Publ. Math. Debrecen
40 / 3–4 (1992), 169–193

p–изометрические представления и редукция ослабленной проблемы Бернсайда

В.И. СУЩАНСКИЙ (Киев)

Введение

Как известно (см. напр. [1]), так называемая ослабленная проблема Бернсайда $B'(r,m)$ может быть сформулирована следующим образом:

Конечно ли число конечных групп данного периода m с данным числом порождающих элементов r ?

Доказанные в работе Ф.Холла и Г.Хигмена [2] редукционные теоремы позволяют, учитывая классификацию конечных простых групп, свести эту задачу к случаю примарной экспоненты, т.е. наибольший интерес представляет проблема $B'(r,p^\alpha)$, где p—простое число. Проблема $B'(r,p)$ решена А.И.Кострикиным [3], [4], получившим свой результат как следствие из найденного им решения соответствующих проблем теории лиевых колец. При $\alpha > 1$ применение методов теории колец Ли и вычислений с коммутаторами в свободных группах пока успеха не имело[1]. В связи с этим естественной представляется задача поиска других путей и подходов к решению проблемы $B'(r,p^\alpha)$. В настоящей работе описывается один из возможных новых подходов к ее решению, основывающийся на понятии p–изометрического представления финитно аппроксимируемых p–групп, т.е. представления их изометриями метрического пространства $\tilde{Z}_p$ кольца целых p–адических чисел с естественной метрикой. Поскольку проблема $B'(r,m)$ эквивалентна вопросу о конечности финитно аппроксимируемых групп экспоненты m с r порождающими, ее решение при $m =$

[1]Примечание при корректуре: Проблема $B'(r,p^\alpha)$ решена Е. И. Зельмановым в 1989 г. методами теории полеу Ли. Поиск теоретико-группового решения остается актуальной задачей.

p^α сводится к рассмотрению подгрупп группы изометрий пространства $\tilde{Z}_p$, порожденных изометриями специального вида. Основными результатами работы являются теоремы 5.1 (случай $p > 2$) и 5.2 (случай $p = 2$), в которых утверждается, что проблема $B'(r, p^\alpha)$ решается положительно для всех $\alpha, r \in N$, тогда и только тогда, когда любая бесконечная подгруппа группы изометрий пространства $\tilde{Z}_p$, порожденная двумя изометриями специального вида, имеет неограниченную экспоненту. При доказательстве этих утверждений существенно используется конкретное (т.н. присоединенное) представление финитно аппроксимируемых p–групп изометриями пространства $\tilde{Z}_p$.

§1. Силовская p–подгруппа группы изометрий метрического пространства целых p–адических чисел.

Пусть $\tilde{Z}_p$—метрическое пространство кольца Z_p целых p–адических чисел с естественной метрикой, которая, как известно [5], может быть о пределена равенством

$$\rho(x,y) = \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(x-y)}, \quad x, y \in Z_p,$$

где $v_p(t)$ — p–адический показатель числа $t \in Z_p$, т.е. такое наименьшее натуральное число n, что $t = p^n u, u$—делитель единицы кольца Z_p. Если числа x и y представлены в канонической записи: $x = x_1 x_2 \ldots$, $y = y_1 y_2 \ldots$ $(x_i, y_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\})$, то расстояние между ними определяется длиной их общего начала, т.е. $\rho(x,y) = \left(\frac{1}{p}\right)^n$ тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, но $x_{n+1} \neq y_{n+1}$. Метрика ρ задает на пространстве $\tilde{Z}_p$ семейство $\{\sim_k\}_{k \in N}$ отношений эквивалентности, определяемых для любого $k \in N$ условием

$$x \sim_k y \Longleftrightarrow \rho(x,y) \leq \left(\frac{1}{p}\right)^k \quad (x, y \in \tilde{Z}_p).$$

Понятно, что биективное преобразование u множества $\tilde{Z}_p$ будет изометрией пространства $\tilde{Z}_p$ на себя тогда и только тогда, когда оно сохраняет все отношения еквивалентности $\sim_k$, $k \in N$. Иначе говоря, разбиения пространства $\tilde{Z}_p$ на классы эквивалентностей $\sim_k$, $k \in N$, и только они будут системами импримитивности группы $\mathrm{Is}\,\tilde{Z}_p$ всех изометрий пространства $\tilde{Z}_p$ на себя, а сама эта группа будет максимальной подгруппой симметрической группы $S(Z_p)$ с такими областями импримитивности. Согласно определению сплетения по последовательности групп подстановок, отсюда сразу же получаем (см. также [6], [7]):

Предложение 1.1. *Группа* $\operatorname{Is} Z_p$ *изометрий метрического пространства кольца целых p–адических чисел с естественной метрикой изоморфна (как группа преобразований) сплетению* $\underset{i=1}{\overset{n}{\wr}} S_p^{(i)}$ *по последовательности симметрических групп степеней p.*

При этом каждая из симметрических групп $S_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots)$ действует на множестве цифр $\{0, 1, \dots, p-1\}$, которое мы отождествим с полем F_p вычетов по модулю p. Элементы группы $\operatorname{Is} Z_p$ удобно представлять бесконечными наборами вида

$$u = [\sigma_1, \sigma_2(x_1), \sigma_3(x_1, x_2), \dots], \tag{1}$$

где $\sigma_1 \in S_p, \sigma_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \in S_p^{F_p \times \dots \times F_p}$ —функция, определенная на декартовом произведении $F_p \times \dots \times F_p$ $(i-1$ раз) со значениями в S_p $(i \geq 2)$. Действие набора (1) на число $t = t_1 t_2 t_3 \dots$ определяется равенством

$$t^u = t_1^{\sigma_1} t_2^{\sigma_2(t_1)} t_3^{\sigma_3(t_1, t_2)} \dots \tag{2}$$

Следуя [6], наборы вида (1) будем называть таблицами. Группа $\operatorname{Is} Z_p$ является, очевидно, проконечной. Поэтому можно говорить о ее силовских p–подгруппах, которые все между собой сопряжены [8]. Поскольку силовская p–подгруппа симметрической группы S_p степени p является циклической порядка p, из предложения 1.1 сразу же получаем следующее утверждение [6], [9].

Предложение 1.2. *Силовская p–подгруппа группы* $\operatorname{Is} Z_p$ *изоморфна сплетению* $\underset{i=1}{\overset{n}{\wr}} C_p^{(i)}$ *по последовательности* $C_p^{(1)}, C_p^{(2)}, \dots$ *циклических групп степеней p.*

Отождествим каждую из циклических групп $C_p^{(i)}$ степени p с группой сдвигов $x \to x + a$ элементов поля F_p, и будем обозначать групповую операцию в ней символом $+$. Тогда каждому элементу сплетения $\underset{i=1}{\overset{n}{\wr}} C_p^{(i)}$ взаимооднозначно сопоставляется таблица вида

$$u = [a_1, a_2(x_1), a_3(x_1, x_2), \dots], \tag{3}$$

где $a_1 \in F_p$, $a_i(x_1, \dots, x_{i-1})$ —функция от $(i-1)$–го переменного над полем F_p. Согласно равенству (2) при такой форме записи таблица (3) изменяет n–тую цифру числа $t = t_1t_2\cdots \in Z_p$ следующим образом

$$(4) \qquad (t^u)_n = t_n + a_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}).$$

Легко проверяется, что если изометрии u, v заданы своими таблицами $[a_1, a_2(x_1), a_3(x_1, x_2), \ldots]$, $[b_1, b_2(x_1), b_3(x_1, x_2), \ldots]$ соответственно, то, учитывая равенство (4), произведению этих изометрий будет соответствовать таблица

$$(5) \quad [a_1 + b_1, a_2(x_1) + b_2(x_1 + a_1), a_3(x_1, x_2) + b_3(x_1 + a_1, x_2 + a_2(x_1)), \ldots]$$

Тождественному преобразованию соответствует при этом таблица $[0, 0, 0, \ldots]$, а обратной к (3) будет таблица

$$(6) \qquad [-a_1, -a_2(x_1 - a_1), -a_3(x_1 - a_1, x_2 - a_2(x_1 - a_1)), \ldots]$$

Поскольку любая функция $a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных над полем F_p однозначно представляется редуцированным многочленом, то есть элементом фактор–кольца $F_p[x_1, \ldots, x_n]/I$, где I — идеал, порожденный многочленами $x_1^p - x_1, \ldots, x_n^p - x_n$, можно считать, что координатами таблиц вида (3) являются редуцированные многочлены.

Среди всех силовских p–подгрупп группы $\operatorname{Is} Z_p$ естественно выделяется та, элементы которой представляются таблицами вида (3); любая другая силовская p–подгруппа сопряжена с ней с помощью какой-то таблицы вида (1).

Определение 1. Силовскую p–подгруппу группы $\operatorname{Is} Z_p$, изометрии из которой представимы таблицами (3) с действием на элементы Z_p, задаваемым равенством (4), будем называть главной силовской p–подгруппой группы $\operatorname{Is} Z_p$ и обозначать $P(Z_p)$.

