LEOPOLD FEJÉR
In memoriam[1]

9. 2. 1880 — 15. 10. 1959

1. LEOPOLD FEJÉR, einer der größten und epochemachenden Mathematiker der ersten Hälfte des XX-sten Jahrhunderts wurde am 9-ten Februar des Jahres 1880 geboren, wäre also heute achtzig Jahre alt. Er ist aber am 15-ten Oktober des Jahres 1959, am fünfzehnten Jahrestag des nationalsozialistischen Putsches in Ungarn, an dessen Folgen er so tragisch gelitten hat, nach langem Leiden gestorben. Ich glaube, nicht nur wir, seine unmittelbaren Schüler, die in ganz Ungarn und in aller Welt verstreut wirken, fühlen es so, daß *mit ihm ein Zeitalter ins Grab stieg*. Jene Disziplin der mathematischen Analysis, die er vor 60 Jahren aus ihrer scheinbar abgeschlossenen Starrheit zu einem prächtigen und erfolgreichen Leben und Entwicklung erweckte, hat sich seither unter seinem ständigen Mitwirken und Einfluß zu einem blühenden und viele bedeutende Früchte tragenden Zweig des Baumes der neuzeitigen Mathematik entwickelt und gilt schon lange als klassisch. Die Wirkung der Persönlichkeit und der Tätigkeit von L. FEJÉR reichte aber weit über die Grenzen seines ohnehin sehr weiten Interessengebietes hinaus, der Zauber seiner Persönlichkeit, seines reizenden Humors, die außerordentliche Eleganz seiner Gedankengänge beeinflußte die menschliche und mathematische Tätigkeit aller seiner unmittelbaren und mittelbaren Schüler. — Man fragt oft, wie es möglich ist, daß ein so kleines Land wie Ungarn eine so bedeutende Rolle in dem internationalen mathematischen Leben spielt. Dies wird unter anderen eben durch die Wirkung von L. FEJÉR erklärlich. Er hatte ein ganz einzigartiges Talent mit Wort und Schrift einen regen, wimmelnden mathematischen Kreis um sich zu schaffen, wo Forscher in unformalem, freundschaftlichem Zusammenwirken und Wetteifern sich gegenseitig spornend, den Fortschritt der Mathematik förderten. Diese Wirkung konnte er während seines ganzen Lebens ausüben, so daß mehrere Generationen seiner Schüler in aller Welt die Mathematik förderten und fördern.

[1]) Vortrag gehalten am 9. 2. 1960 an der Gedenksitzung der Debrecener Abteilung der J. Bolyai Mathematischen Gesellschaft.

Sein *Leben* war einfach, wie seine Persönlichkeit. Er hat seine Mittelschulen in seiner Geburtsstadt Pécs absolviert, danach einen Preis an dem in 1894 gegründeten mathematischen Konkurs für Maturierte gewonnen. Er studierte erst an der technischen Hochschule, dann an der Universität von Budapest, fand hier noch als Student seinen grundlegenden, klassisch gewordenen Satz über die Summabilität der Fourier-Reihen stückweise stetiger Funktionen [2],[2]) und promovierte in 1902 ebenda mit der Arbeit [5] über denselben Gegenstand. Das akademische Jahr 1899—1900 verbrachte er in Berlin, wo er in dem Seminar von HERMANN AMANDUS SCHWARZ Freundschaft für das ganze Leben mit dem Leiter selbst, sowie mit C. CARATHÉODORY und E. SCHMIDT, später mit E. LANDAU und I. SCHUR schloß. Dann folgten in 1902—1903 Besuche in Göttingen und Paris (Verbindung mit D. HILBERT, R. FUETER, É. BOREL und anderen) und in den folgenden Jahren wieder in Deutschland, hauptsächlich in Göttingen und Berlin. Er begann seine Lehrtätigkeit an der Universität von Budapest in 1903, wurde Assistent von L. SCHLESINGER in 1905 an der Universität von Kolozsvár (=Klausenburg=Cluj), wo er noch in demselben Jahre habilitierte und in 1911 zum ao. Professor ernannt wurde. Noch in demselben Jahre wurde er ord. Professor an der Universität in Budapest, wo er abgesehen von kürzeren Besuchen im Ausland bis zu seinem Tode lebte und wirkte, viele Einladungen an ausländische Universitäten ablehnend, obwohl hier die immer schlimmer werdende politische Lage ihm die Wirkungsmöglichkeit und sogar das Leben immer stärker bedrohte bis am Weihnachtsabend von 1944 nur sehr wenig fehlte, daß er um sein Leben kam. Er hing an seiner Heimat nicht mit großen Worten, sondern mit Gefühlen und Taten. Ebenso stark hing er auch an seinem Berufe; er unterrichtete ununterbrochen bis zu der Erkrankung, die seinen Tod verursachte.

LEOPOLD FEJÉR war Mitglied der ungarischen Akademie der Wissenschaften, Ehrenmitglied der Göttinger und der Münchener Akademie und der Polnischen Akademie der Wissenschaften, sowie der Calcutta Mathematical Society, Ehrenvorsitzender der J. Bolyai Mathematischen Gesellschaft, Doctor honoris causa der Universität Budapest und der Brown University (Providence), Redaktionsmitglied der Mathematikai és Physikai Lapok, der Acta Math. Acad. Sci. Hung., der Annales Univ. Budapest, der Rendiconti Circ. Mat. Palermo und der Mathematischen Zeitschrift, Vice-President des Internationalen Mathematischen Kongresses in Cambridge (England) in 1912 usw. Er erhielt den Kossuth-Preis (Nationalpreis) und andere hohe Auszeichnungen.

In seiner Bescheidenheit und seiner Liebe zu der Mathematik und zu

[2]) Zahlen in Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende dieses Aufsatzes.

den Mathematikern, die ihm nahe lagen, hatte er aber mehr Freude an seiner wissenschaftlichen Arbeit und an seinen Schülern als an allem äußeren Dekorum. Für die Wirkung seiner Forschungs- und Unterrichts—Tätigkeit einerseits, und für die kulturellen und wissenschaftlichen Verhältnisse Ungarns im vergangenen Zeitalter andererseits ist es charakteristisch, daß seine Schüler in der ganzen Welt verstreut als leitende Mathematiker wirkten und wirken. Einmal wurden sogar in derselben Woche zwei Schüler von FEJÉR in zwei fremden Länder Ordinarii. („Das kam aber nicht in jeder Woche vor" war sein eigener humorvoller Kommentar hierzu.)

Außer den heute in Ungarn arbeitenden Mathematikern, die fast alle seine unmittelbaren oder mittelbaren Schüler sind, seien hier nur die Namen solcher Schüler von ihm, wie P. CSILLAG, E. EGERVÁRY, P. ERDŐS, M. FEKETE, G. GRÜNWALD, A. HAAR, F. LUKÁCS, J. NEUMANN, J. PÁL, G. PÓLYA, T. RADÓ, M. RIESZ, S. SIDON, O. SZÁSZ, G. SZEGŐ und J. SZŐKEFALVI-NAGY genannt. Die Wirkung seiner Ideen reicht noch viel weiter; im Schriftenverzeichnis des vorliegenden Aufsatzes trachtete ich eine kleine und natürlich sehr unvollständige Auswahl einiger sich unmittelbar den Ergebnissen und Ideen von L. FEJÉR anschließenden Arbeiten zu geben.

Die Reiche des mathematischen Schaffens von L. FEJÉR macht es natürlich gänzlich unmöglich, sein wissenschaftliches Werk auch nur einigermaßen vollständig hier zu besprechen. Es mangelt dazu erstens an Raum, zweitens an Kompetenz des Unterzeichneten; drittens gibt es noch immer nicht-publizierte Manuskripte von L. FEJÉR, besonders seine große und inhaltsreiche Korrespondenz, deren Bearbeitung erst jetzt beginnen wird; viertens hat er viele Ideen nicht selbst publiziert, sondern seinen Schülern überlassen, die sie weiterentwickelten und fünftens kann man die Wichtigkeit vieler seiner Ergebnisse erst an ihrer Wirkung abmessen, das sich ihm anschließende Schrifttum ist aber, wie schon erwähnt, so umfangreich, daß dessen Besprechung noch ein weit hoffnungsloseres Unternehmen wäre, als die des Oeuvre's von L. FEJÉR selbst. — Da außerdem in der letzten Zeit mehrere eingehende Studien über die wichtigsten Ergebnisse seines wissenschaftlichen Lebenswerkes erschienen sind, (vgl. insbes. [200], [208], [209] und [210] — von denen auch im Folgenden viel entnommen sein wird), sei es dem Unterzeichneten gestattet, nur wenige ausgewählte Züge des wissenschaftlichen Bildes von L. FEJÉR darzustellen, manchmal auch auf weniger bekannte Ergebnisse eingehend, und einige persönliche Erlebnisse über Persönlichkeit und mathematisches Wirken und Unterrichtstätigkeit von L. FEJÉR zu widergeben.

