Publ. Math. Debrecen
40 / 1–2 (1992), 71–74

Новое доказательство теоремы фон Неймана

А. НАГЕЛ (Будапешт)

Следующая теорема хорошо известна:

Теорема 1. *Пусть $(G,\cdot)$ любая коммутативная полугруппа. Тогда сушествует инвариантное среднее Φ на $L^\infty(G)$, т.е.*

(1) *Φ линейный функционал на $L^\infty(G)$.*
(2) *Для любого $f \geq 0$, $f \in L^\infty(G)$, выполняется $\Phi(f) \geq 0$.*
(3) *$\Phi(1) = 1$.*
(4) *$\Phi(T_a f) = \Phi(f)$ для любых $f \in L^\infty(G)$ и $a \in G$.*

Теорема 1. для групп появилась у фон Неймана [6], а для полугрупп у Дэя [1]. Здесь мы даем новое доказательство.

Определение 2. Пусть X — любое, непустое множество. Пусть, далее, $L^\infty(X)$ — множество всех ограниченных действительнозначных функций на X. Среднее Φ на $L^\infty(X)$ есть вещественный линейный функционал на $L^\infty(X)$, обладающий тем сбойством, что

$$(*)\qquad \inf\{f(x) : x \in X\} \leq \Phi(f) \leq \sup\{f(x) : x \in X\}, \quad f \in L^\infty(X).$$

Замечание 3. Заметим, что свойство $(*)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$(**)\qquad \Phi(f) \geq 0 \quad \text{при} \quad f \geq 0 \quad \text{и} \quad f \in L^\infty(X) \quad \text{и} \quad \Phi(1) = 1.$$

Определение 4. Пусть $(G,+)$ коммутативная полугруппа. Для $a \in G$ и $f \in L^\infty(G)$ определим $T_a f$ равенством

$$(T_a f)(x) := f(a + x) \quad \text{для} \quad x \in G.$$

Инвариантное среднее Φ на $L^\infty(G)$ есть такое среднее, что $\Phi(T_a f) = \Phi(f)$ для любых $f \in L^\infty(G)$ и $a \in G$. Для каждого

$f \in L^\infty(G)$ положим $S(f) := \sup_G f$. Очевидно, S — положительно однородный и выпуклый функционал, т.е.

$$(***) \qquad S(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot S(f) \text{ для любых } \lambda \geq 0 \quad \text{и} \quad f \in L^\infty(G).$$

$$(****) \qquad S(f+g) \leq S(f) + S(g) \text{ для любых } f, g \in L^\infty(G).$$

Отсюда следует, что $S \circ T_a : L^\infty(G) \to \mathbf{R}$ тоже положительно однородный и выпуклый функционал. Далее, $(S \circ T_a)(f) \leq S(f)$. Пусть $V(G) := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in G, n \in \mathbf{N}\}$, $\underline{a} := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. При $\underline{a}, \underline{b} \in V(G)$, пусть $\underline{a} \oplus \underline{b} := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$. Таким образом, $\underline{a} \oplus \underline{b} \in V(G)$.

Рассмотрим элемент $a \in V(G)$. Для каждого $f \in L^\infty(G)$ положим

$$(\text{i}) \qquad (T_{\underline{a}} f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (T_{a_i} f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a_i + x) \text{ для } x \in G,$$

т.е. $T_{\underline{a}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{a_i}$. Тогда ясно, что $S \circ T_{\underline{a}} : L^\infty(G) \to \mathbf{R}$ тоже положительно однородный и выпуклый функционал. Далее, $(S \circ T_{\underline{a}})(f) \leq S(f)$.

Теперь мы перейдём к новому доказательству: Для $f \in L^\infty(G)$ пусть $p(f) := \inf\bigl\{(S \circ T_{\underline{a}})(f) : \underline{a} \in V(G)\bigr\}$. Покажем сначала, что p обладает следующими свойствами:

(a) p положительно однородный и
(b) выпуклый функционал.
(c) Если $f \geq 0$, то $p(f) \geq 0$, и если $f \leq 0$, то $p(f) \leq 0$.
(d) $p(1) = 1$ и $p(-1) = -1$.
(e) Для любого $a \in G$ имеет место $p(f - T_a f) \leq 0$ и $p(T_a f - f) \leq 0$.

(a) Это непосредственно следует из определения 4, так как $S \circ T_a$ является положительно однородным функционалом.