Понятно, что выбор главной силовской p–подгруппы зависит от фиксации изоморфных представлений групп $C_p^{(i)}$ сдвигами $x \to x + a$ поля F_p. Далее, говоря о главной силовской p–подгруппе группы $\operatorname{Is} Z_p$, будем предполагать, что все такие представления фиксированны.

Будем обозначать таблицы, соответствующие изометриям, теми же символами, что и сами изометрии. Применяя табличные представления, удобно употреблять следующие сокращения. Начало длины n числа $x = x_1x_2\cdots \in Z_p$ будем обозначать $\overline{x}_n$, а начальный отрезок длины n таблицы $u \in \operatorname{Is} Z_p$ —через u_n. n–тую координату таблицы u обозначим символом $[u]_n$; согласно вышесказанному, $[u]_n$ —редуцированный многочлен от $n-1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. При любом n все начальные отрезки длины n таблиц из $P(Z_p)$ образуют группу, которая изоморфна n–кратному сплетению $\underset{i=1}{\overset{n}{\wr}} C_p^{(i)} = P_n$ циклических групп степени p, то есть является силовской p–подгруппой симметрической группы степени p^n [10]. Отображение $\varphi_n : u_n \to u_{n-1}$ (отбрасывание последней координаты укороченных таблиц) является для произвольного натурального n гомоморфизмом P_n на P_{n-1}, а группа $P(Z_p)$ —предельной группой обратного спектра $\{P_n, \varphi_n\}_{n\in N}$. Учитывая это, имеем

Предложение 1.3. *Силовская p–подгруппа группы изометрий пространства Z_p изоморфна предельной группе обратного спектра силовских p–подгрупп симметрических групп степеней p^n, $n \in N$, отвечающего естественным гомоморфизмам больших силовских p –подгрупп на меньшие.*

Это предложение позволяет использовать при исследовании строения силовской p–подгруппы $P(Z_p)$ результаты и подходы, развитые Л.А. Калужниным [10] при изучении силовских p–подгрупп симметрических групп степеней p^n (см.также [6]).

Для любых $u \in P(Z_p)$, $x \in Z_p$ при произвольном $n \in N$ определим действие u_n на $\overline{x}_n$, полагая $\overline{x}_n^{u_n} = \overline{(x^u)}_n$, т.е. $\overline{(x^u)}_n$ —начало длины n числа x^u. Учитывая принятые сокращения и отдельно полагая для любой таблицы вида (3) $a((x_0) = a_1$, запишем в сокращенном виде равенства для нахождения координат таблиц (5) и (6):

$$[uv]_n = a_n(\overline{x}_{n-1}) + b_n(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}}), \quad n \in N, \tag{7}$$

$$[u^{-1}]_n = -a(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}^{-1}}), \quad n \in N. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) позволяют сводить вычисления в группе $P(Z_p)$ к преобразованиям в алгебре редуцированных многочленов. Учитывая эти соотношения, легко проверяется, что имеют место следующие равенства для нахождения координат трансформы u^v, коммутатора (u, v) и ℓ–той степени таблицы u.

Лемма 1.1. *Для произвольных таблиц $u, v \in P(Z_p)$ с координатами $a_n(\overline{x}_{n-1})$ и $b_n(\overline{x}_{n-1})$ соответственно выполнены следующие соотношения:*

$$\text{(9)}\quad a) \qquad [u^v]_n = -\, b_n\left(\overline{x}_{n-1}^{v_{n-1}^{-1}}\right) + a_n\left(\overline{x}_{n-1}^{v_{n-1}^{-1}}\right) + b_n\left(\overline{x}_{n-1}^{v_{n-1}^{-1}u_{n-1}}\right);$$

$$\text{(10)}\quad б) \quad [(u, v)]_n = -\, a_n\left(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}^{-1}}\right) - b_n\left(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}^{-1}v_{n-1}^{-1}}\right) +$$

$$+ a_n \left(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}^{-1} v_{n-1}^{-1}} \right) + b_n \left(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}^{-1} v_{n-1}^{-1} u_{n-1}} \right);$$

$$(11)\ \textit{в)} \qquad [u^\ell]_n = \sum_{k=0}^{\ell-1} a_n \left(x_{n-1}^{u_{n-1}^k} \right).$$

Аналогичные равенства можно выписать и для других элементарных выражений с таблицами.

Глубиной нееденичной таблицы назовем наибольшее число нулевых координат, стоящих в ее начале; глубина единичной таблицы полагается равной ∞. Глубину таблицы $u \in P(Z_p)$ обозначим гл(u).

Лемма 1.2. *Для произвольных таблиц $u, v \in P(Z_p)$ выполняются соотношения*

a) $\text{гл.}(u^v) = \text{гл.}(u)$;

b) $\text{гл.}(u, v) \geq \min\{\text{гл.}(u),\ \text{гл.}(v)\} + 1$;

v) $\text{гл.}(u^p) \geq \text{гл.}(u) + 1$.

На самом деле утверждения а), б) леммы 1.2 справедливы для сплетений по последовательности абелевых групп. Из соотношения а) следует, что все таблицы грубины $\geq k$ образуют при любом $k \in N$ нормальный делитель группы $P(Z_p)$.

§2. Присоединенное представление.

Пусть G — некоторая группа. Убываюшую цепочку

$$(12) \qquad G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots$$

нормальных подгрупп группы G назовем p–рядом, если выполнены условия

1) $[G_i : G_{i+1}] = p \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$

2) $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{1\}$

На любой группе G, имеющей p–ряд подгрупп естественно вводится неархимедова метрика, согласованная с групповой операцией. Таковой будет функция $\rho(x, y)$, определяемая для произвольних $x, y \in G$ условием

$$(13) \qquad \rho(x, y) = \left(\frac{1}{p}\right)^n \iff xy^{-1} \in G_n, \quad xy^{-1} \notin G_{n+1}.$$

Любой гомоморфизм группы G в $\operatorname{Is} Z_p$, т.е. представление G изометриями пространства $\tilde{Z}_p$, будем кратко называть p–изометрическим представлением G. Нас интересуют p–изометрические представления финитно аппроксимируемых p–групп, при которых образ представляемой группы содержится в главной силовской p–подгруппе группы $\operatorname{Is} Z_p$. Ниже описывается эффективный способ построения точных p–изометрических представлений для произвольных групп с p–рядами, анонсированный нами в [11].

Пусть G—произвольная группа с p–рядом (12) и $\widetilde{G} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} G/G_i$. На множестве $\widetilde{G}$ определим метрику ρ, полагая для любых двух элементов $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in \widetilde{G}$ $\rho(x, y) = \left(\frac{1}{p}\right)^k$ в том и только в том случае, когда $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \dots k)$, $\quad x_{k+1} \neq y_{k+1}$. В метрическом пространстве $(\widetilde{G}, \rho)$ выделим подпространство $\overline{G}$, состоящее из всевозможных последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ таких, что $x_i \supset x_{i+1}$ для всех $i \in N$.

Лемма 2.1. *Метрическое пространство* $(\overline{G}, \rho)$ *изометрично пространству* $\tilde{Z}_p$.

Доказательство.Для каждого $i \in N$ фиксируем систему представителей $T_i = \{t_k^{(i)} \mid k = 1 \dots, p\}$ классов смежности группы G_{i-1} по подгруппе G_i так, чтобы представителем класса смежности G_i был единичный элемент. По этому набору представителей при любом $n \in N$ однозначно определяется система представителей классов смежности группы G по подгруппе G_n. А именно, индукцией по n легко убедиться, что множество элементов вида $t_{k_n}^{(n)} t_{k_{n-1}}^{(n-1)} \dots t_{k_1}^{(1)}$, $t_{k_i}^{(i)} \in T_i$, $1 \leq k_i \leq p$, будет полной системой представителей группы G по подгруппе G_n. Так выбранная система представителей обладает свойством проекционности в том смысле, что класс смежности x группы G по подгруппе G_{n-1} содержит некоторый класс смежности y группы G по подгруппе G_n лишь тогда, когда для некоторого набора $t_i \in T_i$ $\quad (i = 1, 2, \dots, n)$ имеем $x = G_{n-1} t_{n-1} \dots t_1$, $y = G_n t_n t_{n-1} \dots t_1$. Поэтому любой последовательности $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{G}$ взаимоднозначно соответствует бесконечная последовательность $t_1 t_2 t_3 \dots$ представителей классов смежности G по подгруппам G_n такая, что $x_n = G_n t_n \dots t_1$, $n \in N$. Определим теперь при каждом $i \in N$ некоторую нумерацию τ_i множества T_i элементами $0, 1, \dots, p-1$ поля F_p и положим

$$\tau(x) = \tau_1(t_1) \tau_2(t_2) \dots \; , \quad x \in \overline{G} \tag{14}$$

где $t_1 t_2 \dots$ —последовательность представителей, соответствующая элементу x. Отображение $\tau : x \to \tau(x), x \in G$ является изометрией пространства $\overline{G}$ на $\tilde{Z}_p$, поскольку оно биективно и для любых двух элементов $x, y \in \overline{G}$ их начала длины k совпадают тогда и только тогда, когда числа $\tau(x)$ и $\tau(y)$ также имеют общее начало длины k, т.е. τ сохраняет метрику.

