Publl. Math. Debrecen
40 / 1–2 (1992), 1–10

Об одном всегда сходящемся итерационном методе для решения нелинейных уравнений

М. ВАРТЕРЕС (Дебрецен)

Abstract. For solving nonlinear equations J. Herzberger [1] worked out a class of the always convergent iterations generated by well known interpolation polynomials. He used interval analytic tools to the construction of his procedures. The purpose of this paper is to generalise one of these iterations. The derivation, sufficient conditions of convergence and error estimates of our iterative methods are described and proved.

1. Введение

Сегмент-арифметические разновидности итерационных методов, порождённых общими интерполирующими многочленами, были изучены Й. Херцбергером в статье [1]. Настоящая работа обобщает один из основанных на одной точке итерационных методов. Описанный в [1] способ для представления последовательности точек итерации использует квадратный интерполирующий многочлен, который в данной точке прикасается во втором порядке к кривой функции. Возник вопрос, можно ли вместо квадратного многочлена пользоваться другой функцией для построения последовательности точек итерации. Оказалось, что это возможно, и можно доказать теорему о сходимости, аналогичную теореме Херцбергера [1].

Обозначим множество вещественных чисел через $\mathbf{R}$, числа через $x, y, z, \dots$, и сегменты через $X, Y, Z, \dots$. Пусть $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ операция на $\mathbf{R}$. В этом случае операция $*$ между X и Y определёна, как

$$X * Y = \{x * y \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Длину сегмента $X = [x_1, x_2]$ обозначим $d(X)$ и среднюю точку $m(X)$, т.е. $d(X) = x_2 - x_1$ и $m(X)_= \frac{x_1 + x_2}{2}$.

2. Описание метода

Условия и обозначения (2.1):

Пусть x_0 является приближённым значением корня α действительной функции f, и $X^{(0)}$ исходным сегментом так, что

$$\alpha \in X^{(0)} = \{x \mid |x - x_0| \le \varepsilon_0\}.$$

Обозначим сегмент

$$\{x \mid |x - x_0| \le 2\varepsilon_0\}$$

через X. Допустим, что функция f непрерывно дифференцируема до третего порядка на X, и следующие условия для любого $x \in X$:

$$h_1 \le f'(x) \le h_2, \quad h_1 \cdot h_2 > 0,$$
$$k_1 \le f'''(x) \le k_2.$$

Введём обозначения:

$$H = [h_1, h_2] \quad \text{и} \quad K = [k_1, k_2].$$

Пусть будет задана любая функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывно дифференцируема третего порядка.

Наш метод следующий. Допустим, что уже известно k-ое приближённое значение корня α — x_k, а также известен отрезок приближения

$$X^{(k)} = \{x \mid |x - x_k| \le \varepsilon_k\}.$$

Также известно, что $\alpha \in X^{(k)}$. Введём обозначение:

$$Z^{(k)} = \begin{cases} [x_k - \varepsilon_k, x_k], & \text{если } f(x_k) \cdot h_1 > 0 \\ [x_k, x_k + \varepsilon_k], & \text{если } f(x_k) \cdot h_1 < 0 \end{cases}$$

Выберем линейную трансформацию для функции g так, чтобы её кривая прикасалась во втором порядке к функции f в точке $(x_k, f(x_k))$, то есть определяем функцию

$$G_k(x) = c \cdot g(x - \mu) + \lambda$$

при условиях

$$G_k^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k), \quad i = 0, 1, 2. \tag{2.2}$$

Так как функция $G_k'''(x)$ непрерывна, она ограниченна на сегменте X. Обозначим её нижнюю и верхнюю грань через l_{k1} и l_{k2}, и сегмент $[l_{k1}, l_{k2}]$ через $L^{(k)}$. Решим, есть ли нулевая точка у функции $G_k(x)$ на отрезке

$$\{x \mid |x - x_k| \leq 2\varepsilon_k\}.$$

Если нет, пусть новым приближённым сегментом будет

$$X^{(k+1)} = Z^{(k)}. \tag{2.3}$$

Если имеется, обозначим одно приближённое на данном отрезке значение этого корня через $\tilde{x}_k$; к примеру приближённым значением может быть