2. Zuerst wollen wir uns mit einigen Ergebnissen von L. FEJÉR über *Fourier- und andere Orthogonalreihen, über Summabilitäts- und Divergenzfragen* beschäftigen. Er konnte in 1902 als junger Mann von 22 Jahren mit vollem Recht seine Dissertation [5] mit folgenden Worten einleiten: „Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Gegenstand der Analysis, dessen Theorie von den Mathematikern schon vor etwa 15 Jahren als erschöpft und abgeschlossen betrachtet wurde und worüber sie seitdem auch nichts wesentlich neues geschrieben haben." (Übersetzung aus dem Ungarischen.) Der Grund für diesen Stand der Dinge war aber nicht, daß die Hauptfragen der Theorie der Fourier-Reihen etwa schon alle geklärt gewesen wären. Und das in einer Theorie, die seit der Auseinandersetzung von BERNOULLI, D'ALEMBERT, EULER und LAGRANGE in der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts über diesen Gegenstand (die auch zur Klärung des Funktionsbegriffes führte) ständig im Mittelpunkt des mathematischen Interesses stand. Man mag daran erinnern, daß CAUCHY bewiesen zu haben glaubte, daß die Fourierreihen aller stetigen periodischen Funktionen in allen Punkten konvergieren und es scheint, daß auch RIEMANN dieser Meinung war. In 1873 hat dann P. DU BOIS REYMOND und nach ihm einfacher H. A. SCHWARZ mit Gegenbeispielen gezeigt, dass dem nicht so ist, denn es gibt stetige periodische Funktionen, deren Fourier-Reihen in einem Punkte und sogar auf einer überall dichten Menge von Punkten nicht konvergieren. — Es sei hier bemerkt, daß DU BOIS REYMOND's Konstruktion für die letztere Erscheinung bezüglich überall dicht liegender Punkte nicht einwandfrei war, wie es von L. NEDER in [142] bemerkt wurde, so daß die von L. FEJÉR unter anderen in [36], [37] konstruierten außerordentlich einfachen Beispiele für diese Singularitäten in letzterer Hinsicht eigentlich die ersten korrekten waren. Über diese Beispiele schrieb G. H. HARDY in [124]: „Fejér has given an exceedingly simple and ingenious method for the construction of trigonometrical series which are the Fourier-series of continuous functions but which cease to converge for isolated values of x or for an enumerable everywhere dense set of values". Diese Methode, bei der zuerst die Fourier-Reihe und nicht die Funktion selbst definiert wurde, konnte auch in feineren Divergenzuntersuchungen für trigonometrische und für Potenzreihen verwendet werden.

Folglich standen die Dinge in dem vierten Viertel des neunzehnten Jahrhunderts so, daß man glauben konnte, daß die in der Analysis und in der Physik und Astronomie so oft und in so natürlicher Weise vorkommenden Fourier-Reihen sogar die periodischen überall stetigen Funktionen nicht erzeugen, vielleicht auch nicht bestimmen. Nun hat FEJÉR in seinen klassischen Arbeiten [2], [5], [9] entdeckt, daß die Fourierreihen doch diese Eigenschaften haben, und um das zu sehen, genügt es statt den Partialsummen ihre arithmetische Mittel zu betrachten. Diese konvergieren schon (Fejérscher Summabilitätssatz) und sogar gleichmäßig (Fejérscher Approximationssatz) zu den ursprünglichen stetigen Funktionen. Der Grund dafür liegt in folgender Tatsache, deren Bedeutung Fejér bemerkt hat: Während in der Dirichletschen Formel

$$s_n(x) = a_0 + 2a_1 \cos x + 2b_1 \sin x + 2a_2 \cos 2x + 2b_2 \sin 2x + \cdots$$

$$(1) \qquad \cdots + 2a_n \cos nx + 2b_n \sin nx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt,$$

$$\left(a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n \right)$$

für die Partialsummen der Fourier-Reihen die „Dirichletsche Kernfunktion"

$$\frac{\sin (2n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}}$$

ihr Vorzeichen an einer mit n wachsenden Anzahl von Stellen wechselt, ist dagegen in der Fejérschen Formel

$$(2) \qquad \begin{aligned} S_n(x) &= \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1} = \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin (n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt \end{aligned}$$

für die arithmetischen Mittel die „Fejérsche Kernfunktion"

$$\left(\frac{\sin (n+1) \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2$$

positiv. Aus demselben Grunde liegen auch alle $S_n(x)$ zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der Funktion $f(x)$ und diese Positivität der Kernfunktionen (evtl. in verallgemeinertem Sinne) kann als „Leitmotiv" vieler Arbeiten von L. FEJÉR betrachtet werden und trägt zur wundervollen Einheit des Fejérschen Werkes wesentlich bei. — Später hat FEJÉR gezeigt, daß auch die iterierten arithmetischen Mittel der Fourier-Reihe gewisse Eigenschaften der ursprünglichen Funktion widerspiegeln (vgl. z. B. [82]).

Über obige Entdeckung FEJÉR's schrieb G. H. HARDY in [145]: „. . . this fundamental result has been the starting point of a mass of modern research" und in [190] mit W. W. ROGOSINSKI: „These results showed that this method of summation by arithmetic means, now usually called the (C, 1) method, succeeds at the two fundamental points where convergence fails and marked a turning point in the development of the theory." Die Wichtigkeit dieser Ergebnisse wurde durch ihre vielseitigen Anwendungen klargestellt, von denen drei wichtige noch in der Arbeit [5] von FEJÉR selbst enthalten sind: 1) Wenn die Fourierreihe einer im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktion an einer Stetigkeitsstelle überhaupt konvergiert, so kann sie nur zum Funktionswert konvergieren. 2) Ein neuer Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes (stetige Funktionen können auf endlichen Intervallen durch algebraische und falls periodisch auch durch trigonometrische Polynome gleichmäßig approximiert werden). 3) Ein neuer, reihentheoretischer Beweis des Poissonschen Integralsatzes. Bald folgte auch 4) ein einfacher Beweis der Behauptung von STEKLOFF, daß die Folge der Partialsummen der Fourierreihe einer im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktion in einem Stetigkeitspunkte zwar nicht immer zum Funktionswert konvergiert, aber wenigstens eine zu ihm konvergierende Teilfolge immer enthält.

Die Wirkung dieser Ergebnisse von L. FEJÉR und die seiner weiteren verwandten, in [31], [35], [41], [42], [45], [48], [62], [96] usw. publizierten Resultate war sehr groß, sie gab auch der Theorie der allgemeinen trigonometrischen Reihen einen neuen Aufschwung, insbesondere wurde diese von ihm bewegt u. a. schon von A. HURWITZ [108], dann von H. LEBESGUE [109], in der Dissertation von FATOU [110], in der von M. RIESZ [116] (vgl. auch [119], [150]), in den Ergebnissen der polnischen mathematischen Schule (s. etwa [179]) sowie in vielen weiteren Arbeiten (vgl. z. B. [112], [113], [114], [117], [121], [122], [124], [126], [128], [129], [133], [134], [135], [139], [141], [143], [148], [149]) weiterentwickelt.

FEJÉR hat in den Arbeiten [22], [25], [46], [61], [63] und [64] dieses Problem auch auf die Laplace-Reihen übertragen. Er hat mit einem ähnlichen Gedankengang gezeigt, daß bei diesen die (Cesaro oder Hölder) Mittel zweiter Ordnung an den Stetigkeitsstellen zur Funktion konvergieren. Bezüglich der weiteren Entwicklung der von L. FEJÉR angegriffenen Summabilitäts- und Divergenzfragen bei Laplacereihen vgl. etwa die Dissertation von A. HAAR [115], die von F. LUKÁCS [130], [146], sowie die Arbeit [123] von T. H. GRONWALL, usw.

FEJÉR konnte seine Divergenz- und Summabilitätstheorie auch in der Theorie der Zeta-Funktion anwenden, insbes. bewies er in einer seiner Klausenburger Universitätsvorlesungen, daß die Dirichlet-Reihe der Zeta-Funktion in keinem komplexen Punkte mit Realteil 1 in irgendwelcher Ordnung summabel ist. Damit gelangte er in Berührung mit HARDY's grundlegenden

Ergebnissen bezüglich der Zeta-Funktion und bezüglich des Ideenkreises der Sätze vom Tauberschen Typ. Solche Berührung kam noch einmal zustande, als eine Bemerkung von FEJÉR, daß nämlich die Anzahl der Vorzeichenänderungen einer reellen Funktion auf einem Intervall größer oder gleich der Anzahl der Vorzeichenänderungen in der Folge ihrer Momente in demselben Intervall ist, zu einer wesentlichen Vereinfachung des Hardyschen Beweises für die Existenz unendlich vieler Wurzeln mit Realteil $\frac{1}{2}$ der Zeta-Funktion führte. Dieser Gedankengang wurde von M. FEKETE vervollständigt und in [154] publiziert.