Понятно, что изометрия τ, определенная равенством (14), зависит от выбора системы представителей $T = \bigcup\limits_{i \in N} T_i$ и набора нумераций $\langle \tau_i, i \in N \rangle$. В нижеследующих рассуждениях конкретный выбор множеств T_i и нумераций τ_i не играет роли, однако, он предполагается фиксированным. Будем называть изометрию τ нумерацией множества G.

Определим действие группы G на пространстве $\overline{G}$ равенством

$$x^g = (x_1 \cdot g, x_2 \cdot g, \dots), x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{G}, \quad g \in G. \tag{15}$$

Действие (15) определено корректно, т.к. для всех $i \in N$ подмножество $x_i \cdot g$ одновременно с x_i является классом смежности по подгруппе G_i, причем из $x_i \supset x_{i+1}$ следует $x_i g \supset x_{i+1} g$. Тем самым при заданной нумерации τ корректно определено действие группы G на пространстве $\tilde{Z}_p$, задаваемое равенством

$$a^g = \tau\big(\tau^{-1}(a)^g\big), \quad a \in Z_p, \quad g \in G, \tag{16}$$

где τ определено равенством (14).

Лемма 2.2.. Отображение $\gamma_g : a \to a^g$ $(a \in \tilde{Z}_p)$, где a^g определенно равенством (16), является для любого элемента $g \in G$ изометрией пространства $\tilde{Z}_p$ на себя.

Доказательство. Достаточно проверить, что изометрией пространства $\overline{G}$ является при любом $g \in G$ отображение $x \to x^g$, $x \in \overline{G}$. А это непосредственно следует из определения действия группы G на множестве $\overline{G}$ согласно равенству (15).

Теорема 2.1. *Пусть G —группа с p-рядом* (12). *Отображение $\Psi : G \to \operatorname{Is} Z_p$, определяемое равенством $\Psi(g) = \gamma_g$, $g \in G$, является для любой нумерации τ непрерывным и открытым вложением группы G с метрикой, определяемой равенством* (13), *в группу $\operatorname{Is} Z_p$ с естественной метрикой .*

Доказательство. Поскольку, по лемме 2.2, преобразование γ_g является для любого $g \in G$ изометрией пространства $\tilde{Z}_p$, отображене Ψ задано корректно. Для произвольного числа $a \in \tilde{Z}_p$ и любых элементов $g_1, g_2 \in G$ имеем $\gamma_{g_1 g_2}(a) = a^{(g_1 g_2)} = \tau\big(\tau^{-1}(a)^{g_1 g_2}\big)$, а $\gamma_{g_1}\gamma_{g_2}(a) = (a^{g_1})^{g_2} = \tau(\tau^{-1}(\tau((\tau^{-1}(a))^{g_1}))^{g_2} = \tau(((\tau^{-1}(a))^{g_1})^{g_2})$. Пусть $\tau^{-1}(a) = (x_1, x_2, \dots)$. В силу ассоциативности умножения в G для любого $n \in N$ имеем $x_n(g_1 g_2) = (x_n g_1)g_2$. Следовательно, $(\tau^{-1}(a))^{g_1 g_2} = ((\tau^{-1}(a))^{g_1})^{g_2}$. Поэтому $\gamma_{g_1 g_2} = \gamma_{g_1}\gamma_{g_2}$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и отображение Ψ —гомоморфизм.

Произвольный неединичный елемент $g \in G$ не содержится при некотором k в подгруппе G_k и поэтому он нетривиально действует на последовательность $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{G}$ такую, что $x_k = G_k$. Итак, Ψ —мономорфизм.

Далее, равенство $\rho(g_1, g_2) = \left(\frac{1}{p}\right)^k$, $g_1, g_2 \in G$, означает, что g_1, g_2 содержатся в одном классе смежности группы G по подгруппе G_k и в разных классах смежности по подгруппе G_{k+1}. Поэтому для образов x^{g_1} и x^{g_2} произвольной точки $x \in \overline{G}$ в силу нормальности подгрупп p–ряда (12) выполнено соотношение $\rho(x^{g_1}, x^{g_2}) \le \left(\frac{1}{p}\right)^k$, причем равенство достигается. Поскольку естественная метрика в групе $\operatorname{Is} Z_p$ определяется соотношением

$$\rho(u, v) = \max_{t \in Z_p} \rho(t^u, t^v), \quad u, v \in \operatorname{Is} Z_p, \tag{17}$$

то для произвольных $g_1, g_2 \in G$ имеем $\rho(g_1, g_2) = \rho(\gamma_{g_1}, \gamma_{g_2}) = \rho(\Psi(g_1), \Psi(g_2))$, т.е. отображение Ψ сохраняет метрику (17) и, следовательно, является непрерывным и открытым. Теорема доказана.

Итак, любая p-группа, обладающая p-рядом, имеет точное p-изометрическое представление. Построенное в теореме 2.1 представление ψ назовем присоединенным представлением группы G, соответствующим p-ряду (12).

Замечание. Можно проверить, что присоединенное представление подобно ограничению на группу G регулярного представления пополнения группы G в топологии, определяемой рядом (12). Мы выбрали приведенное выше описание в силу его конструктивности. Факт существования таких представлений, учитывая предложение 1.2, следует также из результатов [6].

По произвольной биекции τ множества X на множество Y определим отображение $\tau' : S(X) \to S(Y)$, полагая как и в равенстве (16) для любой подстановки $\pi \in S(X)$:

$$(\tau'\pi)(y) = \tau(\tau^{-1}(y)^{\pi}), \quad y \in Y.$$

Отображение τ' является изоморфизмом, т.е. для любой подгруппы $G < S(X)$ ее образ $\tau'(G)$–подгруппа в $S(Y)$, и можно рассматривать ограничение τ' на G, которое будем обозначать тем же символом.

Лемма 2.3. *Для произвольной силовской p–подгруппы T группы $\mathrm{Is}\,\overline{G}$ существует такая нумерация τ пространства $\overline{G}$, что $\tau'(T)$ – главная силовская p–подгруппа группы $\mathrm{Is}\,Z_p$.*

Доказательство. Пусть T–произвольная силовская p –подгруппа группы $\mathrm{Is}\,\overline{G}$, $\mathcal{P}$–главная силовская p–подгруппа в $\mathrm{Is}\,Z_p$. Выберем сначала произвольную нумерацию $\mu : \overline{G} \to \tilde{Z}_p$ и пусть $S = (\mu')^{-1}\,(\mathcal{P})$. Подгруппы S и T сопряжены в $\mathrm{Is}\,\overline{G}$, т.е. существует изометрия $\sigma \in \mathrm{Is}\,\overline{G}$ такая что $\sigma T \sigma^{-1} = S$. Понятно, что отображение $\mu\sigma$ также является нумерацией пространства $\overline{G}$, причем для произвольной подстановки $\pi \in T$ преобразование $(\mu\sigma)'(\pi)$ действует на произвольный элемент $y \in \tilde{Z}_p$ следующим образом

$$\big((\mu\sigma)'(\pi)\big)(y) = \mu\sigma(\sigma^{-1}\mu^{-1}(y)^{\pi}) = \mu(\mu^{-1}(y)^{\sigma\pi\sigma^{-1}}),$$

т.е. содержится в $\mathcal{P}$ по определению подгруппы S. Следовательно, $(\sigma\mu)'(T) = \mathcal{P}$, т.е. $\tau = \sigma\mu$ и лемма доказана.

Отметим следующие свойства присоединенного p–изометрического представления.

Теорема 2.2. *Пусть $\Psi : G \to \mathrm{Is}\,Z_p$–присоединенное p–изометрическое представление группы G с выделенным p–рядом* (12). *Тогда*
1) при надлежащем выборе нумерации τ образ $\psi(G)$ группы G содержится в главной силовской p–подгруппе группы $\mathrm{Is}\,Z_p$;
2) если $g \in G_k$, $g \notin G_{k+1}$, то в точности первые k координат таблицы $\psi(g)$ нулевые;
3) для любого $g \in G$ редуцированные многочлены, являющиеся координатами $\psi(g)$, либо нулевые, либо не имеют нулей.

Доказательство. 1) Учитывая лемму 2.3, достаточно убедиться, что образ группы G при ее действии на пространстве $\bar{G}$ согласно равенству (15) содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы $\mathrm{Is}\,Z_p$. А это следует из того, что группа G погружается в предельную группу обратного спектра
$\{G/G_k,\ \varphi_k\ \}_{k\in N}$ где $\varphi_k : G/G_k \to G/G_{k-1}$ – естественные эпиморфизмы, которая содержится в предельной группе обратного спектра силовских p-подгрупп симметрических групп степеней p^k, поскольку для любого $k \in N$ G/G_k является p-группой.