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k - \varepsilon_k, & \text{если} \quad f(x_k)h_1 > 0 \\ x_k + \varepsilon_k, & \text{если} \quad f(x_k)h_1 < 0. \end{cases}$$

При $f(\tilde{x}_k) = 0$ метод кончится на $\tilde{x}_k = \alpha$, а в случае $f(\tilde{x}_k) \neq 0$ пусть

$$F^{(k)} = \left\{ G_k(\tilde{x}_k) + \frac{K - L^{(k)}}{3!}(\tilde{x}_k - x_k)^3 \right\},$$

а новым приближённым сегментом будет

$$X^{(k+1)} = \left\{ \tilde{x}_k - \frac{F^{(k)}}{H} \right\} \bigcap Z^{(k)}. \tag{2.4}$$

Средняя точка нового отрезка приближения даёт новое приближённое значение, то есть

$$x_{k+1} = m(X^{(k+1)}), \tag{2.5}$$

а новая оценка погрещности будет

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{d(X^{(k+1)})}{2}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. *Если выполняются условия* (2.1), *то сконструированная с помощью нашего метода последовательность* $\{x_k\}$ *сходится и*

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha.$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $k \geq 0$, $\alpha \in X^{(k)}$. Допустим, что существует $k \geq 0$ при котором $\alpha \in X^{(k)}$. А теперь рассмотрим, содержится ли корень α на сегменте $X^{(k+1)}$. Сначала докажем, что $\alpha \in Z^{(k)}$. Пусть $h_1 > 0$, тогда функция f'

положительна на отрезке X, то есть f строго монотонно возрастает на сегменте X. Поэтому если $f(x_k) > 0$, то $\alpha < x_k$, но в силу индукционного условия $\alpha \in X^{(k)}$, и так

$$\alpha \in [x_k - \varepsilon_k, x_k] = Z^{(k)}.$$

А если выполняется $f(x_k) < 0$, то $\alpha > x_k$, но применяя соотношение $\alpha \in X^{(k)}$ получим:

$$\alpha \in [x_k, x_k + \varepsilon_k] = Z^{(k)}.$$

В случае $h_1 < 0$ доказывается аналогично. А теперь докажем, что $\alpha \in X^{(k+1)}$. Мы имеем два случая. Если у функции $G_k(x)$ нет нулевой точки на сегменте

$$\{x \mid |x - x_k| \le 2\varepsilon_k\}$$

то согласно по определению (2.3) $X^{(k+1)} = Z^{(k)}$, и таким образом теорема доказана. А если функция $G_k(x)$ имеет корень на данном сегменте, то обозначим через $\tilde{x}_k$ одно приближённое на этом сегменте значение этого корня. В силу условия нашей теоремы мы можем применить формулу Тэйлора для функций $f(x)$ и $G_k(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 \\ &+ \frac{f'''(\zeta)}{3!}(x - x_k)^3, \\ G_k(x) =& G_k(x_k) + G_k'(x_k)(x - x_k) + \frac{G_k''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 \\ &+ \frac{G_k'''(\eta)}{3!}(x - x_k)^3, \end{aligned}$$

где $\zeta = x_k + \vartheta_1(x - x_k)$ и $\eta = x_k + \vartheta_2(x - x_k)$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$, $x \in X$. По (2.2) очевидно, что функция разности

$$f(x) - G_k(x) = \frac{f'''(\zeta) - G_k'''(\eta)}{3!}(x - x_k)^3.$$

Подставя

$$f(\tilde{x}_k) = G_k(\tilde{x}_k) + \frac{f'''(\zeta) - G_k'''(\eta)}{3!}(\tilde{x}_k - x_k)^3,$$

