

Eine axiomatische Theorie der kubischen Determinanten.

Dem Andenken von Tibor Szele gewidmet.

Von JULIUS GÁSPÁR in Miskolc.

Der Begriff der Determinante wurde schon von CAYLEY [1] auf die kubischen Matrizen verallgemeinert, aber die erste ausführliche Behandlung rührt von A. DE GASPARIS [2] her und neuerdings gab L. H. RICE [3] eine allgemeine Theorie der Determinanten von höherer Dimension.

In dieser Abhandlung wollen wir eine axiomatische Theorie der kubischen Determinanten geben. Diese ist gewissermaßen der axiomatischen Theorie ähnlich, die wir in [4] für gewöhnliche Determinanten gegeben haben.

Es sei $\mathfrak{R} = a, b, \dots$ ein Integritätsbereich der Charakteristik 0. Unter einer kubischen Matrix der Ordnung n (über \mathfrak{R}) wollen wir eine Menge der Elemente $a_{ikl} \in \mathfrak{R}$, ($i, k, l = 1, 2, \dots, n$) verstehen und abgekürzt mit $A^{(3)}$ oder (a_{ikl}) bezeichnen. Der Index i soll erster, k zweiter, l dritter Index des Elementes a_{ikl} genannt werden. Eine solche kubische Matrix hat nach dem ersten Index (n. d. e. I.) n „Flächen“. Dasselbe gilt auch für die weiteren zwei Indizes. Diese „Flächen“ sind gewöhnliche Matrizen der Ordnung n . Z. B. die Matrix (a_{ikl}) hat n. d. e. I. die Flächen

$$(a_{1kl}), (a_{2kl}), \dots, (a_{nkl}).$$

Die Matrix (a_{ikl}) kann in diesem Fall auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$((a_{1kl}), (a_{2kl}), \dots, (a_{nkl})).$$

Wenn die Matrix $A^{(3)}$ in jeder Fläche nach irgendeinem Index höchstens ein nicht verschwindendes Element hat, so schreiben wir nur diese — je nach Flächen durch senkrechte Linien getrennt. — Z. B. bezeichnet $(a_{111} | a_{222} | \dots | a_{nnn})$ eine kubische Diagonalmatrix.

Wir definieren die Gleichheit, bzw. die Summe zweier kubischen Matrizen $A^{(3)} = (a_{ikl})$ und $B^{(3)} = (b_{ikl})$ folgenderweise:

$$(1) \quad A^{(3)} = B^{(3)}, \text{ wenn } a_{ikl} = b_{ikl}, \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n),$$

bzw.

$$(2) \quad A^{(3)} + B^{(3)} = (a_{ikl} + b_{ikl})$$

gilt.

Die gewöhnlichen Matrizen der Ordnung n (über \mathfrak{R}) können wir als linksseitige Operatoren entsprechend der Gleichung

$$(3_1) \quad (m_{rs})(a_{ikl}) = \left(\sum_{\mu} m_{r\mu} a_{\mu kl} \right)$$

und als rechtsseitige Operatoren entsprechend der Gleichung

$$(3_2) \quad (a_{ikl})(m_{rs}) = \left(\sum_{\nu} a_{ik\nu} m_{\nu s} \right)$$

anwenden. — Anstatt dieser Gleichungen können wir auch:

$$(3_1') \quad (m_{rs})(a_{ikl}) = \left(\sum_{\mu} m_{r\mu} a_{i\mu l} \right), \quad \text{bzw.}$$

$$(3_2') \quad (a_{ikl})(m_{rs}) = \left(\sum_{\nu} a_{\nu kl} m_{\nu s} \right);$$

oder:

$$(3_1'') \quad (m_{rs})(a_{ikl}) = \left(\sum_{\mu} m_{r\mu} a_{ik\mu} \right), \quad \text{bzw.}$$

$$(3_2'') \quad (a_{ikl})(m_{rs}) = \left(\sum_{\nu} a_{i\nu l} m_{\nu s} \right)$$

nehmen.

Also kann man die gewöhnlichen Matrizen auf drei verschiedene Weisen als zweiseitige Operatoren der kubischen Matrizen definieren.

Deshalb ist die Menge $\mathfrak{R}_n^{(3)}$ der kubischen Matrizen der Ordnung n (über \mathfrak{R}) ein Modulus mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_n^{(2)}$ der gewöhnlichen Matrizen der Ordnung n (über \mathfrak{R}).