2) Пусть $g \in G_k$, $g \notin G_{k+1}$. Тогда равенство $G_i g = G_i$ выполнено в том и только в том случае, когда $i \le k$. Поэтому для произвольного класса смежности $x_i = G_i v$ имеем $x_i g = G_i v g =$

$vG_ig = vG_i = x_i$ при $i \leq k$ и $x_ig \neq x_i$ при $i > k$. Следовательно, первые k координат любой последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$ не изменяются под действием элемента $g \in G$, причем существуют последоватеьности, $k+1$-я координата которых изменяется под действием g. Поэтому в точности k первых координат таблицы $\psi(g)$ являются нулевыми.

3) Пусть $g \in G$ – произвольный элемент, причем $g \in G_k$, $g \in G_{k+1}$. Тогда согласно п.2), первые k координат $\psi(g)$ нулевые, а $(k+1)$-я не равна тождественно нулю. Предположим, что при некотором ℓ, $\ell > k$, ℓ-тая координата таблицы $\psi(g)$ имеет нуль, т.е. существует такое p –адическое число $a_1a_2\dots$, что $[\psi(g)]_\ell\,(a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}) = 0$. Согласно определению представления ψ, это означает, что для класса смежности $x_\ell = \tau^{-1}\ (a_1 \dots a_{\ell-1}t_\ell)$ выполнено равенство $x_\ell\ g = x_\ell$. Пусть $x_\ell = G_\ell \cdot v$. Выписанное равенство означает, что для любого элемента $a \in x_\ell$ найдется такой элемент a', для которого справедливо соотношение $avg = a'v$. Отсюда $g = v^{-1}a^{-1}a'v \in G_\ell$ в силу нормальности. Но тогда первые l координат таблицы $\psi(g)$ нулевые, что противоречит ее выбору. Теорема доказана.

Следствие. *Любую конечнопорожденную группу, аппроксимируемую конечными p-группами, можно изоморфно погрузить в главную силовскую p-подгруппу группы I_sZ_p.*

Действительно, такая группа G не более чем счетная, а поэтому обладает p-рядом подгрупп и, следовательно, для нее существует точное p-изометрическое представление ψ, для которого $\psi(G) \subset \mathcal{P}(Z_p)$. При этом для элементов образа $\psi(G)$ выполнены условия 2), 3) из теоремы 2.2.

3. Вложение 2-порожденных групп в $\mathrm{Is}\,Z_p$

Согласно следствию из теоремы 2.2 аппроксимируемые конечными p-группами 2-порожденные группы изоморфно погружаются в главную силовскую p-подгруппу $\mathcal{P}(Z_p)$ группы I_sZ_p. Рассмотрим такие вложения в случае, когда один из порождающих имеет порядок p.

Пусть $Z_p^{(n)}$-совокупность начальных отрезков длины n чисел из Z_p. Для произвольной таблицы $u \in \mathcal{P}(Z_p)$ ее начало u_n длины n действует на $Z_p^{(n)}$, т.е. можно говорить об орбитах преобразования u при действии на $Z_p^{(n)}$

Лемма 3.1 [10]. *Пусть $a(\bar{x}_n)$ – произвольный редуцированный многочлен от n переменных над F_p, u – некоторая таблица из $\mathcal{P}(Z_p)$. Уравнение*

$$f(\bar{x}_n^u) - f(\bar{x}_n) = a(\bar{x}_n) \tag{18}$$

относительно неизвестного $f(\bar{x}_n)$ имеет решение в кольце редуцированных многочленов от n переменных тогда и только тогда, когда для любой орбиты $\mathcal{O}$ таблицы u при действии на $Z_p^{(n)}$ имеет место равенство

$$\sum_{\bar{t}_n \in \mathcal{O}} a(\bar{t}_n) = 0. \tag{19}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (18) имеет решение $f_0(\bar{x}_n)$, $\mathcal{O}$ – некоторая орбита таблицы u на $Z_p^{(n)}$. Тогда имеем следующие равенства

$$\sum_{\bar{t}_n \in \mathcal{O}} a(\bar{t}_n) = \sum_{t_n \in \mathcal{O}} (f_0(\bar{t}_n^u) - f_0(\bar{t}_n)) = \sum_{\bar{t}_n \in \mathcal{O}} f_0(\bar{t}_n^u) - \sum_{\bar{t}_n \in \mathcal{O}} f_0(t_n). \tag{20}$$

Поскольку $\mathcal{O}$ – орбита таблицы u на $Z_p^{(n)}$, то вектор $\bar{t}_n^u$ вместе с $\bar{t}_n$ пробегает всю орбиту $\mathcal{O}$. Следовательно, $\sum\limits_{t_n \in \mathcal{O}} f_0(\bar{t}_n^u) = \sum\limits_{\bar{t}_n \in \mathcal{O}} f_0(\bar{t}_n)$ и согласно (20) получаем, что условие (19) выполнено.

Достаточность. Пусть условие (19) выполнено. Построим редуцированный многочлен $f_0(\bar{x}_n)$, являющийся решением уравнения (18), задавая его значениями последовательно во всех точках орбит таблицы u на $Z_p^{(n)}$. Для орбиты $\mathcal{O}$, $|\mathcal{O}| = k$, фиксируем некоторую точку $\bar{t}_n \in \mathcal{O}$ и зададим значение f_0 в точке $\bar{t}_n$ произвольным образом. Любая другая-точка из орбиты $\mathcal{O}$ имеет вид $\bar{t}_n^{u^i}$ $(1 \le i \le k-1)$. Положим $f_0(\bar{t}_n^{u^i}) = \sum\limits_{\ell=0}^{i-1} a(\bar{t}_n^{u^i}) + f_0(\bar{t}_n)$, т.е. значение f_0 определяем последовательно, увеличивая степень i. Поскольку $\sum\limits_{\ell=0}^{k-1} a(\bar{t}_n^{u^\ell}) = \sum\limits_{\bar{t}_n \in \mathcal{O}} a(\bar{t}_n) = 0$, последнее равенство корректно определяет функцию f_0 во всех точках орбиты $\mathcal{O}$. Осуществляя аналогичные построения для всех орбит, получим редуцированный многочлен $f_0(\bar{x}_n)$, являющийся решением уравнения (18). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $u = [0, \ldots, 0, a_{n+1}(\bar{x}_n), \ldots], n \ge 0,$ – таблица из $\mathcal{P}(Z_p)$ порядка p причем такая, что редуцированный многочлен*

$a_{n+1}(\bar{x}_n)$ не имеет нулей в $Z_p^{(n)}$. Тогда существует таблица $v \in \mathcal{P}(Z_p)$, для которой выполнено равенство

$$v^{-1} u\, v = [0, \ldots, 0, a_{n+1}(\bar{x}_n), 0, \ldots] \tag{21}$$

Доказательство. Построим таблицу v, указывая последовательно ее координаты. Положим $[v]_k = 0$ ($[v]_k = 0$) при $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Для определения $n+2$-й координаты таблицы v рассмотрим уравнение

$$f(\bar{x}^u_{n+1}) - f(\bar{x}_{n+1}) = a_{n+2}(\bar{x}_{n+1}) \tag{22}$$

относительно $f(\bar{x}_{n+1})$. Поскольку u – таблица порядка p, то из равенства (11) получаем

$$\begin{aligned}[u^p]_{n+2} &= \sum_{i=0}^{p-1} a_{n+2}(\bar{x}^{u^i}_{n+1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} a(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} + i a_{n+1}(\bar{x}_n)) = 0\end{aligned} \tag{23}$$

Пусть $\bar{t}_{n+1} = (t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in Z_p^{(n+1)}$ – произвольная точка. Поскольку $a_{n+1}(\bar{x}_n)$ не имеет нулей, орбита $\mathcal{O}(\bar{t}_{n+1}, u)$ этой точки под действием подстановки u имеет длину p и состоит из p точек вида $(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} + i a_{n+1}(\bar{t}_n))$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Поэтому равенство (23) означает, что для произвольного $\bar{t}_{n+1} \in Z_p^{(n+1)}$ выполнено соотношение

$$\sum_{\bar{t}_{n+1} \in \mathcal{O}(\bar{t}_{n+1,u})} a_{n+2}(\bar{t}_{n+1}) = 0,$$