Auch FEJÉR selbst fand einen Satz vom Tauberschen Typ, der ihn in [49] zu dem wichtigen Ergebnis führte, daß eine Potenzreihe im abgeschlossenen Einheitskreis gleichmäßig konvergent ist, falls sie dort stetig ist und diesen in eine Figur mit endlicher Oberfläche abbildet (die letztere Bedingung kann durch die Schlichtheit im Innern ersetzt werden). Bezüglich Verallgemeinerungen und Anwendungen s. z. B. J. PÁL [131], E. LANDAU [163], H. BOHR [176] und bezüglich der Lokalisierung dieses Satzes A. ZYGMUND [186] und N. N. LUSIN [193]. — Andererseits hat eben FEJÉR mit seiner schon erwähnten, in [36], [37] dargelegten Methode eine Potenzreihe konstruiert, deren Summe im abgeschlossenen Einheitskreis stetig und im Punkte $z=1$ doch divergent ist. Für weitere diesbezüglichen Ergebnisse s. [54], [125], [163] usw.

Es ist vielleicht weniger bekannt, daß FEJÉR bezüglich divergenter Reihen auch so einfache Sätze bewiesen hat, wie der folgende: Wenn das allgemeine Glied einer Reihe, die weder konvergiert, noch bestimmt divergiert, gegen 0 strebt, so liegen die Partialsummen überall dicht zwischen ihrem kleinsten und größten Häufungswert ([12], vgl. auch [152]), d. h. jeder Punkt des Oszillationsintervalles ist Häufungspunkt der Folge. Der Beweis ist von der bei FEJÉR üblichen Einfachheit und Eleganz: Es sei die Folge der Partialsummen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ z. B. beschränkt, $\lim\inf s_n = m$, $\lim\sup s_n = M$. $k \geqq 2$ sei eine positive ganze Zahl und $d=(M-m)/k$. Wir teilen die Zahlengerade in k Intervalle durch die Punkte

$$(3) \qquad -\infty, m+d, m+2d, \ldots, M-2d, M-d, \infty.$$

Da das allgemeine Glied der Reihe gegen 0 konvergiert, kann man N so groß wählen, daß für $n>N$ $|s_n - s_{n-1}|<d$ wird. Ferner möge s_{n_1} $(n_1>N)$ in dem ersten (unendlichen) Teilintervall von (3) und $s_{n_2}(n_2>n_1)$ in dem letzten (ebenfalls unendlichen) Teilintervall von (3) liegen (solche gibt es ja, da m und M Häufungspunkte sind). Die Glieder der Sequenz $s_{n_1}, s_{n_1+1}, \ldots, s_{n_2-1}, s_{n_2}$ können dann keines der zwischen m und M liegenden Teilintervalle von der Länge d „überspringen".

3. L. FEJÉR's Untersuchungen über *trigonometrische und algebraische Polynome* hatten ihren Ursprung in der Tatsache, daß seine Formel (2) bezüglich der arithmetischen Mittel der Partialsummen von Fourierreihen auf der elementaren Summenformel für die arithmetischen Mittel der Reihe $1+2\cos s+2\cos 2s+\dots$, nämlich auf

$$n+1+2n\cos s+2(n-1)\cos 2s+\dots+2\cos ns= \tag{4}$$
$$=\left(\frac{\sin(n+1)\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2$$

beruhte und daß die rechte Seite gleich

$$|1+z+z^2+\dots+z^n|^2$$

ist, wo $z=e^{is}$ ist. Die linke Seite von (4) ist ein nicht-negatives trigonometrisches Polynom und dies führte L. FEJÉR in 1910 auf die Vermutung, daß vielleicht alle nichtnegativen trigonometrischen Polynome mit $z=e^{is}$ in der Gestalt

$$|c_0+c_1z+c_2z^2+\dots+c_nz^n|^2$$

darstellbar sind. Diese Vermutung wurde von F. RIESZ bewiesen, diesen Beweis veröffentlicht FEJÉR in [51] und reduziert mit dessen Hilfe die Extremaaufgaben von trigonometrischen Polynomen auf die von quadratischen Formen. Er zieht daraus auch wichtige Ungleichungen bezüglich der Koeffizienten von trigonometrischen Polynomen. (Für weitere diesbezügliche Ergebnisse von E. EGERVÁRY, O. SZÁSZ und G. SZEGŐ vgl. [158], [159], [161], auch FEJÉR selbst kehrte auf dieses Problem in [69] zurück; BOAS und KAC verallgemeinerten es in [191], [195] auf Fourier-Integrale.) Aber FEJÉR hat schon früher in [44] einen wunderschönen elementaren Beweis für diese Ungleichungen gefunden. Es sei gestattet, diesen Beweis im Falle des konstanten Gliedes in der anschaulichen Gestalt wiederzugeben, wie ihn der Unterzeichnete von FEJÉR selbst hörte:

$$g(s)=a_0+a_1\cos s+b_1\sin s+\dots+a_n\cos ns+b_n\sin ns \tag{5}$$

sei das nichtnegative trigonometrische Polynom, und $s_j=j2\pi/(n+1)$. Es gilt

$$a_0=\frac{g(s)+g(s+s_1)+g(s+s_2)+\dots+g(s+s_n)}{n+1}, \tag{6}$$

weil bei beliebigem $k\geqq 1$ die Punkte $(\cos k(s+s_j),\ \sin k(s+s_j))$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ Ecken eines regulären Polygons sind, und ihr Schwerpunkt im Mittelpunkt des Kreises liegt. Da weiter wegen der Nichtnegativität von $g(s+s_1), g(s+s_2),\dots,g(s+s_n)$ aus (6) $g(s)\leqq a_0(n+1)$ folgt, gilt 1) im Falle

$a_0 = 1$ die Ungleichung $g(s) \leqq n+1$, 2) im Falle $a_0 = 0$ einerseits $g(s) \leqq 0$, andererseits $g(s) \geqq 0$ also $g(s) \equiv 0$: es gibt außer dem identisch verschwindenden kein nichtnegatives trigonometrisches Polynom mit verschwindendem konstanten Glied; 3) endlich sind für beliebige trigonometrische Polynome $g(s)$ mit $\min g(s) = m$, $\max g(s) = M$ die trigonometrischen Polynome $g(s) - m$ und $M - g(s)$ nichtnegativ, also $0 \leqq g(s) - m \leqq (a_0 - m)(n+1)$ bzw. $0 \leqq M - g(s) \leqq (M - a_0)(n+1)$, und diese Ungleichungen bleiben auch dann gültig, falls in ihnen $g(s)$ durch seinen größten bzw. kleinsten Wert M bzw. m ersetzt wird, also

$$m + (M-m)/(n+1) \leqq a_0 \leqq M - (M-m)/(n+1).$$

Da

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\,dt$$

ist, betonte FEJÉR immer, daß dies eine Verfeinerung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für trigonometrische Polynome ist.

Es sei hier noch bemerkt, daß L. FEJÉR einer der ersten war, der die Bedeutung der Bernsteinschen Ungleichung für Ableitungen der trigonometrischen Polynome erkannte und sie anzuwenden begonnen hat. Er hat auch einen überraschend einfachen Beweis für diese Ungleichung gefunden, aber nicht publiziert (vgl. aber [72], [132], [152]). Die Bernsteinsche Ungleichung behauptet, daß für trigonometrische Polynome n-ten Grades (5) aus $|g(s)| \leqq 1$ das Bestehen von $|g'(s)| \leqq n$ folgt. Nun folgt für Sinuspolynome S ($b_k = 0$ in (5)) laut eines elementaren Ergebnisses von M. RIESZ aus $|S(s)| \leqq 1$ das Bestehen von $|S(s)/\sin s| \leqq n$. Die Fejérsche Idee besteht in der Anwendung dieses Ergebnisses auf $S(s) = (g(s_0+s) + g(s_0-s))/2$ (das tatsächlich ein Sinuspolynom ist) im Punkte $s = 0$:

$$n \geqq \lim_{s \to 0} \left| \frac{S(s)}{\sin s} \right| = |S'(0)| = \left| \frac{g'(s_0+s) + g'(s_0-s)}{2} \right|_{s=0} = |g'(s_0)|.$$

Die ähnliche Markoffsche Ungleichung für die Ableitungen der algebraischen Polynome läßt sich auch hieraus ableiten (s. [152]).