и так как $f'''(\zeta) \in K$, $G_k'''(\eta) \in L^{(k)}$, можно записать

$$f(\tilde{x}_k) \in \left\{ G_k(\tilde{x}_k) + \frac{K - L^{(k)}}{3!}(\tilde{x}_k - x_k)^3 \right\} = F^{(k)}.$$

Согласно теореме о среднем Лагранжа

$$-f(\tilde{x}_k) = f(\alpha) - f(\tilde{x}_k) = f'(\zeta)(\alpha - \tilde{x}_k), \tag{2.7}$$

где $\zeta = \tilde{x}_k + \vartheta(\alpha - \tilde{x}_k)$, $\vartheta \in (0,1)$. Так как у функции f' знак не меняется на сегменте X, и $f'(\zeta) \neq 0$, упорядочивая равенство (2.7) получаем

$$\tilde{x}_k - \frac{f(\tilde{x}_k)}{f'(\zeta)} = \alpha.$$

Знаем, что $f'(\zeta) \in H$ и $f'(\tilde{x}_k) \in F^{(k)}$, поэтому

$$\alpha \in \left\{ \tilde{x}_k - \frac{F^{(k)}}{H} \right\}.$$

Мы уже доказали, что $\alpha \in Z^{(k)}$, то есть

$$\alpha \in \left\{ \tilde{x}_k - \frac{F^{(k)}}{H} \right\} \bigcap Z^{(k)} = X^{(k+1)}.$$

И теперь мы уже знаем, что

$$\alpha \in X^{(k)} \tag{2.8}$$

для любого неотрицательного целого числа. По построению приближённых сегментов очевидно, что

$$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \dots,$$

и

$$\left. \begin{array}{c} d(X^{(k+1)}) \le d(Z^{(k)}) \\ d(Z^{(k)}) = \frac{d(X^{(k)})}{2} \end{array} \right\} \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \dots.$$

Поэтому

$$d(X^{(k+1)}) \le \frac{d(X^{(k)})}{2}, \quad \text{для} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и можно утверждать, что

$$\lim_{k \to \infty} d(X^{(k)}) = 0.$$

Но отсюда по (2.8) получается

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \alpha.$$

Пусть $X^{(k)} = [x_{1k}, x_{2k}]$, в этом случае $x_{1k} \le x_k \le x_{2k}$. Так как $\lim\limits_{k \to \infty} x_{1k} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{2k} = \alpha$, поэтому $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \alpha$, теорема доказана.

Условия и обозночения (2.9):

Пусть α – корень действительной функции f, $\varepsilon \leq \Gamma$ и функция f три раза непрерывно дифференцируема на отрезке
$$\hat{X} = \{x \mid |x-\alpha| \leq \varepsilon\}.$$

Пусть для $x \in \hat{X}$
$$\hat{h}_1 \leq f'(x) \leq \hat{h}_2, \quad \text{где} \quad \hat{h}_1, \hat{h}_2 > 0,$$
$$0 \neq m_2 \leq |f''(x)| \leq M_2,$$
$$|f'''(x)| \leq M_3.$$

Введём ещё следующее обозначение: $\min(|\hat{h}_1|, |\hat{h}_2|) = m_1$. Пусть функция $g : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ три раза непрерывно дифференцируема, $0 < |g''(x)|$, если $x \in D$, и
$0 < q_2 \leq |g''(x)| \leq Q_2, \quad$ *для* $\quad x \in D^* \cap D, \quad$ *где*

$$\begin{aligned} D^* = &\left[g'^{-1}\left(\tfrac{\hat{h}_1 q_2}{M_2}\right), g'^{-1}\left(\tfrac{\hat{h}_2 Q_2}{m_2}\right)\right] \cup \left[g'^{-1}\left(-\tfrac{\hat{h}_2 Q_2}{m_2}\right), g'^{-1}\left(-\tfrac{\hat{h}_1 q_2}{M_2}\right)\right] \\ &\cup \left[g'^{-1}\left(\tfrac{\hat{h}_1 Q_2}{m_2}\right), g'^{-1}\left(\tfrac{\hat{h}_2 q_2}{M_2}\right)\right] \cup \left[g'^{-1}\left(-\tfrac{\hat{h}_2 q_2}{M_2}\right), g'^{-1}\left(-\tfrac{\hat{h}_1 Q_2}{m_2}\right)\right] \end{aligned}$$