то есть равенство (19) из леммы 3.1. Согласно утверждению этой леммы, отсюда получаем, что уравнение (22) разрешимо. Выберем в качестве $[v]_{n+2}$ какое-либо из решений этого уравнения. Предположим теперь, что $n+2, n+3, \ldots, n+r$-ая координаты таблицы v уже построены и равны соответственно $f_{n+2}(\bar{x}_{n+1}), \ldots, f_{n+r}(\bar{x}_{n+r-1})$. Найдем ее $(n+r+1)$-ую координату. Рассмотрим сначала вспомогательную таблицу $v' = [0, \ldots, 0, f_{n+2}(\bar{x}_{n+1}), \ldots, f_{n+r}(\bar{x}_{n+r-1}), 0, \ldots]$. Согласно выбору v' имеем $u_1 = (v')^{-1}\, uv' = [0, \ldots, 0,\ a_{n+1}(\bar{x}_n), 0, \ldots, 0,\ b_{n+r+1}(\bar{x}_{n+r}), \ldots]$, где $b_j(\bar{x}_{j-1})$, $j \geq n+r-1$,– некоторые редуцированные многочлены. Таблица u_1 также имеет порядок p, т.е. выполнено равенство

$$\sum_{i=0}^{p-1} b_{n+r+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} + i a_{n+1}(\bar{x}_n), x_{n+2}, \ldots, x_{n+r}) = 0 \tag{24}$$

Все орбиты таблицы u_1 на множестве $Z_p^{(n+r)}$ снова имеют длину p и состоят из точек вида $(t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}+ia_{n+1}(\bar t_n),t_{n+2}\ldots t_{n+r})$. Поэтому, аналогично предыдущему, равенство (24) означает, что для произвольной точки $\bar t_{n+r}\in Z_p^{(n+r)}$ имеем

$$\sum_{\bar t_{n+r}\in\mathcal{O}(\bar t_{n+r},u_1)} b_{n+r+1}(\bar t_{n+r})=0$$

т.е. для многочлена $b_{n+r+1}(\bar x_{n+r})$ снова выполнено условие (19) леммы 3.1. Отсюда получаем, что уравнение $f(\bar x_{n+r}^{u_1})-f(\bar x_{n+r}) = b_{n+r+1}(\bar x_{n+r})$ имеет решение, которое обозначим $f_{n+r+1}\ (\bar x_{n+r})$ и возьмем в качестве $(n+r+1)$-й координаты таблицы v. Продолжая этот процесс, определим все координаты таблицы v. По построению она удовлетворяет равенству (21) и лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть группа G аппроксимируется конечными p-группами и порождается двумя элементами a,b, причем $a^p=1$. Тогда найдется нормальный делитель $N\triangleleft G$ индекса p, такой что $a\notin N$, $b\in N$.*

Доказательство. Из условия леммы следует существование в группе G такого нормального делителя N, что фактор-группа $H=G/N$ является p-группой и образы $\bar a,\bar b$ элементов a,b в этой фактор-группе различны. Поскольку H – конечная p-группа, в ней существует максимальная подгруппа L, содержащая элемент $\bar b$. Эта подгруппа имеет индекс p и не содержит элемент $\bar a$. Ее полный прообраз в группе G при естественном гомоморфизме G на H и будет искомым нормальным делителем, что и требовалось.

Теорема 3.1. *Пусть группа G аппроксимируется конечными p-группами и порождена двумя элементами, один из которых имеет порядок p. Тогда существует такое точное p-изометрическое представление группы G, при котором образами ее порождающих элементов будут таблицы из $\mathcal{P}(Z_p)$ вида*

$$[1,0,0,\ldots],\quad [0,b_1(\bar x_1),b_2(\bar x_2),\ldots] \tag{25}$$

где $b_1(x_1)$ не имеет нулей в F_p.

Доказательство. Пусть G аппроксимируется конечными p-группами и порождена элементами g,h, причем $g^p=1$. По лемме 3.3 в группе G существует нормальный делитель G_1 индекса p такой, что $g_1\notin G_1$, $h\in G_1$. Так как G_1 также аппроксимируется конечными p-группами, в ней можно выбрать нормальный делитель G_2 индекса p, не содержащий h. Дополнив после этого ряд $G_0>G_1>G_2$ до некоторого p-ряда, получаем, что в группе G

существует p-ряд подгрупп $G = G_0 > G_1 > G_2 > \ldots$ такой, что $g \in G_0 \setminus G_1$, $h \in G_1 \setminus G_2$. Рассмотрим теперь присоединенное представление группы G, отвечающее этому p-ряду. Согласно теореме 2.2 элементу g при таком представлении отвечает таблица вида $u = [a, a_1, (x_1), \ldots]$, где $a \neq 0$, а элементу h – таблица вида $V = [0, b_1(x_1), \ldots]$, где $b_1(x_1)$ не имеет нулей. Пусть $\widehat{G}$ – образ группы G при присоединенном представлении, т.е. $\widehat{G} = \langle u, v\rangle$. Поскольку $u^p = 1$, то по лемме 3.2 существует таблица $w \in \mathcal{P}(Z_p)$ глубины 1 такая, что $w^{-1}uw = [a, 0, \ldots]$. Подгруппа $\widehat{G}^w$ порождается таблицами u^w, v^w. Поскольку гл. $w = 1$, то выполнено равенство $[w^{-1}vw]_2 = [v]_2$. Положим $v^w = [0, b_1'(\widehat{x}_1),\ b_2'(\widehat{x}_2), \ldots]$. Тогда $b_1(\widehat{x}_1) = b_1'(\widehat{x}_1)$ не имеет нулей в F_p. Поскольку образующий u^w группы $\widehat{G}^w$ можно заменить на таблицу $[1, 0\ldots]$, то отображение, являющееся композицией присоединенного представления группы G и сопряжения образа G с помощью выбранного элемента w и будет требуемым представлением группы G. Теорема доказана.

Теорема 3.1 нам понадобится в случае, когда оба образующие группы G имеют порядок p $(p > 2)$ или же порядки 2 и 4. В этом случае относительно строения таблицы $[0, b_1(x_1), \ldots]$ можно сделать ряд дополнительных замечаний.

4. О конечнопорожденных подгруппах и факторах 2-порожденных финитно аппроксимируемых p -групп

При рассмотрении конечнопорожденных подгрупп и факторов 2-порожденных финитно аппроксимируемых p-групп мы строим различные вложения, использующие общую конструкцию погружения в 2-порожденные группы из работы [12], которая основывается на применении стандартных сплетений. Эта конструкция применялась для построения вложений счетных групп в 2-порожденные в классах неразрешимых групп, SI-групп, ZA-групп [13], финитно аппроксимируемых групп [14]. Нам нужна конструктсия вложения в 2-порожденные группы внутри класса финитно аппроксимируемых p-групп. Будем записывать элементы стандартного сплетения $Hwr\ G$ групп G и H в виде пар $[g, h(x)]$, $g \in G$, $h(x) \in H^G$; если $h(x) \equiv h \in H$, то пара записывается как $[g, h]$. При этом, как обычно, $h^g(x) = h(xg^{-1})$ и $[g, h(x)][g_1, h_1(x)] = [gg_1, h(x)h^g(x)]$.

Пусть G-произвольная группа, C_k-циклическая группа порядка k с порождающим a, $U = GwrC_k (= GWrC_k)$.

Лемма 4.1. *Пусть $g \in G$ – элемент порядка m, причем m/k. Определим функцию $f(x) \in G^{C_k}$, полагая $f(a^\ell) = g^{-\ell}$ $(0 \le \ell \le k-1)$. Тогда коммутатор (u, v) элементов $u = [1, f(x)]$, $v = [a, 1]$ сплетения U – это пара $[1, g]$.*

Доказательство. Ясно, что коммутатор (u, v) содержится в базе сплетения U, т.е. имеет вид $[1, u(x)]$ для некоторой функции $u(x) \in G^{C_k}$. Поскольку $u(x) = (f^{a^{-1}}(x))^{-1} f(x)$, то для любого ℓ, $0 \le \ell \le k-1$ имеем $u(a^\ell) = f^{a^{-1}}(a^\ell)^{-1} f(a^\ell) = g^{\ell+1} g^{-\ell} = g$, т.е. $u(x) = g$.

Диагональ базы сплетения U-подгруппа $\widehat{G} = \{[1, g]/g \in G\}$, изоморфная G, – порождается элементами вида $[1, g_i]$ $(1 \le i \le r)$, где $g_1, g_2, \ldots, g_r$ – система порождающих группы G. Пусть G – p-группа, p^α – наибольший из порядков порождающих G, $U = GwrC_{p^\alpha}$. Для каждого i, $1 \le i \le r$, определим функцию $f_i(x) \in G^{C_{p^\alpha}}$, полагая $f_i(a^\ell) = g_i^{-\ell}$ $(\ell = 0, 1, \ldots, p^\alpha - 1)$.

Лемма 4.2. *Отображение $\varphi : g_i \to ([a, 1], [1, f_i])$ продолжается до вложения $\widehat{\varphi}$ группы G в сплетение U, причем $\widehat{\varphi}(G) = \widehat{G}$.*

Доказательство. Согласно лемме 4.1. выполнено равенство $([a, 1], [1, f_i]) = [1, g_i]$ т.е. образами элементов g_i являются порождающие подгруппы $\widehat{G}$ группы U. Следовательно, φ продолжается до изоморфизма $\widehat{\varphi}$ группы G и $\widehat{\varphi}(G) = \widehat{G}$.