Viele Ergebnisse von L. FEJÉR beziehen sich auf (komplexe) Nullstellen von algebraischen Polynomen. Es sei hier vorerst eine ganz elementare Bemerkung von L. FEJÉR und O. TOEPLITZ (auch nicht publiziert, vgl. aber [152] und auch [21], [23]) wiedergegeben: Ist $P(z)$ ein Polynom, so liegen alle Nullstellen von $P'(z)$ in der konvexen Hülle der Nullstellen von $P(z)$ (Satz von GAUSS und LUCAS), bilden wir andererseit alle Polynome, die in gegebenen Punkten $z_1, z_2, \ldots z_n$ verschwinden, so bedecken die Nullstellen ihrer Ableitungen die konvexe Hülle von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ überall dicht. Ist nämlich

z eine Nullstelle von $P'(z)$, die keine von $P(z)$ ist, und ist p_k die Multiplizität der Wurzel z_k von $P(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ so gilt

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{z-z_k}=0 \quad \text{und daher} \quad 0=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{z-z_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-z_k)p_k}{|z-z_k|^2},$$

d. h.

$$z=\frac{m_1 z_1+m_2 z_2+\cdots+m_n z_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \quad \text{mit} \quad m_k=\frac{p_k}{|z-z_k|^2}>0 \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

also liegt z tatsächlich im Innern der konvexen Hülle von $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ist andereseits $Z=Q_1 z_1+Q_2 z_2+\cdots+Q_n z_n$ ein beliebiger Punkt in dieser Hülle $(Q_1+Q_2+\cdots+Q_n=1;\ Q_k \geqq 0,\ k=1, 2, \ldots, n)$, also

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{Z-z_k}=0 \quad \text{mit} \quad q_k=\frac{Q_k|Z-z_k|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k|Z-z_k|^2},$$

so approximieren wir q_k durch *rationale* $p_k \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ und so wird eine Nullstelle der Ableitung des in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und nur dort verschwindenden Polynoms $(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\cdots(z-z_n)^{p_n}$ beliebig nahe zu Z liegen, w. z. b. w. — Andere Ergebnisse von L. FEJÉR beziehen sich auf die (komplexen) Nullstellen von Extremalpolynomen (Polynome gegebenen Grades, die die verschwindende Funktion in Betrag am besten approximieren unter denen mit Koeffizient 1 für x^n). Auch die diesbezügliche Arbeit [60] von FEJÉR war Ausgangspunkt einer langen Folge von Untersuchungen (vgl. z. B. [144], [170], [171], [198], [201], [203], [204], [205]) u. a. von M. FEKETE, J. NEUMANN, J. SZŐKEFALVI-NAGY und J. L. WALSH. — Es seien in diesem Ideenkreis noch seine Ergebnisse [23], [24] (vgl. auch [157]) bezüglich der Nullstellen mit kleinsten Betrag von komplexen Polynomen erwähnt, die er auch auf die Theorie der lakunären Potenzreihen und auf den Picardschen Problemkreis bezüglich des von analytischen komplexen Funktionen ausgelassenen Wertes anwenden konnte. Er wurde so einer der Bahnbrecher der ersteren Theorie und erreichte in dem letzteren Problemenkreis Ergebnisse, für die auch seitdem noch keine andere Herleitung gefunden wurde. Diesen Arbeiten von L. FEJÉR schlossen sich die von M. BIERNACKI [160], G. PÓLYA [164] und anderen an.

4. Bezüglich der *Funktionentheorie* sei noch die gemeinsame Arbeit [19] von L. FEJÉR mit C. CARATHÉODORY erwähnt und das Ergebnis hervorgehoben, welche die Extremalfunktion bestimmt, die unter den in dem Innern des Einheitskreises regulären, beschränkten, dort in den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ verschwindenden und im 0-Punkt den Wert A annehmenden Funktionen die kleinste obere Grenze besitzt. Diese ist

$$f(z)=\frac{A}{|z_1|^2|z_2|^2\cdots|z_n|^2}\,\frac{z-z_1}{z-z_1^*}\,\frac{z-z_1}{z-z_2^*}\cdots\frac{z-z_n}{z-z_n^*}$$

$$\text{mit}\quad z_k^*=\frac{1}{\bar{z}_k}\qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

In dieser Arbeit tritt jene, seither sehr oft und von vielen verwendete Idee zum ersten Mal auf, daß die Tatsache, daß eine im Innern des Einheitskreises reguläre Funktion mit dem absoluten Maximum M dort in einem Punkte z_k verschwindet, günstiger ausgenützt werden kann, wenn man mit $(z-z_k)/(z-z_k^*)$, als wenn man nur mit $(z-z_k)$ dividiert. Auch die andere gemeinsame Arbeit [39] von L. Fejér mit C. Carathéodory, über harmonische Reihenentwicklung mit gegebenen Anfangsgliedern, hatte eine bedeutende Wirkung.

Auch mehrere gemeinsame Ergebnisse von L. Fejér und F. Riesz sind von funktionentheoretischer Natur. Die Arbeit [59] ist ihre einzige gemeinsame Publikation, ihre Zusammenarbeit brachte aber auch mehrere weitere Ergebnisse. Sie bewiesen u. a., daß das Quadratintegral des Betrages einer im Einheitskreis regulären Funktion auf einem beliebigen Durchmesser des Einheitskreises höchstens halb so groß ist, als das auf der Peripherie; das konforme Bild eines beliebigen Durchmessers ist höchstens halb so lang als das der Kreisperipherie. Ein anderes ihrer gemeinsamen Ergebnisse ist der Standardbeweis des Riemannschen Fundamentalsatzes der konformen Abbildung, der mit weiteren Erörterungen durch T. Radó [147] publiziert wurde und der bis heute als „der" Beweis dieses grundlegenden Satzes gilt.

Die weiteren Ergebnisse [36], [37], [46], [50], [61], [65] von L. Fejér bezüglich der Schranken der Partialsummen von im abgeschschlossenen Einheitskreise beschränkten Potenzreihen und ihrer arithmetischen Mitteln fanden ihre Fortsetzung in den Arbeiten von E. Landau [127], [163], I. Schur [138], O. Szász [140], G. Szegő [162] und anderen.

5. Hier wollen wir zu den Arbeiten von L. Fejér bezüglich *Interpolation* im Komplexen und später im Reellen übergehen. Im ersteren Gebiet löste er in [58] das Problem von C. Runge: Man soll auf einer rektifizierbaren Jordan-Kurve C Interpolationsgrundpunkte so wählen, daß die bezüglichen Lagrangeschen Interpolationspolynome einer beliebigen, im abgeschlossenen Innern von C regulären Funktion in einem im Innern von C liegenden abgeschlossenen Gebiet gleichmäßig zur Funktion selbst konvergieren. Fejér wählte diese so, daß er auf einem Kreis als n-te Grundpunkte die Ecken eines eingeschriebenen regulären Polygons wählte, und auf C jene Punkte in welche diese durch eine schlichte konforme Abbildung übergehen, die das Äußere des Kreises in das Äußere von C und den unendlich fernen Punkt in sich selbst überträgt derart, daß die Ableitung der Funktion, die diese Abbildung erzeugt, reell und positiv wird, wenn wir uns diesem unendlich fernen Punkte nähern; er bewies, daß dann tatsächlich die Interpolationspolynome aller regulären Funktionen gleichmäßig zu den Funktionen konvergieren. Auch diese Arbeit hatte große Wirkung (s. etwa M. FEKETE [153] und das Buch [178] von J. L. WALSH) und L. KALMÁR [155] fand als notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Lagrangeschen Interpolationspolynome die asymptotische Gleichverteilung der Grundpunkte auf C.

Diese Ergebnisse rehabilitieren den Lagrangeschen Interpolationsprozeß gewissermaßen, der eine solche Rehabilitation auch stark nötig hatte. So hat eben FEJÉR in [73] einen eleganten Beweis des folgenden Faberschen Satzes gegeben: wie man auch die Grundpunkte in $[-1, 1]$ aufnimmt, gibt es immer eine stetige Funktion, so daß die bezüglichen Interpolationspolynome dort unbeschränkt sind.