Unter den „Flächenkombinationen“ von $A^{(3)}$ und $B^{(3)}$ nach dem ersten Index (n. d. e. I.) verstehen wir alle Matrizen $C^{(3)}$, für deren j -te Fläche n. d. e. I. entweder die j -te Fläche n. d. e. I. von $A^{(3)}$ oder die von $B^{(3)}$ genommen wird ($j=1, 2, \dots, n$).

Die Flächenkombinationen nach dem zweiten, bzw. nach dem dritten Index werden auf analoge Weise definiert.

Eine kubische Determinante (n. d. e. I.) $\Phi^{(1)}$ heißt die Summe von $(n!)^2$ Gliedern $(-1)^{\varepsilon} a_{1k_1 l_1} a_{2k_2 l_2} \cdots a_{nk_n l_n}$, falls k_1, k_2, \dots, k_n und l_1, l_2, \dots, l_n jede Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n$ durchläuft und ε die Summe der Inversionen in den zwei Anordnungen k_1, k_2, \dots, k_n und l_1, l_2, \dots, l_n ist. — Anstatt die ersten Indices in der natürlichen Reihenfolge geordnet anzunehmen und die zweiten und dritten Indices zu permutieren, kann man auch die zweiten (bzw. die dritten) Indices natürlich geordnet denken, die ersten und dritten (bzw. die ersten und zweiten) Indices permutieren und nach ihnen die Vorzeichenbestimmung vornehmen. Dann erhält man eine kubische Determinante (n. d. z. I.) $\Phi^{(2)}$ (bzw. (n. d. d. I.) $\Phi^{(3)}$).

Satz. Ist Φ eine Abbildung von $\mathfrak{R}_n^{(3)}$ in \mathfrak{R} , für welche die Axiome

$$(a) \quad \Phi(A^{(3)} + B^{(3)}) = \sum \Phi(C^{(3)});$$

$$(b) \quad \Phi(M^{(2)}A^{(3)}) = |M^{(2)}| \cdot \Phi(A^{(3)}), \\ \Phi(A^{(3)}M^{(2)}) = \Phi(A^{(3)}) \cdot |M^{(2)}|;$$

$$(c) \quad \Phi(E^{(3)}) = 1$$

gültig sind, wobei in (a) über alle Flächenkombinationen nach dem ersten oder nach dem zweiten oder nach dem dritten Index zu summieren ist, und bedeutet in (b) $M^{(2)}$ eine gewöhnliche Matrix der Ordnung n (über \mathfrak{R}), $|M^{(2)}|$ aber seine (gewöhnliche) Determinante und $M^{(2)}A^{(3)}$ bzw. $A^{(3)}M^{(2)}$ nach (3_l) bzw. (3_r) gebildet werden, bezeichnet schließlich in (c) $E^{(3)} = (e_{ikl})$ eine kubische Matrix der Ordnung n , in der $e_{111} = e_{222} = \dots = e_{nnn} = 1$ und alle anderen Elemente Null sind, so ist $\Phi(A^{(3)})$ eine kubische Determinante nach dem zweiten Index. — Für die zwei anderen Fälle gelten ähnliche Sätze.

Den Beweis des Satzes arbeiten wir der besseren Übersichtlichkeit halber nur für $n = 3$ aus

Zunächst beweisen wir die folgende Behauptung:

(α) Es ist $\Phi(A^{(3)}) = 0$, wenn die Matrix $A^{(3)}$ eine Fläche nach irgend einem Index hat, in welcher alle Elemente verschwinden.

Es genügt dies z. B. für den Fall einer verschwindenden Fläche nach dem zweiten Index zu beweisen. Ist sogar $A^{(3)} = 0^{(3)}$, wo $0^{(3)}$ die kubische Nullmatrix bezeichnet, so folgt (α) aus (b) mit $M^{(2)} = 0^{(2)}$, wo $0^{(2)}$ die gew. Nullmatrix bezeichnet. Für den allgemeinen Fall wenden wir (a) auf $A^{(3)} = ((a_{i1l}), (a_{i2l}), (a_{i3l}))$ mit den Flächen n. d. z. I. $(a_{i1l}), (a_{i2l}), (a_{i3l})$ und $B^{(3)} = 0^{(3)}$ an:

$$\Phi(A^{(3)}) = \Phi(A^{(3)}) + \Phi((a_{i1l}), (a_{i2l}), 0^{(2)}) + \Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, (a_{i3l})) + \\ + \Phi(0^{(2)}, (a_{i2l}), (a_{i3l})) + \Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, 0^{(2)}) + \\ + \Phi(0^{(2)}, (a_{i2l}), 0^{(2)}) + \Phi(0^{(2)}, 0^{(2)}, (a_{i3l})) + \Phi(0^{(3)}),$$

d. h.