Подмножество M циклической группы C_{p^α} назовем антигрупповым, если для любых $x, y \in M$ имеем $xy^{-1} \notin M$. В частности, антигрупповое множество не содержит 1.

Лемма 4.3. *Для произвольного простого числа p при любом r найдется такое число γ, что в циклической группе Cp^γ можно выбрать антигрупповое подмножество мощности r.*

Доказательство. Если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_s$ образуют антигрупповое подмножество в группе C_{p^α} при некотором α, то при $\beta > \alpha$ те же степени порождающего циклической группы C_{p^β} будут образовывать антигрупповое подмножество в этой группе. Число элементов группы C_{p^β}, представимых в виде xy^{-1} или $x^{-1}y$, где xy содержатся в указанном антигрупповом множестве, не превышает $2s^2$. Выбрав β удовлетворяющим условию $2s^2 < p^\beta - 1$, получаем, что в группе C_{p^β} к указанному антигрупповому подмножеству можно прибавить еще по крайней мере 1 элемент. Теперь доказательство завершается индукцией по числу r.

Пусть $V = UwrC_{p^\beta}$ и $M = \{b^{k_1}, \ldots, b^{k_2}\}$ – антигрупповое подмножество из C_{p^β} мощности r. Определим функцию $h(x) \in U^{C_{p^\beta}}$, полагая

$$(26) \qquad h(x) = \begin{cases} [a,1] & \text{при } x = 1 \\ [1, f_i(x)] & \text{при } x = b^{k_i} \ (i = 1, 2, \ldots, r) \\ [1,1] & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где функции $f_i(x) \in G^{C_{p^\alpha}}$ определены выше. Положим также $\mu_i(x) = (h^{b^{k_i}}(x), h(x))$.

Лемма 4.4. *Для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$ значения функции $\mu_i(x)$ определяются следующим образом:*

$$\mu_i(1) = [1, g_i^{-1}], \quad \mu_i(x) = [1,1] \quad \text{при } x \neq 1.$$

Доказательство. По определению функций μ_i имеем следующую цепочку равенств:

$$\mu_i(1) = h(b^{-k_i})^{-1} h(1)^{-1} h(b^{-k_i}) h(1) = ([1, f_i(x)], [a, 1]).$$

Отсюда, согласно лемме 4.1 получаем $\mu_i(1) = [1, g_i^{-1}]$. При $x \neq 1$ рассмотрим два случая: $x \in M$ и $x \notin M$. Если $x \in M$, то $xb^{-k_i} \notin M$ и $h(xb^{-k_i}) = 1$. Следовательно, $\mu(x) = h(xb^{-k_i})^{-1}\ h(x)^{-1}\ h(xb^{-k_i})$ $h(x) = h(x)^{-1}\ h(x) = 1$. Если же $x \notin M$, то $h(x) = 1$ и $\mu(x) = h(xb^{-k_i})^{-1}\ h(xb^{-k_i}) = 1$. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Любую конечнопорожденную финитно аппроксимируемую p-группу G можно изоморфно погрузить в финитно аппроксимируемую p-группу $\bar{G}$ с двумя порождающими. Если группа G имеет конечную экспоненту, то $\bar{G}$ тоже может быть выбрана конечной экспоненты.*

Доказательство. Пусть G – произвольная финитно аппроксимируемая p-группа с r порождающими $g_1, g_2, \ldots, g_r$ и p^α – наивысший из порядков $g_1, g_2, \ldots, g_r$. Пользуясь леммой 4.2, построим вложение $\widehat{\varphi}$ группы G в сплетение $U = GwrC_{p^\alpha}$. Затем выберем число β так, чтобы в циклической группе C_{p^β} существовало антигрупповое множество мощности r и рассмотрим подгруппу $\widetilde{G}$ сплетения $V = UwrC_{p^\beta}$, состоящую из всевозможных элементов $[1, f_g(x)]$, $g \in G$, где $f_g(x) \in U^{C_{p^\beta}}$ причем $f_g(1) = [1, g], f_g(x) = [1,1]$ при $x \neq 1$. Соответствие $g \leftrightarrow [1, f_g(x)]$ является изоморфизмом группы G и подгруппы $\widetilde{G}$. Проверим, что $\widetilde{G}$ содержится в подгруппе $\bar{G}$ группы V, которая порождается элементами $[1, h(x)]$, $[b, 1]$, где $h(x)$ определена равенством (26). Согласно лемме 4.4 для этого достаточно проверить, что в подгруппе содержатся элементы $[1, \mu_i(x)] =$

$[1, f_{g_i^{-1}}(x)]$. А это действительно так в силу равенства

$$[1, \mu_i(x)] = \left([1, h(x)]^{[b^{k_i},1]}, [1, h(x)]\right),$$

которое проверяется непосредственно. Далее, поскольку группа G аппроксимируется конечными p-группами, то по теореме Грюнберга [15, стр.106] сплетения $U = GwrC_{p^\alpha}$ и $V = UwrC_{p^\beta}$ также аппроксимируются конечными p – группами. Как сплетения периодической группы с конечной, они будут периодическими, а если группа G имеет конечную экспоненту, то экспоненты групп U, V тоже конечны. Поскольку эти свойства наследуются подгруппами, группа $\bar{G}$ является финитно аппроксимируемой p-группой, экспонента которой ограничена, если таковой будет экспонента группы G. Теорема доказана.

Лемма 4.5. *Для любой 2-порожденной финитно аппроксимируемой p-группы G существует 3-порожденная финитно аппроксимируемая p-группа G, содержащая подпрямую степень $G\dot{\times}G$ группы G и порождаемая элементами порядка p. Если G-группа ограниченной экспоненты, то экспонента $\bar{G}$ тоже ограничена.*

Доказательство. Пусть G – 2-порожденная финитно аппроксимируемая p-группа, g_1, g_2 – ее порождающие. Выберем в сплетении $U = GwrC_p$ группы G с циклической группой C_p порядка p элементы $u_1 = [c, f_1(x)]$, $u_2 = [c, f_2(x)]$, $u_3 = [c, 1]$, где c – порождающий C_p, а функции f_i определены равенством

$$f_i(x) = \begin{cases} g_i & \text{при } x = 1 \\ g_i^{-1} & \text{при } x = c \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$(i = 1, 2)$. Непосредственно проверяется, что $u_i^p = [c^p, \prod_{i=0}^{p-1} f^{c^i}(x)]$.

Пусть $\nu_i(x) = \prod_{i=0}^{p-1} f^{c^i}(x)$. Поскольку среди элементов x $xc^{-1}, \ldots, xc^{-p+1} \in C_p$ лишь по одному разу встречаются 1 и c, то в произведении $\nu_i(x)$ при любом $x \in C_p$ имеется всего 2 неединичных множителя, которые по определению функции $f_i(x)$ равны g_i и g_i^{-1}. Поэтому $\nu_1(x) = \nu_2(x) \equiv 1$. А поскольку $c^p = 1$, то и $u_1^p = u_2^p = u_3^p = 1$. Элементы u_1, u_2, u_3 порождают ту же подгруппу $\bar{G}$ группы G, что и $v_1 = [1, f_1(x)]$, $v_2 = [1, f_2(x)]$, $v_3 = u_3$. Группа $\bar{G}$ содержит подгруппу, порожденную элементами v_1, v_2, которая изоморфна подгруппе прямого произведения $G \times G$, порождаемой элементами

$(g_1, g_1^{-1}), (g_2, g_2^{-1})$ и являющейся подпрямой степенью $G\dot{\times}G$ группы G. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *При $p > 5$ любую финитно аппроксимируемую p-группу G с тремя порождающими порядка p можно изоморфно погрузить в подходящую финитно аппроксимируемую p-группу $\bar{G}$ с двумя порождающими порядка p. Если погружаемая группа G имеет ограниченную экспоненту, то экспонента группы $\bar{G}$ тоже конечна.*

Доказательство. При $p > 5$ в циклической группе C_p можно выбрать антигрупповое множество, состоящее из трех элементов. Поэтому группу G можно погрузить в 2-порожденную подгруппу $\bar{G} = \langle [1, h(x)], [\ell, 1] \rangle$ сплетения $(GwrC_p)wrC_p$ где c – порождающий C_p, $h(x)$ определена равенством (26) в точности так, как это сделано при доказательстве теоремы 4.1. Поскольку образующие группы G имеют порядок p, таблица $[1, h(x)]$ также имеет порядок p, причем $\bar{G}$ – финитно аппроксимируемая p-группа. Ее экспонента ограничена вместе с экспонентой группы G. Лемма доказана.