FEJÉR hat aber nicht nur auf diese Mängel hingewiesen, sondern auch einen „besseren" Interpolationsprozess angegeben, nämlich den Hermiteschen. Wir wollen die Sache an der trigonometrischen Interpolation erklären. Sind die $g_n(x_k) = f(x_k)$ ($x_k = \dfrac{2\pi k}{2n+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$) gegeben, so ist das interpolierende trigonometrische Polynom n-ten Grades

$$g_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \frac{\sin(2n+1)\dfrac{x_k - x}{2}}{\sin\dfrac{x_k - x}{2}},$$

während im Falle, wo $h_n(x_k) = f(x_k)$ (hier sei $x_k = \dfrac{2\pi k}{n+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) und $h_n'(x_k) = 0$ vorgeschrieben sind,

$$h_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{x_k - x}{2}}{\sin\dfrac{x_k - x}{2}} \right)^2$$

ist. Die Situation ist also mit (1) und (2) vollständig analog und damit sind wir zur Anfangsidee zurückgekommen. Tatsächlich kann $g_n(x)$ auch bei stetigen periodischen $f(x)$ unbeschränkt werden, während die $h_n(x)$ zwischen dem kleinsten und dem größten Wert von $f(x)$ bleiben und gleichmäßig zu $f(x)$ konvergieren. So gilt auch für die Interpolation mit algebraischen Polynomen laut der Ergebnisse von L. FEJÉR, daß z. B. bei den Nullstellen der Legendreschen und der Tschebytcheffschen Polynome als Grundpunkte, die Werte des Hermiteschen Interpolationspolynoms zwischen dem kleinsten und dem größten Wert von $f(x)$ bleiben und daß bei den Nullstellen der Jacobischen Polynome und bei allgemeineren, von ihm als normal bezeichneten Grundpunktfolgen, die Hermiteschen Interpolationspolynome gleichmäßig zur Funktion streben. Hier hat FEJÉR die Ableitungen der Interpolationspolynome in den Grundpunkten erst als 0, später als gleichmäßig beschränkt angenommen. Bei der Bestimmung dieser normalen Grundpunktenfolgen ist wieder die Nichtnegativität gewisser Kernfunktionen in einem verallgemeinerten Sinne maßgebend. Den wichtigen Arbeiten [52], [53], [71], [73], [77], [79], [80] und [86] über Interpolation und mechanische Quadratur, schließen sich viele Ergebnisse u. a. von G. SZEGŐ [169], [174], G. PÓLYA [172], J. SHOHAT [173], P. ERDŐS und P. TURÁN [183], [187], G. GRÜNWALD [188], [189], E. EGERVÁRY und P. TURÁN [206], P. SZÁSZ [207] und von vielen anderen (vgl. auch [177], [192], [197]) an.

6. Wir konnten auf viele schöne Ergebnisse von L. FEJÉR bezüglich Elementargeometrie, Mechanik und Differentialgleichungen, bezüglich gewisser speziellen, aber wichtiges Verhalten zeigenden trigonometrischen und algebraischen Polynome (insbes. bezüglich einiger der klassischen Orthogonalpolynome), bezüglich Reihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge usw. nicht eingehen.

Dagegen wollen wir kurz auf zwei der vielen Fälle hinweisen, wo die von L. FEJÉR in Wort oder Brief aufgeworfenen *Probleme* neue Forschungsrichtungen eröffneten. (Wie wir übrigens sahen, ließ er oft auch seine fertigen Ergebnisse von seinen Schülern veröffentlichen, wenn sie diese wesentlich weiterfördern konnten.) — So hat J. PÁL das folgende Problem von FEJÉR gelöst: Zu welchen Funktionen $x = f(t)$ können Funktionen $y = g(t)$ gefunden werden derart, daß es eine Jordan-Kurve gebe, deren Parameterdarstellung eben durch diese beiden Funktionen angegeben werden kann. Davon ist eine Anzahl von topologischen Fragen entsprungen, die dann von TIETZE und anderen untersucht wurden. — Ein anderes Beispiel: In Analogie zur Leibnizschen Konstruktion der Exponentialfunktion, wo jene Eigenschaft dieser Funktion verwendet wurde, daß sie dem arithmetischen Mittel der Veränderlichenwerte das geometrische Mittel der Funktionenwerte zuordnet, fragte FEJÉR, bei wasfür Mittelwerten $M(x, y)$ es eine stetige Funktion f mit der Eigenschaft

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = M(f(x), f(y)),$$

gibt, und wie diese Funktion angegeben werden kann. Diesem Fejérschen Problem ist ein großer Teil der neueren Theorie der Funktionalgleichungen entsprungen (vgl. z. B. [181], [194], [196]).

7. Und nun noch etwas über seine charmante *Persönlichkeit*, die wesentlich dazu beigetragen hat, daß er so viele Schüler und Freunde hatte, daß er zum Gründer der ersten und größten mathematischen Schule in Ungarn wurde (vgl. auch [210]). Diese Persönlichkeit zeigte sich auch in seinen Werken. Ihrem Inhalt nach können wir sagen, daß er seine epochemachende, neue Wege und Perspektiven eröffnenden Ergebnisse in überraschend einfachen Sätzen aussprechen und mit unübertreffbar einfachen und eleganten Methoden beweisen konnte. Manchmal muß man eine Arbeit von FEJÉR zweimal lesen, nicht als ob man sie zum ersten Mal etwa nicht verstehen könnte, sondern weil man nicht glauben will, daß die Sätze tatsächlich schon bewiesen sind. Wasfür Tiefe hinter dieser scheinbaren Einfachheit liegt, bemerkt man erst wenn man einen solchen Beweis vergißt und selbst rekonstruieren will. Besonders meisterhaft ist auch die vollständig geschliffene Form seiner Arbeiten. Das frappante Aussprechen der Ergebnisse, ihres Platzes unter den vorhandenen Resultaten und den noch ungelösten Problemen, die saubere, klar verständliche Exposition der Beweise, die unreduzierbare Bündigkeit der Darstellung verbunden mit einem so gut genießbaren literarischen Stil, mit gedankenerweckenden Einzelheiten und mit einem unnachahmbar strengen inneren Zusammenhang, macht sie zu wirklichen Meisterwerken. Bei ihm trifft das geflügelte Wort „der Stil, das ist der Mensch selbst" zu: einfach und geistreich wie sein Stil war auch seine Persönlichkeit.

Besonders genußreich waren auch seine Vorlesungen, wo er auch viel Unpubliziertes von ihm und anderen erzählte und die Fragen immer leicht verständlich und vielseitig exponierte, auf denselben Gegenstand (wie auch in seinen Werken) wiederholt von immer anderer Seite zurückkehrend, bis alles klar wurde (obwohl er wußte — wie er oft tadelnd sagte — daß „der Student am liebsten aus dem Hörsaal laufen möchte, wenn er etwas zum zweiten Mal hört"). Seine Bescheidenheit war sprichwörtlich, bezüglich eigener Ergebnisse ging sie weit über dem Sturmschen „heute hören wir über den Satz, dessen Namen zu tragen ich die Ehre habe" hinaus. Während viele über ihren „oft zitierten Satz" sprachen, hat er z. B. seinen Summabilitätssatz eher jedesmal von neuem ausgesprochen, wo dieser Satz vorkam, als daß er ihn mit dem überall angenommenen Namen als Fejérschen Satz zitiere. — Viel goldener Humor umfloß auch seine Vorlesungen: er war auch ein unnachahmbar meisterhafter Erzähler von Anekdoten. Ihm ist es zu verdanken, daß man in Ungarn vielleicht mehr Anekdoten z. B. über HILBERT kennt, als in Deutschland selbst.

Er war kein strenger Examinator und doch haben während der fast 50 Jahre seiner Professur weniger als 40 Mathematiker bei ihm promoviert. Ja, er hat einmal einem jungen Mann, der ihn um ein „Dissertationsthema" bat, gesagt: „Lesen Sie, bitte, viel in dem Gebiete der Mathematik, das Sie interessiert, aber nicht nur Bücher, sondern auch Zeitschriften, denn in diesen ist mehr Leben, und wenn Sie irgendwo eine oder mehrere Lücken finden, und diese füllen können, so schreiben Sie das ab und daraus kann eine Dissertation werden.'' Mit denen aber, die sich für die Mathematik interessierten, war er äußerst unformell und freundlich. Seinen Schülern stand seine Tür an der Universität und zu Hause immer offen, kein Pedell hielt sie fern, kein Sekretär beschränkte den Zeitpunkt der Gespräche. Diese wurden, besonders in seinen jüngeren Jahren, oft in einem Kaffeehaus bis in die späten Abendstunden fortgesetzt und viele Arbeiten seiner Schüler haben ihr Entstehen diesen Gelegenheiten zu verdanken. In diesen Gesprächen vereinten sich Mathematisches und Persönliches, Scherz und Ernst in angenehmer Harmonie.

Seine warme Persönlichkeit, sein geistreicher Humor zeigten sich überall. Er hatte Interesse für alles, für Musik, Literatur und Kunst, für andere Wissenschaften, für andere Zweige der Mathematik (wenn er auch gewisse moderne Tendenzen mißbilligte), besonders für die Geschichte der Mathematik. Es war von ihm keine Geringschätzung, sondern eben tiefe Kenntnis der letzteren, daß er sagte: „Die Geschichte der Mathematik dient zu zeigen, daß niemand etwas entdeckt hat: immer ist ein früherer zu finden, der es schon wußte!" — Nun wurde er selbst zu einer der größten Gestalten der Geschichte der Mathematik, von dem wir aber sehr gut wissen, daß er sehr vieles entdeckt hat. Der Gruß der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften zu seinem 70-sten Geburtstag hat es richtig festgestellt: „Sie sind einer der hervorragendsten Schöper der Analysis in unserem Zeitalter, der die mathematische Wissenschaft mit klassischen Ergebnissen bereichert hat, wie z. B. mit der Methode der Summation divergenter Reihen. Sie haben viele tiefe Sätze der algebraischen Analysis, der Interpolationstheorie, der Reihentheorie, der Approximationstheorie, sowie anderer Disziplinen der reellen und komplexen Funktionentheorie gefunden..." (Übersetzung aus dem Russischen).