Кроме того допустим, что
$$|g'''(x)| \leq Q_3, \quad \textit{если} \quad x \in \{D^* + [-2\Gamma, 2\Gamma]\} \cap D.$$

Лемма 2.2. *Если выполняются условия* (2.9) *и*
$$\varepsilon < \sqrt{\frac{3}{4}\frac{m_1 q_2}{q_2 M_3 + M_2 Q_3}},$$
то для любого $\hat{x} \in \hat{X}$ у линейно трансформированной функции g, которая прикасалась во втором порядке к функции f в точке $(\hat{x}, f(\hat{x}))$, имеет корень на сегменте $\hat{X}$.

Доказательство. Пусть $\hat{x}$ произвольно фиксированное число на отрезке $\hat{X}$. Обозначим через $G(x)$ ту функцию, которую мы получаем из функции g с помощью соответствующей линейной трансформации, т.е.

$$\begin{aligned} G(x) &= cg(x-\mu) + \lambda, \\ G^{(i)}(\hat{x}) &= f^{(i)}(\hat{x}), \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Сначала допустим, что $\hat{x} > \alpha$ и функция f' положительна на сегменте $\hat{X}$. Тогда $G(\hat{x}) = f(\hat{x}) > 0$. Разложим в ряд Тэйлора f и G до четвертого члена включительно:

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x-\hat{x}) + \frac{f''(\hat{x})}{2!}(x-\hat{x})^2 + \frac{f'''(\zeta)}{3!}(x-\hat{x})^3,$$
$$G(x) = G(\hat{x}) + G'(\hat{x})(x-\hat{x}) + \frac{G''(\hat{x})}{2!}(x-\hat{x})^2 + \frac{G'''(\eta)}{3!}(x-\hat{x})^3,$$

где $\zeta = \hat{x} + \vartheta_1(x-\hat{x})$, $\eta = \hat{x} + \vartheta_2(x-\hat{x})$ и $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$. Вычитая два уравнения друг из друга по (2.10) получается

$$G(x) = f(x) - \frac{f'''(\zeta) - G'''(\eta)}{3!}(x-\hat{x})^3.$$

Пусть теперь $x = \alpha - \varepsilon$. То

$$G(\alpha-\varepsilon) = f(\alpha-\varepsilon) - \frac{f'''(\zeta) - G'''(\eta)}{3!}(\alpha-\varepsilon-\hat{x})^3.$$

Но $f(\alpha-\varepsilon) = -[f(\alpha) - f(\alpha-\varepsilon)]$, и применяя теорему о среднем Лагранжа мы получаем, что

$$G(\alpha-\varepsilon) = -f'(\nu)\varepsilon - \frac{f'''(\zeta) - G'''(\eta)}{3!}(\alpha-\varepsilon-\hat{x})^3,$$

где $\nu \in (\alpha-\varepsilon, \alpha)$. Теперь мы докажем, что $G(\alpha-\varepsilon) < 0$. Это неравенство выполняется при

$$-f'(\nu)\varepsilon - \frac{f'''(\zeta) - G'''(\eta)}{3!}(\alpha-\varepsilon-\hat{x})^3 < 0,$$

то есть если

$$-f'(\nu)\varepsilon < \frac{f'''(\zeta) - G'''(\eta)}{3!}(\alpha-\varepsilon-\hat{x})^3$$

выполняется. Поэтому докажем, что

$$T = -\frac{1}{3!}\frac{f'''(\zeta) - G'''(\eta)}{f'(\nu)\cdot\varepsilon}\ (\alpha-\varepsilon-\hat{x})^3 < 1.$$