Лемма 4.7. *При $p \geq 3$ для любой финитно аппроксимируемой p-группы G, порожденной тремя элементами порядка p, существует финитно аппроксимируемая p-группа $\bar{G}$, содержащая p-тую подпрямую степень группы G и порожденная двумя элементами порядка p. $\bar{G}$ имеет конечную экспоненту, если экспонента G конечная.*

Доказательство. Пусть $\bar{G}$-подгруппа сплетения $GwrC_p$, порожденная элементами $[1, f(x)]$, $[c, 1]$, где функция f определена равенствами $f(1) = g_1$, $f(c) = g_2$, $f(c^2) = g_3, f(x) = 1$ при $x \notin \{1, c, c^2\}$, а g_1, g_2, g_3 – порождающие G порядка p. Группа $\bar{G}$ содержит подгруппу, порожденную элементами вида $[1, f^{c^i}(x)]$, $0 \leq i \leq p-1$, которая изоморфна p-той подпрямой степени группы G. Лемма доказана.

Лемма 4.8. *Для произвольной финитно аппроксимируемой 2-группы G, порожденной тремя элементами порядка 2, существует финитно аппроксимируемая 2-группа $\bar{G}$ с двумя порождающими порядков 2 и 4, которая содержит подпрямую степень группы G. Если экспонента G конечна, то таковой будет и экспонента $\bar{G}$.*

Доказательство. Выбрав в сплетении $GwrC_4$ подгруппу $\bar{G}$, порожденную элементами $[a, 1]$ (a – порождающий C_4) и $[1, f(x)]$, где $f(1) = 1$, $f(a) = g_1$, $f(a^2) = g_2$, $f(a^3) = g_3$ (g_1, g_2, g_3 – порождающие G), рассмотрим в ней подгруппу $\langle [1, f^{a^i}(x)] \mid i = 0, 1, 2, 3 \rangle$. Поскольку она изоморфна подпрямой степени группы G, построенная группа $\bar{G}$ является искомой и лемма доказана.

Напомним, что фактором группы G называется любая факторгруппа вида H/A, где $G \geq H \triangleright \mathcal{A}$. Если группа G_1 с фактором G изоморфно погружается в G_2, то G_2 тоже имеет фактор, изоморфный G. Учитывая это, а также то, что в подпрямой степени группы G имеется факторгруппа, изоморфная G, на основании теоремы 4.1 и лемм 4.5–4.8 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Любая конечнопорожденная финитно аппроксимируемая p-группа G изоморфна одному из факторов подходящей финитно аппроксимируемой p-группы $\bar{G}$, порожденной двумя элементами порядка p (при $p \geq 2$) или порядков 2 и 4 (при $p = 2$). Если экспонента группы G конечна, то группу $\bar{G}$ тоже можно выбрать конечной экспоненты.*

Доказательство. Пусть G – произвольная группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда по теореме 4.1 ее можно изоморфно погрузить в 2-порожденную группу G_1, удовлетворяющую тем же требованиям, а по лемме 4.5 для группы G_1 существует финитно аппроксимируемая p-группа G_2, порожденная тремя элементами порядка p, которая содержит подпрямую степень $G_1 \dot{\times} G_1$ и поэтому имеет фактор, изоморфный G_1. А следовательно, в группе G_2 есть фактор, изоморфный группе G. При $p \geq 7$ по лемме 4.6 группа G_2 погружается в 2-порожденную группу с требуемыми свойствами, один из факторов которой изоморфен G. А при $p < 7$ для группы G_2 существует группа $\bar{G}$ с требуемыми свойствами, которая содержит конечную подпрямую степень группы G_2. Поэтому один из ее факторов изоморфен G_2 и, следовательно, она имеет фактор, изоморфный G. Теорема доказана.

5. Редукция проблемы $B'(r, p^{\alpha})$

Нам удобнее рассматривать проблему $B'(r, m)$ в другой, эквивалентной формулировке.

Лемма 5.1. *Проблема $B'(r, m)$ эквивалентна следующему вопросу $\mathcal{A}(r, m)$:*

Будут ли конечными для заданных $r, m \in N$ все финитно аппроксимируемые группы экспоненты m с r порождающими?

Доказательство. Предположим, что для данных натуральных чисел r, m задача $B'(r, m)$ имеет отрицательное решение, т.е. существует бесконечная последовательность $G_1, G_2, \ldots$ конечных групп экспоненты m с r порождающими такая, что $|G_1| < |G_2| <$

.... Пусть $g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_r^{(i)}$—порождающие элементы группы G_i ($i = 1, 2, \dots$). В декартовом произведении $\prod\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ выберем подгруппу G, порожденную r элементами $(g_\ell^{(1)}, g_\ell^{(2)}, \dots)$ $1 \le \ell \le r$. Ясно, что проекция группы G по каждой координате совпадает с G_i, т.е. G—бесконечная группа. Как поддекартово произведение конечных групп экспоненты m она финитно аппроксимируемая и имеет экспоненту m. Следовательно, группа G является отрицательным примером для задачи $\mathcal{A}(r, m)$ при данных r, m.

С другой стороны, пусть $\mathcal{A}(r, m)$ для каких-то r, m решается отрицательно, то есть существует бесконечная финитно аппроксимируемая группа G экспоненты m с r порождающими. Пусть $g_1, g_2, \dots$—пересчет всех элементов группы G. В силу финитной аппроксимируемости для произвольного $\ell \in N$ существует нормальный делитель H_ℓ группы G конечного индекса, не содержащий элементов $g_1, g_2, \dots, g_\ell$. Следовательно, в группе G можно выбрать строго убывающую цепь нормальных делителей $G = H_0 > H_1 > H_2 > \dots$ такую, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \{1\}$, $[G : H_i] < \infty$. Отсюда, для порядков факторгрупп группы G по этим нормальным делителям выполнены строгие неравенства $|G/H_1| < |G/H_2| < \dots$, т.е. полученная последовательность конечных групп дает отрицательное решение проблемы $B'(r, m)$ при рассматриваемых r, m. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Если для каких-то $\alpha, r \in N$ проблема $\mathcal{A}(r, p^\alpha)$ решается отрицательно, то при некотором $\beta \ge \alpha$ существует бесконечная финитно аппроксимируемая группа экспоненты p^β, порождаемая двумя элементами порядка p (при $p > 2$) или порядков 2 и 4 (при $p = 2$).*

Доказательство. Согласно теореме 4.2 для группы G, являющейся отрицательным решением проблемы $\mathcal{A}(r, p^\alpha)$, существует группа $\overline{G}$ конечной экспоненты p^β с требуемыми свойствами, имеющая фактор, изоморфный G. Следовательно она бесконечная, что и требовалось.

Изометрию $u \in \mathcal{P}(Z_p)$ $(p \ne 2)$ назовем специальной, если для нее выполнены следующие условия:

1) первая ненулевая координата $[u]_\ell$ $(\ell \ge 2)$ таблицы u является постоянной;

2) при всех $k > \ell$ k–тая координата таблицы u имеет вид $[u]_k = b_k(\overline{x}_{k-1}^{u_{k-1}}) - b_k(\overline{x}_{k-1})$ для некоторого редуцированного многочлена $b_k(\overline{x}_{k-1})$;

3) при $k > \ell$ многочлен $[u]_k$ принимает значение 0 на всех элементах из $Z_p^{(k-1)}$, начинающихся с 0.

Теорема 5.1. *Проблема $B'(r,p^\alpha)$ $(p \neq 2)$ решается положительно для всех $r, \alpha \in N$ тогда и только тогда, когда любая бесконечная подгруппа группы $\mathcal{P}(Z_p)$, порожденная двумя таблицами вида*

$$u = [1, 0, \dots], \quad v = [0, a_2(\overline{x}_1), \quad a_3(\overline{x}_2), \dots], \tag{27}$$

где v —специальная таблица, имеет неограниченную экспоненту.

Доказательство. Если проблема $B'(r,p^\alpha)$ решается положительно для всех $r, \alpha \in N$, то положительно рещается и проблема $\mathcal{A}(r,p^\alpha)$ и, следовательно, любая бесконечная подгруппа группы $\mathcal{P}(Z_p)$ с конечным числом порождающих имеет неограниченную экспоненту. Поэтому достоточно проверить вторую часть утверждения теоремы. Пусть любая бесконечная подгруппа группы $\mathcal{P}(Z_p)$, порожденная таблицами (27), где v —специальная таблица, имеет неограниченную экспоненту и предположим от противного, что для каких-то r и α проблема $B'(r,\alpha)$ решается отрицательно. Тогда и $\mathcal{A}(r,p^\alpha)$ решается отрицательно и по лемме 5.2 существует финитно аппроксимируемая группа G экспоненты p^β $(\alpha \leq \beta)$, порожденная двумя элементами порядка p и являющаяся бесконечной. В группе G, т.к. она аппроксимируется конечными p–группами, можно построить p–ряд нормальных подгрупп и, следовательно, для нее существует точное p–изометрическое представление. По теореме 2.2 образ $\Psi(G)$ группы G при таком представлении содержится в силовской p–подгруппе $P(Z_p)$, а по теореме 3.1 существует сопряженная с $\Psi(G)$ подгруппа H в $\mathcal{P}(Z_p)$, порожденная элементами вида $u = [1, 0, \dots]$, $v = [0, a_2(\overline{x}_1), a_3(\overline{x}_2), \dots]$, где $a_2(x_1)$ не имеет нулей. Так как H сопряжена с $\Psi(G)$, то по определению присоединенного представления группа H_2, порожденная элементами u_2, v_2 имеет порядок p^2. Если бы $a_2(x_1) \neq const$, то по лемме 1.1 б) имело бы место соотношение $(u_2, v_2) \neq [0,0]$, что невозможно, поскольку H_2 абелева. Следовательно $a_2(x_1) \neq const$ и для таблицы v выполнено первое условие специальности. Так как v —элемент порядка p и $a_2(x_1) \equiv a$ не имеет нулей в $Z_p^{(1)}$, то по лемме 3.2 найдется таблица $w \in \mathcal{P}(Z_p)$ такая, что

$$w^{-1} v w = [0, a, 0, \dots] \tag{28}$$

Пусть $w = [0, 0, b_3(\overline{x}_2), \dots]$. Равенство (28) в координатной форме перепишется в виде

$$-b_k\left(\overline{x}_{k-1}^{w_{k-1}^{-1}}\right) + a_k\left(\overline{x}_{k-1}^{w_{k-1}^{-1}}\right) + b_k\left(\overline{x}_{k-1}^{v_{k-1} w_{k-1}^{-1}}\right) = 0$$

