(0, x)$ de (G_1, x) et l'ensemble des éléments différents de $(0, -x)$ de $(G_1, -x)$.

Finalement, lorsque x décrit G_2, $\{B_{i_1,x}\ ;\ \forall i_1 = 1, \ldots, m_1,\ \forall x \in G_2\}$ nous fournit, lorsque l'on forme les différences à droite et à gauche de ces blocs λ fois les éléments de $(G_1, 0)$ différents de $(0,0)$ et λ fois les éléments de chaque classe (G_1, x) différents de $(0, x)$.

A partir de $B_{i_2} = (a_{1,i_2}, \ldots, a_{k,i_2})$ bloc de l'ensemble complet de (v_2, k, λ) – blocs de Lawless construit sur G_2, nous formons
$B_{0,i_2} = \Big((0, a_{1,i_2}), \ \ldots, \ (0, a_{k,i_2})\Big)$.

Nous constatons alors que

$$\{B_{0,i_2}, B_{i_1,x}\ ;\ \forall i_2 = 1, \ldots, m_2,\ \forall i_1 = 1, \ldots, m_1,\ \forall x \in G_2\}$$

est un ensemble complet de $(v_1 v_2, k, \lambda)$ – blocs de Lawless construit sur $G_1 \times G_2$. Le nombre de blocs de cet ensemble est

$$\frac{\lambda\, v_2\,(v_1 - 1)}{2\,(k-1)} + \frac{\lambda\,(v_2 - 1)}{2\,(k-1)} = \frac{\lambda\,(v_1 v_2 - 1)}{2\,(k-1)} \ .$$

Théorèm 2. *Supposons que v admette la décomposition en facteurs premiers $v = \prod_{i=1}^{l} p_i^{\,n_i}$ et que $k < p_i^{\,n_i}$, $\forall i = 1, \ldots, l$*

si v est impair, il suffit que $\frac{\lambda\, p_i^{\,n_i}\,(p_i^{\,n_i} - 1)}{2\,(k-1)}$, $\frac{\lambda\, k\,(p_i^{\,n_i} - 1)}{2\,(k-1)}$ et $\frac{\lambda\,(k-2)\,(p_i^{\,n_i} - 1)}{2\,(k-1)}$ soient des nombres entiers $\forall i = 1, \ldots, l$ pour que l'on puisse construire un $(v, k, \lambda) - HD$

si v est pair, il suffit que $\frac{\lambda p_i^{\,n_i}(p_i^{\,n_i} - 1)}{2(k-1)}$, $\frac{\lambda k\,(p_i^{\,n_i} - 1)}{2\,(k-1)}$, $\frac{\lambda\,(k-2)\,(p_i^{\,n_i} - 1)}{2\,(k-1)}$ et $\frac{\lambda\,(2^{n_1} - 1)}{2\,(k-1)}$ (en supposant que $p_1 = 2$) soient des nombres entiers $\forall i = 1, \ldots, l$ pour que l'on puisse construire un $(v, k, \lambda) - HD$.

En effet, si v est impair, Lawless a démontré que les conditions énoncées sont suffisantes pour qu'il existe des ensembles complets de $(p_i^{\,n_i}, k, \lambda)$ – blocs de Lawless construits sur des corps de Galois C_i. Le théorème 1 appliqué $(l - 1)$ fois permet alors de construire un ensemble complet de $(\prod_{i=1}^{l} p_i^{\,n_i}, k, \lambda)$ – blocs de Lawless construit sur $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_l$, ensemble qui donne naissance à un $(\prod_{i=1}^{l} p_i^{\,n_i}, k, \lambda) - HD$.

Dans le cas où v est pair, la méthode de construction est la même que dans le cas où v est impair mais, comme nous l'avons déjà remarqué à la fin du paragraphe 3, on est alors obligé de supposer que $\frac{\lambda\,(2^{n_1} - 1)}{2\,(k-1)}$ est entier.

Bibliographie

[1] S. H. Y. HUNG and N. S. MENDELSOHN, Handcuffed designs, *Aequationes Math.* **11** (1974), 256–266.

[2] J. F. LAWLESS, On the construction of handcuffed designs, *J. of Combinatorial Theory (A)* **16** (1974), 76–86.

[3] F. MAURIN, Construction de plans en blocs de chaînettes, *Publicationes Mathematicae* **33** (1986), 283–285, *Debrecen.*

FRANCIS MAURIN
6. RUE MIZON
75015 PARIS

(Reçu le 29 Mai, 1987)