Die übrigen Werke von Leopold Fejér sind noch in seinem Leben klassisch geworden; jetzt hat er noch ein klassisches Werk vollendet: sein Leben selbst.

J. Aczél

Schriftenverzeichnis

A. Die Werke von L. Fejér

[1] Néhány tétel a hatványsorról, *Mat. Fiz. Lapok* **9** (1900), 405—410.
[2] Sur les fonctions bornées et intégrables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **131** (1900), 984—987.
[3] A Poisson-féle integrál elméletéhez, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **19** (1901), 394—398.
[4] Egy bizonyos határátmenetre vonatkozó kritérium, *Mat. Fiz. Lapok* **10** (1901), 322—325.
[5] Vizsgálatok a Fourier-féle sorok köréből, *Mat. Fiz. Lapok* **11** (1902), 49—68, 97—123.
[6] Sur la différentiation de la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **134** (1902), 762—765.
[7] Über zwei Randwertaufgaben, *Math. Naturwiss. Berichte Ungar.* **19** (1903), 329—331.
[8] Sur les équations fonctionnelles et la théorie des séries divergentes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **137** (1903), 839—841.
[9] Untersuchungen über Fouriersche Reihen, *Math. Ann.* 58 (1904), 51—69.
[10] Az Ostwald-féle mechanikai elvről, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **23** (1905), 155—176.
[11] Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik, *Math. Ann.* **61** (1906), 422—436.
[12] Sur la série Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **142** (1906), 501—503.
[13] Tömegpont egyensúlya ellenálló közegben, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **24** (1906), 109—116.
[14] Stabilitási és labilitási vizsgálatok a tömegpontrendszer mechanikájában, *Mat. Fiz. Lapok* **15** (1906), 152—172.
[15] A Fourier-féle sorról (Első közlemény), *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **24** (1906), 292—297.
[16] Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel, *J. Reine Angew. Math.* **131** (1906), 216—223.
[17] A Fourier-féle sorokról (Második közlemény), *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **24** (1906), 369—390.
[18] Sur le calcul des limites, *C. R. Acad. Sci. Paris* **143** (1906), 957—959.
[19] Remarques sur le théorème de M. Jensen (Mit C. Carathéodory), *C. R. Acad. Sci. Paris* **145** (1907), 163—165.
[20] Über die Fouriersche Reihe, *Math. Ann.* **64** (1907), 273—288.
[21] Sur la racine de moindre module d'une équation algébrique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **145** (1907), 459—461.
[22] Sur le développement d'une fonction arbitraire suivant les fonctions de Laplace, *C. R. Acad. Sci. Paris* **146** (1908), 224—227.
[23] Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung, *Math. Ann.* **65** (1908), 413—423.
[24] Az algebrai egyenlet legkisebb abszolút értékű gyökéről, *Mat. Fiz. Lapok* **17** (1908), 308—324.
[25] A Laplace-féle sorokról, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **26** (1908), 323—373.
[26] Sur une méthode de M. Darboux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **147** (1908), 1040—1042.
[27] Asymptotikus értékek meghatározásáról, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **27** (1909), 1—33.
[28] Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. *J. Reine Angew. Math.* **137** (1909), 1—5.

[29] Über die Laplacesche Reihe, *Math. Ann.* **67** (1909), 76—109.

[30] Eine stetige Funktion, deren Fouriersche Reihe divergiert, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **28** (1909), 402—404.

[31] Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *J. Reine Angew. Math.* **138** (1910), 22—53.

[32] Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, *S.-B. Math.-Phys. Bayer. Akad. Wiss.* (1910), 1—17.

[33] Sur une paire de séries de Fourier conjuguées, *C. R. Acad. Sci. Paris* **150** (1910), 518—520.

[34] Sur les sommes partielles de la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **150** (1910), 1299—1302.

[35] Lebesgue-féle állandók és divergens Fourier-sorok, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **28** (1910), 143—179.

[36] A folytonos függvények Fourier-féle sorának singularitásairól, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **28** (1910), 550—592.

[37] Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, *Ann. Sci. École Norm.* **28** (1911), 64—103.

[38] Eine Bemerkung zur Mittag—Lefflerschen Approximation einer beliebigen analytischen Funktion innerhalb des Sterngebietes, *Acta Math.* **35** (1911), 67—71.

[39] Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landau-schen Satz (Mit C. Carathéodory), *Rend. Circ. Mat. Palermo* **32** (1911), 218—239.

[40] La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, *C. R. Acad. Sci. Paris* **156** (1913), 46—49.

[41] Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe, *J. Reine Angew. Math.* **142** (1913), 165—188.

[42] A függvény szakadásának meghatározása Fourier-féle sorából, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **31** (1913), 385—415.

[43] Sur les polynomes harmoniques quelconques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **157** (1913), 506—509.

[44] Sur les polynômes trigonométriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **157** (1913), 571—574.

[45] Über konjugierte trigonometrische Reihen, *J. Reine Angew. Math.* **144** (1914), 48—56.

[46] Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, *Rend. Circ. Math. Palermo* **38** (1914), 79—97.

[47] Nombre de changements de signe d'une fonction dans un intervalle et ses moments, *C. R. Acad. Sci. Paris* **158** (1914), 1328—1331.

[48] Konjugált trigonometrikus sorokról, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **32** (1914), 85—93.

[49] Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, *Math. Abh. H. A. Schwarz zu seinem 50-jähr. Doktorjub. gewidmet, Berlin,* 1914, 42—53.

[50] Bizonyos, a Fourier és Laplace-féle sorokkal értelmezett középgörbékről és középfelületekről, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **32** (1914), 462—486.

[51] Über trigonometrische Polynome, *J. Reine Angew. Math.* **146** (1915), 53—82.

[52] Interpolatióról, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **34** (1916), 209—229.

[53] Über Interpolation, *Gött. Nachr.* (1916), 66—91.

[54] Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenz-Kreise überall stetig ist, *S.-B. Math.-Phys. Bayer. Akad. Wiss.* (1917), 33—50.

[55] Fourierreihe und Potenzreihe, *Mh. Math. Physik* **28** (1917), 64—76.

[56] Über Kreisgebiete, in denen eine Wurzel einer algebraischen Gleichung liegt, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **26** (1917), 114—128.

[57] Über die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, *Math. Z.* **1** (1918), 70—79.

[58] Interpolation und konforme Abbildung, *Gött. Nachr.* 1918, 319—331.

[59] Über einige funktionentheoretische Ungleichungen (Mit F. Riesz), *Math. Z.* **11** (1921), 305—314.

[60] Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen (Hilbert-Festschrift), *Math. Ann.* **85** (1922), 41—48.

[61] Über Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten (Erste Mitteilung), *Acta Sci. Math. Szeged* **2** (1925), 75—86.

[62] Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe, *Gött. Nachr.* 1925, 13—17.

[63] Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel, *Math. Z.* **24** (1925), 267—284.

[64] Abschätzungen für die Legendreschen und verwandten Polynome, *Math. Z.* **24** (1925), 285—298.

[65] Über die Koeffizientensumme einer beschränkten und schlichten Potenzreihe (Mittag-Leffler-Festschrift), *Acta Math.*, **49** (1926), 183—190.

[66] Über gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie (Riemann-Festschrift), *Math. Ann.*, **97** (1926), 104–123.

[67] Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen; nebst Anwendungen dieser Sätze auf die Abschnitte und Abschnittsmittelwerte von ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen und von beschränkten Potenzreihen, *Mh. Math. Physik.* **35** (1928), 305—344.

[68] Über die Grenzen der Abschnitte gewisser Potenzreihen, *Acta Sci. Math. Szeged* **4** (1928), 14—24.

[69] Über eine Aufgabe der Harnackschen Potentialtheorie, *Gött. Nachr.* 1928, 109—117.

[70] Über ein trigonometrisches Analogon eines Kakeyaschen Satzes, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **38** (1929), 231—238.

[71] Über Weierstraß'sche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation, *Math. Ann.* **102** (1930), 707—725.

[72] Über einen S. Bernstein-schen Satz über die Derivierte eines trigonometrischen Polynoms, und über die Szegő-sche Verschärfung desselben, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **20** (Commemoration Volume) (1930), 49—54.

[73] Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen, *Math. Z.* **32** (1930), 426—457.

[74] Jelentés az 1930. évi Kőnig Gyula-jutalomról, *Mat. Fiz. Lapok* **37** (1930), 63—90.

[75] Ultrasphärikus polynomok összegéről, *Mat. Fiz. Lapok* **38** (1931), 161—164.

[76] A konjugált pontok felhasználása a Lagrange-féle interpolációnál, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **48** (1931), 631—643.

[77] Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Ann.* **106** (1932), 1—55.