$(k = 3, 4, \dots)$. Отсюда

$$a_k\left(\overline{x}_{k-1}^{w_{k-1}^{-1}}\right) = b_k\left(\overline{x}_{k-1}^{w_{k-1}^{-1}}\right) - b_k\left(\overline{x}_{k-1}^{v_{k-1}w_{k-1}^{-1}}\right) \tag{29}$$

$k = 3, 4, \dots)$. Действуя на обе части равенства (29) таблицей w_{k-1}, получим

$$a_k(\overline{x}_{k-1}) = b_k(\overline{x}_{k-1}) - b_k\left(x_{k-1}^{v_{k-1}}\right) \quad (k = 3, 4, \dots). \tag{30}$$

Соотношение (30), означает, что таблица v удовлетворяет второму условию специальности. Наконец, пусть для всех $k \geq 3$ многочлен $a_k(\overline{x}_{k-1})$ представим в виде

$$a_k(\overline{x}_{k-1}) = x_1 a_k^{(1)}(\overline{x}_{k-1}) + a_k^{(2)}(x_2, \dots, x_{k-1})$$

Поскольку $v^p = 1$, т.е. для всех k выполнимы равенства

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_k\left(\overline{x}_{k-1}^{v_{k-1}^i}\right) = 0,$$

то для всех $k = 3, 4, \dots$ имеем

$$x_1 \sum_{i=0}^{p-1} a_k^{(1)}\left(\overline{x}_{k-1}^{v_{k-1}^i}\right) + \sum_{i=0}^{p-1} a_k^{(2)}\left((x_2, \dots, x_{k-1})^{v_{k-1}^i}\right) = 0 \tag{31}$$

Равенство (31) может иметь место лишь тогда, когда равно нулю каждое из слагаемых. Итак, для таблицы v выполнимы соотношения

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_k^{(2)}\left((x_2, \dots, x_{k-1})^{v_k^i}\right) = 0 \tag{32}$$

Из (32) по лемме 3.2 получаем, что при любом $k = 3, 4, \dots$ можно подобрать редуцированный многочлен $C_k(\overline{x}_{k-1})$ такой, что

$$C_k(\overline{x}_{k-1}^{v_{k-1}}) - C_k(\overline{x}_{k-1}) = -a_k^{(2)}(x_2, \dots, x_{k-1}). \tag{33}$$

Этот многочлен определяется своими значениями на каждой из орбит таблицы v_{k-1}, причем одно из значений может быть задано произвольным образом, а другие по нему однозначно определяются. Поэтому многочлен $C_k(\overline{x}_{k-1})$, удовлетворяющий равенству (33), можно взять не зависящим от переменной x_1. Пусть w_1 —таблица с координатами $C_k(\overline{x}_{k-1})$, определяемыми при $k \geq 3$ равенством (33), а $[w_1]_1 = [w_1]_2 = 0$. Непосредственно проверяется, что при $k \geq 3$ координаты таблицы $w_1^{-1} v w_1 = v_1$ имеют вид

$[v_1]_k = x_1 d_k(\overline{x}_{k-1})$, где $d_k(\overline{x}_{k-1})$ —некоторый редуцированный многочлен ($k = 3, 4, \dots$). Следовательно таблица v_1 удовлетворяет третьему условию специальности. А так как условия а), б) специальности таблиц инвариантны при сопряжениях, v_1 является специальной таблицей. Поскольку $w_1^{-1}uw = u$, подгруппа $\Psi(G)^{w_1}$ группы $\mathcal{P}(Z_p)$, порождается двумя таблицами вида (27), одна из которых специальна, имеет вместе с группой G ограниченную экспоненту и является бесконечной. Полученное противоречие показывает, что предположение о существовании r, α, для которых $B'(r, p^\alpha)$ решается отрицательно, было неправильным. Теорема доказана.

Скажем, что изометрия $u \in \mathcal{P}(Z_2)$ квазиспециальная, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) первая ненулевая координата $[u]_\ell$ таблицы u —единичная;
2) при всех $k > \ell$ многочлен $[u]_k + [u]_k^{u_{k-1}}$ инвариантен относительно преобразования u_{k-1}^2;
3) многочлены $[u]_k$, $k > \ell$ принимают значение 0 на всех элементах из $Z_2^{(k-1)}$, начинающихся с 0.

Теорема 5.2. *Проблема $B'(r, 2^\alpha)$ решается положительно тогда и только тогда, когда любая бесконечная подгруппа группы $\mathcal{P}(Z_2)$, порожденная таблицами u, v вида (27), где v —квазиспециальная таблица, имеет неограниченную экспоненту.*

Доказательство. Как и при $p \neq 2$, в проверке нуждается лишь необходимость условий теоремы. Эта проверка снова осуществляется методом от противного и сводится к перевыбору системы порождающих группы $\Psi(G)$ (где G —контрпример к $B'(r, 2^\alpha)$) так, чтобы получить порождающие вида (27), одна из которых квазиспециальная таблица.

Следует отметить, что условие 3) в определении специальной или квазиспециальной таблицы не столь существенно, как первые два. Кроме того, можно рассматривать и другие достаточно естественные условия, налагаемые на таблицы, которые заменяют условия специальности или квазиспециальности. Их выбор позволяет выделять представители из классов сопряженных между собой 2–порожденных подгрупп группы $\mathcal{P}(Z_p)$, порождаемых изометриями порядка p (при $p > 2$) или порядков 2 и 4 (при $p = 2$).

Литература

[1] М.И. Каргаполов Ю.И Мерзляков , Основы теории групп, *Наука*, Москва, 1982, pp. 288.

[2] P. Hall and G. Higman, The p–length of a p–soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, *Proc. London Math. Soc.* **7** (1956), 1–42.

[3] А.И. Кострикин , О проблеме Бернсайда, *Изв. АН СССР, сер матем*, **23** № 1 (1959), 3–34.
[4] А.И. Кострикин , Вокруг Бернсайда, *Наука*, Москва, 1986, pp. 232.
[5] Н. Коблиц , p–адические числа, p–адический анализ и дзета–функции, *Мир*, Москва, 1982, pp. 192.
[6] Л.А. Калужнин , Об одном обобщении силовских p–подгрупп симметрических групп, *Acta Math. Hung.* **2** (3–4) (1951), 197–221.
[7] В.И. Сущанский , Группы изометрий p–пространств Бэра, *ДАН УССР, сер.* "А", **8** (1984), 28–30.
[8] Ж.П. Серр , Когомологии Галуа, *Мир*, Москва, 1968, pp. 208.
[9] В.И. Сущанский , Сплетения по последовательностям групп подстановок и финитно аппроксимируемые группы, *ДАН УССР сер.* "А", **2** (1984), 19–22.
[10] L. Kaloujnine, La structure des p–groupes de Sylow des groupes symetriques finis, *Ann. de l'Ecole Norm. Super.* **68** (1948), 239–276.
[11] В.И. Сущанский , Представление финитно аппроксимируемых p–групп изометриями пространства целых p–адических чисел, *ДАН УССР, сер.* "А", **5** (1986), 23–26.
[12] B. Neumann and H. Neumann, Embedding theorems for groups, *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 465–479.
[13] L. Kovach and B. Neumann, An Embeding theorems for some countable groups, *Acta Sci Math* **24** (1965), 139–142.
[14] А.К. Румянцев , Вложение счетных финитно аппроксимируемых групп. Тезисы 7 Всесоюзного симпозиума по теории групп, *Красноярск*, 1980, pp. 100.
[15] Н. Нейманн , Многообразия групп, *Мир*, Москва, 1969, pp. 264.

В.И. СУЩАНСКИЙ
252 207 КИЕВ–207
ПР. АКАД. ГЛУШКОВА, Д. 32, КВ. 72.

(Поступило 9. III. 1988 г.)