Можно записать, что

$$\begin{aligned}|T| &= \frac{1}{3!}\frac{|f'''(\zeta) - G'''(\eta)|}{|f'(\nu)|\cdot\varepsilon}\ |\alpha-\varepsilon-\hat{x}|^3 \le \\ &\le \frac{1}{3!}\frac{|f'''(\zeta)| + |G'''(\eta)|}{|f'(\nu)|\cdot\varepsilon}\ |\alpha-\varepsilon-\hat{x}|^3 \le \\ &\le \frac{1}{3!}\frac{M_3 + |c|\,|g'''(\eta-\mu)|}{m_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}(2\varepsilon)^3.\end{aligned}$$

Но с одной стороны в силу соотношении

$$G''(\hat{x}) = c\,g''(\hat{x}-\mu) = f''(\hat{x}),$$

можно записать, что

$$|c| = \frac{|f''(\hat{x})|}{|g''(\hat{x}-\mu)|}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{m_2}{Q_2} \le |c| \le \frac{M_2}{q_2},$$

а с другой стороны так как

$$G'(\hat{x}) = c\,g'(\hat{x}-\mu) = f'(\hat{x})$$

и функция g' строго монотонна на D, поэтому существует функция обратная к g, мы получаем, что

$$-\mu = g'^{-1}\left(\frac{f'(\hat{x})}{c}\right) - \hat{x} \in \{D^* - \hat{X}\}.$$

Но $\eta \in \hat{X}$, итак

$$\eta - \mu \in \{D^* + [-2\Gamma, 2\Gamma]\} \cap D$$

значит $|g'''(\eta-\mu)| \le Q_3$. Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} |T| &\le \frac{1}{3!}\frac{M_3 + \frac{M_2}{q_2}Q_3}{m_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}(2\varepsilon)^3 = \\ &= \frac{4}{3}\frac{q_2M_3 + M_2Q_3}{m_1q_2}\varepsilon^2 < 1. \end{aligned}$$

То есть $G(\alpha-\varepsilon) < 0$, но $G(\hat{x}) > 0$, поэтому существует $\tilde{x} \in \hat{X}$ такое, что $G(\tilde{x}) = 0$. Доказательство леммы в остальных случаях проводится таким же образом.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия (2.1), (2.9) и пусть*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\varepsilon_0 < \Gamma \\ 0 \ne m_2 \le |f''(x)| \le M_2, \quad \textit{если} \quad x \in X. \end{array} \right. \tag{2.11}$$

В этом случае существует индекс $i \in N$ такой, что для любого $k \ge i$ сконструированная с нашим методом функция $G_k(x)$ имеет корень на сегменте

$$\{x \mid |x - x_k| \le 2\varepsilon_k\}.$$

Доказательство. Пусть $\hat{h}_1 = h_1$, $\hat{h}_2 = h_2$,

$$\begin{aligned} m_1 &= \min(|h_1|, |h_2|), \\ M_3 &= \max(|k_1|, |k_2|). \end{aligned}$$

Пусть индекс

$$i = \min\left\{ j \mid \varepsilon_j < \sqrt{\frac{3}{4}\frac{m_1 q_2}{M_3 q_2 + M_2 Q_3}} \right\}.$$

Так как $\varepsilon_j = \frac{d(X^{(j)})}{2}$ монотонно убывающая, сходящаяся к нулю последовательность, поэтому для любого $k \geq i$ выполняется

$$\varepsilon_k < \sqrt{\frac{3}{4}\frac{m_1 q_2}{M_3 q_2 + M_2 Q_3}}.$$

Пусть теперь индекс $k \geq i$ фиксированный. Так как

$$\hat{X}^{(k)} = \{x \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon_k\} \subseteq X,$$