(b) Пусть f, g обозначают любые функции из $L^\infty(G)$, а ε — произвольное положительное число. Тогда найдутся такие элементы $\underline{a}, \underline{b} \in V(G)$, что

$$(S \circ T_{\underline{a}})(f) < p(f) + \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad (S \circ T_{\underline{b}})(g) < p(g) + \varepsilon/2.$$

Положим $\underline{c} := \underline{a} \oplus \underline{b}$. Ясно, что $\underline{c} \in V(G)$ и $T_{\underline{c}} := T_{\underline{a} \oplus \underline{b}} = T_{\underline{a}} \circ T_b = T_{\underline{b}} \circ T_{\underline{a}}$.

Следовательно, $p(f+g) \leq (S \circ T_{\underline{c}})(f+g) \leq S \circ T_{\underline{c}}(f) + (S \circ T_{\underline{c}})(g) = S(T_{\underline{c}} f) + S(T_{\underline{c}} g) = S(T_{\underline{b}}(T_{\underline{a}} f)) + S(T_{\underline{a}}(T_{\underline{b}} g)) \leq S(T_{\underline{a}} f) + S(T_{\underline{b}} g) < p(f) +$

$p(g)+\varepsilon/2+\varepsilon/2 = p(f)+p(g)+\varepsilon$. Таким образом, $p(f+g) < p(f)+p(g)$ для любых $f, g \in L^\infty(G)$.

(c) Очевидно.

(d) Очевидно.

(e) Пусть $a \in G$, и $n \in \mathbf{N}$ — произвольное натуральное число. Рассмотрим теперь элемент $\underline{a_n} := (a, 2a, 3a, \ldots, n \cdot a)$.

Примениия (i), мы получим

$$T_{\underline{a_n}}(f - T_a f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{ia}(f - T_a f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(T_{ia} f - T_{(i+1)a} f) = $$
$$= \frac{1}{n}(T_a f - T_{(n+1)a} f) \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Очевидно, существует такое число $K < +\infty$, что $|T_a f - T_{(n+1)a} f| \leq K$. Отсюда следует, что $T_{\underline{a_n}}(f - T_a f) \to 0$. Следовательно, $p(f - T_a f) \leq 0$. Аналогично следует что, $p(T_a f - f) \leq 0$ для каждого $a \in G$.

Согласно теореме Хана–Банаха, существует линейный функционал Φ на $L^\infty(G)$ такой, что

$$\Phi(f) \leq p(f) \quad \text{для любого} \quad f \in L^\infty(G) \text{ и } \Phi|_{\{0\}} = 0.$$

Докажем, что Φ удовлетворяет соотношениям (1), (2), (3) и (4). В самом деле,

(1) Очевидно.

(2) Для любого $f \in L^\infty(G)$ имеем $\Phi(f) \leq p(f)$.
Таким образом, $\Phi(-f) \leq p(-f)$ и $-\Phi(f) \leq p(-f)$. Поэтому $-p(-f) \leq \Phi(f) \leq p(f)$. Если $f \geq 0$, то $p(-f) \leq 0$, поэтому $\Phi(f) \geq 0$. Аналогично следует, что $\Phi(f) \leq 0$ для $f \leq 0$.

(3) Так как $-p(-1) \leq \Phi(1) \leq p(1)$, выполняется неравенство $1 \leq \Phi(1) \leq 1$, т.е. $\Phi(1) = 1$.

(4) Пусть $a \in G$ и $f \in L^\infty(G)$. Тогда $\Phi(f - T_a f) \leq p(f - T_a f) \leq 0$. Так как Φ линейный, поэтому $\Phi(f) \leq \Phi(T_a f)$. Совершенно аналогично следует, что $\Phi(f) \geq \Phi(T_a f)$. Отсюда прямо вытекает инвариантность Φ. Итак, теорема 1 полностью доказана. $\square$

References

[1] M.M. Day, Ergodic theorems for Abelian semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **51** (1942), 399–412.
[2] E. Folner, On group with full Banach mean value, *Math. Scand.* **3** (1955), 243–254.
[3] E. Folner, Note on group with and without full Banach mean value, *Math. Scand.* **5** (1957), 5–11.
[4] F.P. Greenleaf, Invariant means on topological groups, *Van Nostrand*, *New York*.
[5] E. Hewitt and K. Ross, Abstract Harmonic Analysis I, *Springer–Verlag*, *Berlin-Gottingen–Heidelberg*.
[6] J. von Neumann, Zur allgemeinen Theorie des Masses, *Fund. Math.* **13** (1929), 73–115.

ÁRPÁD NÁGEL
BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
H—1521 BUDAPEST, HUNGARY

(Поступило: 10. XI. 1989 г.)