[78] Über einige Identitäten der Interpolationstheorie und ihre Anwendung zur Bestimmung kleinster Maxima, *Acta Sci. Math. Szeged* **5** (1932), 143—153.

[79] Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (2) **1** (1932), 263—276.

[80] Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Z.* **37** (1933), 287—309.

[81] Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, *Z. Angew. Mat. Mech.* **13** (1933), 80—88.

[82] Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen, *J. London Math. Soc.* **8** (1933), 53—62.

[83] On the infinite sequences arising in the theories of harmonic analysis, of interpolation and of mechanical quadratures, *Bull. Amer. Math. Soc.* **39** (1933), 521—534.

[84] A harmonikus analízis, az interpoláció és a mechanikus quadratúra elméletében fellépő végtelen sorozatokról, *Mat. Fiz. Lapok* **40** (1933), 40—55.

[85] On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, *J. Math. Phys.* **13** (1934), 1—17.

[86] On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points, *Amer. Math. Monthly* **41** (1934), 1—14.

[87] A Fourier-féle sor és a hatványsor számtani közepeinek néhány új tulajdonságáról, *Mat. Fiz. Lapok* **41** (1934), 1—16.

[88] On a theorem of Paley, *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** (1934), 469—475.

[89] Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendre-Polynome, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31** (1935), 307—316.

[90] Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge (Mit G. Szegő), *Prace Mat. Fiz.* **44** (1935), 15—25.

[91] Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Trans. Amer. Math. Soc.* **39** (1936), 18—59.

[92] A hatványsorról és a vele kapcsolatos Legendre-féle többtagúakról, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **54** (1936), 160—176.

[93] Bestimmung von Grenzen für die Nullstellen des Legendreschen Polynoms aus der Stieltjesschen Integraldarstellung desselben, *Mh. Math. Physik* **43** (1936), 193—209.

[94] Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *Acta Sci. Math. Szeged* **8** (1936), 89—115.

[95] Hatványsorok többszörösen monoton együttható-sorozattal, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **55** (1936), 1—27.

[96] Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **34** (1938), 503—509.

[97] Intégrales singulières à noyau positif. *Comment. Math. Helv.*, 23 (1949), 177—199.

[98] On special conformal mappings (Mit G. Szegő), *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 1055—1056.

[99] On the partial sums of second order of the geometric series. By M. Schweitzer. (Publication by L. Fejér and G. Szegő.) *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 59.

[100] The partial sums of second order of the geometric series. By M. Schweitzer. (Publication and introduction by L. Fejér and G. Szegő.) *Duke Math. J.*, **18** (1951), 527—533.

[101] Special conformal mappings (Mit G. Szegő), *Duke Math. J.*, 18 (1951), 535—548.

[102] Beste Approximierbarkeit einer gegebenen Funktion durch ein Polynom gegebenen Grades, wenn das Polynom sonst beliebig oder wenn es noch einer interpolatorischen Beschreibung unterworfen ist, *Math. Nachr.* **4** (1951), 328—342.

[103] Eigenschaften von einigen elementaren trigonometrischen Polynomen, die mit der Flächenmessung auf der Kugel zusammenhängen, *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem*, Tome Supplémentaire, (1952), 67—72.

[104] Approximáció interpoláció útján. *C. R. I. Congr. Math. Hongrois*, 27 Aout.—2. Sept. 1950, pp. 99—112, Akadémiai Kiadó, *Budapest* 1952.

[105] Néhány elemi természetű észrevétel a parabolikus interpolációnál fellépő alappontokra vonatkozólag, *Mat. Lapok* **6** (1955), 293–308.

[106] Verschiedene Bemerkungen elementarer Natur über die Grundpolynome, die bei den parabolischen Interpolationen auftreten, *Acta Math. Acad. Sci Hungar.* **6** (1955), 227—240.

B. Einige sich den Werken von L. Fejér anschliessende Arbeiten

[107] É. Borel, Leçons sur les séries divergentes, *Paris*, 1901.

[108] A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.* **57** (1903), 425—446.

[109] H. Lebesgue, Recherches sur la convergence des séries de Fourier, *Math. Ann.* **61** (1905), 251—280.

[110] P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* **30** (1906), 335—340.

[111] H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, *Paris*, 1906.

[112] M. Riesz, Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, *C. R. Acad. Sci. Paris* **149** (1909), 309—312.

[113] S. Chapman, On non-integral orders of summability of series and integrals, *Proc. London Math. Soc.* (2) **9** (1910/11), 369—409.

[114] M. Fekete, Sur un théorème de M. Landau, *C. R. Acad. Sci. Paris* **151** (1910), 497—500.

[115] A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung), *Math. Ann.* **69** (1910), 331—371.

[116] M. Riesz, Összegezhető trigonometrikus sorok és összegezhető hatványsorok, *Mat. Fiz. Lapok* **19** (1910), 1—56.

[117] M. Fekete, A széttartó végtelen sorok elméletéhez, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **29** (1911), 719—726.

[118] D. Jackson, Über eine trigonometrische Summe, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **32** (1911), 257—262.

[119] M. Riesz, Über summierbare trigonometrische Reihen, *Math. Ann.* **71** (1911), 54—75.

[120] T. H. Gronwall, Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx$, *Math. Ann.* **72** (1912), 228—243.

[121] T. H. Gronwall, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen, *Math. Ann.* **72** (1912), 244—261.

[122] Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, 2e-éd. *Louvain* 1912, t. II.

[123] T. H. Gronwall, Über die Laplacesche Reihe, *Math. Ann.* **74** (1913). 213—270.

[124] G. H. Hardy, On the summability of Fourier's series, *Proc. London Math. Soc.* (2) **12** (1913), 365—372.

[125] G. H. Hardy, A theorem concerning Taylors series, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **44** (1913), 147—160.

[126] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, *C. R. Acad. Sci. Paris* **156** (1913), 1307—1309.

[127] E. Landau, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (Zweite Mitteilung), *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **21** (1913), 250—255.

[128] M. Fekete, Vizsgálatok az absolut summábilis sorokról, alkalmazással a Dirichlet- és Fourier-sorokra, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **32** (1914), 389—425.

[129] T. H. Gronwall, On Lebesgue's constants in the theory of Fourier series, *Ann. of Math.* (2) **15** (1914), 125—128.

[130] F. Lukács, A Laplace-sorról, *Mat. Fiz. Lapok* **23** (1914), 356 - 377.

[131] J. Pál, Sur les transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **158** (1914), 101.

[132] M. Fekete, Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein, *J. Reine Angew. Math.*, **146** (1916), 88 - 94.

[133] M. Fekete, Vizsgálatok a Fourier-sorokról, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **34** (1916), 759—786.

[134] W. H. Young, On the convergence of the derived series of Fourier series, *Proc. London Math. Soc.* (2) **17** (1916), 195—236.

[135] P. Csillag, Korlátos ingadozású függvények Fourier-féle állandóiról, *Mat. Fiz. Lapok* **27** (1918), 301—308.

[136] E. Egerváry, Über die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome, *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **27** (1918), 17—24.

[137] M. Fekete, Ismert első együtthatókkal bíró egyenlet gyökeiről, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **35** (1918), 363—372.

[138] I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Zweite Mitteilung), *J. Reine Angew. Math.* **148** (1918), 122—145.

[139] S. Sidon, A függvény ugrásának meghatározása a függvény Fourier-féle sorából, *Mat. Fiz. Lapok,* **27** (1918), 309—311.

[140] O. Szász, Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, *Math. Z.* **1** (1918), 163—183.

[141] F. Lukács, Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe, *J. Reine Angew. Math.* **150** (1920), 107—112.

[142] L. Neder, Über stetige Funktionen mit überall dicht divergierender Fourierreihe, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **30** (1921), 153—155.

[143] G. Szegő, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen, *Math. Z.* **9** (1921), 163—166.

[144] M. Fekete und J. v. Neumann, Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome, *Jber. Deutsch. Math. Verein* **31** (1922), 125—138.

[145] G. H. Hardy, Mathematics, *Encyclopaedia Britannica,* 11^{th} ed. Vol. XXXI. *London—Cambridge—Chicago—NewYork* 1922, S. 877.

[146] F. Lukács, Über die Laplacesche Reihe, *Math. Z.* **14** (1922), 250—262.

[147] T. Radó, Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete, *Acta Sci. Math. Szeged* **1** (1922/23), 240—251.

[148] M. Riesz, Sur la sommation des séries de Fourier, *Acta Sci. Math. Szeged* **1** (1922/23), 104—113.