выполняются условия леммы 2.2., поэтому $G_k(x)$ имеет корень на сегменте $\hat{X}^{(k)}$. Но $|x_k - \alpha| \leq \varepsilon_k$, так у функции $G_k(x)$ есть корень на сегменте

$$\{x \mid |x - x_k| \leq 2\varepsilon_k\}.$$

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия* (2.1), (2.9), (2.11). *Предположим ещё, что в нашем методе воспользуется корнями функций $G_k(x)$, чтобы считать следующие приближённые значения. В этом случае для погрешности ε_{k+1} итерационной точки x_{k+1} справедлива следующая оценка:*

$$\varepsilon_{k+1} \leq \frac{4}{3}\frac{q_2 M_3 + M_2 Q_3}{m_1 q_2}\varepsilon_k^3.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.3. существует индекс $i \in N$ такой, что для любого $k \geq i$ новый приближённый сегмент имеет вид:

$$X^{(k+1)} = \left\{\tilde{x}_k - \frac{F^{(k)}}{H}\right\} \bigcap Z^{(k)},$$

где $\tilde{x}_k$ — корень функции $G_k(x)$ на сегменте $\{x \mid |x - x_k| \leq 2\varepsilon_k\}$. При помощи соотношения

$$\begin{aligned} d(X^{(k+1)}) &\leq d\left(\left\{\hat{x}_k - \frac{F^{(k)}}{H}\right\}\right) = d\left(\frac{F^{(k)}}{H}\right) = \\ &= d\left(\frac{G_k(\tilde{x}_k) + \frac{K - L^{(k)}}{3!}(\tilde{x}_k - x_k)^3}{H}\right) = \\ &= d\left(\frac{\frac{K-L^{(k)}}{3!}(\tilde{x}_k - x_k)^3}{H}\right) = \frac{|\tilde{x}_k - x_k|^3}{3!} d\left(\frac{K - L^{(k)}}{H}\right), \end{aligned}$$

и так как $\tilde{x}_k \in \{x \mid |x - x_k| \le 2\varepsilon_k\}$, получается соотношение

$$d(X^{(k+1)}) \le \frac{(2\varepsilon_k)^3}{3!} d\Big(\frac{K - L^{(k)}}{H}\Big).$$

А теперь даём оценку на длину сегмента $\frac{K-L^{(k)}}{H}$. Так как

$$\begin{aligned}\frac{K - L^{(k)}}{H} =& [k_1 - l_{k2}, k_2 - l_{k1}] * \Big[\frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_1}\Big] = \\ =& \Bigg[\min\Big(\frac{k_1 - l_{k2}}{h_2}, \frac{k_1 - l_{k2}}{h_1}, \frac{k_2 - l_{k1}}{h_2}, \frac{k_2 - l_{k1}}{h_1}\Big), \\ & \max\Big(\frac{k_1 - l_{k2}}{h_2}, \frac{k_1 - l_{k2}}{h_1}, \frac{k_2 - l_{k1}}{h_2}, \frac{k_2 - l_{k1}}{h_1}\Big)\Bigg]\end{aligned}$$

отсюда вытекает, что

$$d\left(\frac{K - L^{(k)}}{H}\right) \le 2\frac{M_3 + \frac{M_2}{q_2} Q_3}{m_1} = 2\frac{q_2 M_3 + M_2 Q_3}{m_1 q_2}.$$

В конечном итоге получаем, что

$$2\varepsilon_{k+1} \le \frac{8 \cdot \varepsilon_k^3}{6} \cdot 2\frac{q_2 M_3 + M_2 Q_3}{m_1 q_2},$$

то есть

$$\varepsilon_{k+1} \le \frac{4}{3}\frac{q_2 M_3 + M_2 Q_3}{m_1 q_2}\varepsilon_k^3.$$

Литература

[1] J. Herzberger, Global konvergente Interpolationsmethoden zur Nullstelleneinschlissung, *Beitrage zur Numerischen Mathematik* **7** (1979), 65–74.
[2] R.E. Moore, Interval Analysis, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs* (1966).
[3] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs* (1964).

М. ВАРТЕРЕС
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Л. КОШУТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
4010 ДЕБРЕЦЕН, ВЕНГРУЯ

(Поступило: 20. VI. 1988 г.)