[149] T. Carleman, A theorem concerning Fourier series, *Proc. London. Math. Soc.* (2) **21** (1923), 483—492.
[150] E. Hilb und M. Riesz, Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* II. C. 10, *Leipzig*, 1924.
[151] E. Landau, Über einen Fejérschen Satz, *Gött. Nachr.* 1925, 22.
[152] G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, II, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1925, 2^{te} Aufl. 1954.
[153] M. Fekete, Über Interpolation, *Z. Angew. Math. Mech.*, **6** (1926), 410—413.
[154] M. Fekete, The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line, *J. London Math. Soc.* **1** (1926), 15—19.
155] L. Kalmár, Az interpolációról, *Mat. Fiz. Lapok* **33** (1926), 120—149.
[156] S. Sidon, Ein Satz über positive harmonische Polynome, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **35** (1926), 97—99.
[157] O. Perron, Algebra I, II, *Berlin—Leipzig* 1927.
[158] O. Szász, Elementare Extremalprobleme über nichtnegative trigonometrische Polynome, *S.-B. Math. Phys. Bayer. Akad. Wiss.* 1927, 185—196.
[159] G. Szegő, Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen, *Math. Ann.* **96** (1927), 601—632.
[160] M. Biernacki, Sur les équations algébriques contenant des paramètres, (Thèse) *Paris* 1928.
[161] E. Egerváry und O. Szász, Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome, *Math. Z.* **27** (1928), 641—652.
[162] G. Szegő, Zur Theorie der schlichten Abbildungen, *Math. Ann.* **100** (1928), 188—211.
[163] E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2^{te} Aufl., *Berlin* 1929.
[164] G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Z.* **29** (1929), 549—640.
[165] H. Rademacher und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, *Berlin*, 1930, 2^{te} Aufl. 1933.
[166] E. Egerváry, Verschärfung eines Harnackschen Satzes und anderer Abschätzungen für nichtnegative harmonische Polynome, *Math. Z.* **34** (1932), 741—757.
[167] M. Fekete, Sur les changements de signe d'une fonctions dans l'intervalle $(0, \infty)$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194** (1932), 1208—1211.
[168] L. Koschmieder, Vorzeicheneigenschaften der Abschnitte einiger physikalisch bedeutsamer Reihen, *Mh. Math. Physik* **39** (1932), 321—344.
[169] G. Szegő, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören, *Math. Z.* **35** (1932), 579—602.
[170] J. Szőkefalvi-Nagy, Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimal- und Extremalpolynome, *Acta Sci. Math. Szeged* **6** (1932), 49—58.
[171] J. Szőkefalvi-Nagy, Bizonyos minimumpolinomok zéróhelyeinek négyzetéről, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* **49** (1932), 1—15.
[172] G. Pólya, Über die Konvergenz von Quadraturverfahren, *Math. Z.* **37** (1933), 264—286.
[173] J. Shohat, On interpolation, *Ann. of Math.* (2) **34** (1933), 130—146.
[174] G. Szegő, Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome, *Schr. Königsberg. Gel. Ges.* **10** (1933), 48, 102—108.
[175] J. Szőkefalvi-Nagy, Über einen Satz von Laguerre, *J. Reine Angew. Math.* **169** (1933), 186—192.
[176] H. Bohr, Über einen Satz von J. Pál, *Acta Sci. Math. Szeged* **7** (1934/35), 129—135.
[177] P. Szász, A differenciál- és integrálszámítás elemei I, II, *Budapest*, 1935, 2. kiad. 1951.

[178] J. L. WALSH, Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* 20, New York, 1935.
[179] A. ZYGMUND, Trigonometric series, *Warszawa—Lwów,* 1935, 2^d edition Vols. I, II, *Cambridge,* 1959.
[180] G. SZEGŐ, Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related fonctions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **39** (1936), 1—17.
[181] P. VERESS, A középérték fogalmáról. *Mat. Fiz. Lapok,* **43** (1936), 46—60.
[182] J. EGERVÁRY, Abbildungseigenschaften der arithmetischen Mittel der geometrischen Reihe, *Math. Z.* **42** (1937), 221—230.
[183] P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation I, Quadrature- and mean-convergence in the Lagrange interpolation, *Ann. of Math.* **38** (1937), 142—155.
[184] P. TURÁN, Über die Partialsummen der Fourierreihe, *J. London Math. Soc.* **13** (1938), 278—282.
[185] G. SZEGŐ, Orthogonal polynomials, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* 23, New York, 1939, 2^d edition 1959.
[186] A. ZYGMUND, Sur un théorème de M. Fejér, *Bull. Sém. Mat. Univ. Wilno* **2** (1939), 3—12.
[187] P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation III, Interpolatory theory of polynomials, *Ann. of Math.* **41** (1940), 510—533.
[188] G. GRÜNWALD, Az Hermite-féle interpolációról, *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941), 272—284.
[189] G. GRÜNWALD, On the theory of interpolation, *Acta Math.* **75** (1943), 219—245.
[190] G. H. HARDY and W. W. ROGOSINSKI, Fourier series, *Cambridge* 1944, 2^d edition 1949, 3^d edition 1956.
[191] R. P. BOAS and M. KAC, Inequalities for Fourier transforms of positive functions, *Duke Math. J.* **12** (1945), 189—206.
[192] N. I. ACHYESER, Vorlesungen über Approximationstheorie (Russ.), *Moskau—Leningrad,* 1947.
[193] N. N. LUSIN, On the localization of the principle of finite area (Russ.), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **56** (1947), 447—450.
[194] J. ACZÉL, Un problème de M. L. Fejér sur la construction de Leibniz, *Bull. Sci. Math.* (2) **72** (1948), 35—45.
[195] R. P. BOAS, More inequalities for Fourier transforms, *Duke Math. J.* **15** (1948), 105—109.
[196] J. HORVÁTH, Note sur un problème de L. Fejér, *Bull. École. Polytech. Jassy,* **3** (1948), 164—168.
[197] I. P. NATANSON, Konstruktive Funktionentheorie (Russ.), *Moskau—Leningrad,* 1949.
[198] J. SZŐKEFALVI-NAGY, Zur Nullstellenverteilung von Extremalpolynomen, *Duke Math. J.* **16** (1949), 575—577.
[199] J. EGERVÁRY, On the mapping of the unit-circle by polynomials, *Acta Sci. Math. Szeged* **12** (1950), 226—230.
[200] P. TURÁN, Fejér Lipót matematikai munkássága, *Mat. Lapok* **1** (1950), 160—169.
[201] M. FEKETE, On the structure of extremal polynomials, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **37** (1951), 95—103.
[202] P. TURÁN, On a trigonometrical sum, *Ann. Soc. Polon. Math.* **25** (1952), 155—161.
[203] M. FEKETE und J. L. WALSH, On the asymptotic behavior of polynomials with extremal properties, and of their zeros, *J. Analyse Math.* **4** (1955), 49—87.
[204] M. FEKETE and J. L. WALSH, On restricted infrapolynomials, *J. Analyse Math.* **5** (1956/57), 47—76.

[205] M. Fekete and J. L. Walsh, Asymptotic behavior of restricted extremal polynomials and of their zeros, *Pacific J. Math.* **7** (1957), 1037—1064.

[206] E. Egerváry and P. Turán, Notes on interpolation V (On the stability of interpolation), *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **9** (1958), 259—267.

[207] P. Szász, On quasi-Hermite—Fejér interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **10** (1959), 413—439.

[208] P. Szász, Fejér Lipót, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **10** (1960), 103—147.

[209] G. Szegő, Leopold Fejér: In memoriam, 1880—1959, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1960), 346—352.

[210] P. Turán, Fejér Lipót (1880. február 9—1959. október 15), *Mat. Lapok* **11** (1960), 8—18.

Discussion of the geometry of affinely connected spaces by direct method

By M. FARKAS (Budapest)

§ 1. Introduction

We call direct tensor calculus the method grounded on the geometrical definition and properties of tensors, which does not use coordinates in demonstrating the theorems and properties independent of the system of coordinates. The most consistent cultivators of this method, mostly Italian mathematicians, called this method absolute. The method was applied to discussion of n-dimensional euclidean and Riemannian spaces first by BURALI-FORTI and BOGGIO (see [1], [2]). They discussed by this method Riemannian spaces embedded into greater dimensional euclidean spaces, and in their treatment the embedding euclidean space was thoroughly employed.

In the years of 1920—1930 there was a debate about the question of methods in differential geometry. From that time on the direct method was scarcely employed in the investigations of differential geometrical spaces. However, the direct method has its role, and significance beside the other important methods of differential geometry. It makes superfluous the introduction of coordinates in investigations and demonstrations of properties independent of the system of coordinates. Hence, it makes superfluous investigations connected with invariance, covariance, etc. At the same time it gives a deeper insight into the geometrical essence of the theorems and makes possible the demonstration, and the underlining of essential features, which are hidden behind the formulae of the Ricci calculus.

This paper contains the setting up of the geometry of affinely connected spaces by direct method, without introducing coordinates. The spaces are not embedded into greater dimensional affine spaces. The affine space, on which our affinely connected space is mapped, plays an important part. For instance, vectors are defined by means of that affine space. In the definition of the affinely connected space we make use of the concept of parallel displacement due to LEVI-CIVITA. We may say briefly that we attain the affinely connected