$$\Phi((a_{i1l}), (a_{i2l}), 0^{(2)}) + \Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, (a_{i3l})) + \Phi(0^{(2)}, (a_{i2l}), (a_{i3l})) + \\ + \Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, 0^{(2)}) + \Phi(0^{(2)}, (a_{i2l}), 0^{(2)}) + \Phi(0^{(2)}, 0^{(2)}, (a_{i3l})) = 0.$$

Man setze hier $(a_{i2l}) = (a_{i3l}) = 0^{(2)}$ ein, wodurch wir $3\Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, 0^{(2)}) = 0$ d. h. $\Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, 0^{(2)}) = 0$ erhalten. Ähnlich ergeben sich $\Phi(0^{(2)}, (a_{i2l}), 0^{(2)}) = 0$, $\Phi(0^{(2)}, 0^{(2)}, (a_{i3l})) = 0$. Hiernach erhalten wir:

$$\Phi((a_{i1l}), (a_{i2l}), 0^{(2)}) + \Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, (a_{i3l})) + \Phi(0^{(2)}, (a_{i2l}), (a_{i3l})) = 0.$$

Hieraus folgt für $(a_{i3l}) = 0^{(2)}$ $\Phi((a_{i1l}), (a_{i2l}), 0^{(2)}) = 0$. Ähnlich gewinnen wir $\Phi((a_{i1l}), 0^{(2)}, (a_{i3l})) = 0$, $\Phi(0^{(2)}, (a_{i2l}), (a_{i3l})) = 0$, wodurch (α) bewiesen ist.

Nun soll folgende Formel bewiesen werden:

$$(\beta) \quad \Phi(A^{(3)}) = \sum \Phi(Q^{(3)}),$$

wo $Q^{(3)}$ eine kubische Matrix bezeichnet, die auf jeder Fläche nach jedem Index höchstens ein nicht verschwindendes Element besitzt und dieses ist eben das entsprechende Element von $A^{(3)}$. In der Summe an der rechten Seite von (β) figurieren alle diese $3!^2$ Matrizen $Q^{(3)}$.

Um unser Ziel zu erreichen wenden wir (a) mit den Matrizen

$$A_{111}^{(3)} = \left(\left(\begin{array}{ccc} 0 & a_{112} & a_{113} \\ a_{211} & a_{212} & a_{213} \\ a_{311} & a_{312} & a_{313} \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} a_{131} & a_{132} & a_{133} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} \end{array} \right) \right),$$

$$B^{(3)} = (a_{111} | 0 | 0)$$

an. Auf Grund von (a) gilt:

$$\Phi(A^{(3)}) = \Phi(A_{111}^{(3)} + B^{(3)}) = \Phi(A_{111}^{(3)}) +$$

$$+ \Phi \left(\left(\begin{array}{ccc} a_{111} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} a_{131} & a_{132} & a_{133} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} \end{array} \right) \right).$$

Hier wurde das Element a_{111} ausgezeichnet, offenbar gelten aber weitere 26 ähnliche Formeln, die man je durch Auszeichnung der Elemente a_{112}, \dots, a_{333} erhält. Werden diese rechts wiederholt angewendet, so erhalten wir schließlich auf der rechten Seite nur Matrizen, die in jeder Fläche nach jedem Index höchstens ein nicht verschwindendes Element enthalten. Somit ergibt sich durch Berücksichtigung von (a) unsere Behauptung (β) .

Wir bezeichnen nun mit $P_{i_1 i_2 i_3}^{(2)}$ diejenige Matrix $(m_{rs}^{(i)})$, in der $m_{i_1 i_1}^{(i)} = m_{i_2 i_2}^{(i)} = m_{i_3 i_3}^{(i)} = 1$ und die übrigen $m_{rs}^{(i)}$ gleich 0 sind, und mit $\bar{P}_{i_1 i_2 i_3}^{(2)}$ diejenige Matrix $(m_{rs}^{(i)})$, in der $m_{i_1 1}^{(i)} = m_{i_2 2}^{(i)} = m_{i_3 3}^{(i)} = 1$ und die übrigen $m_{rs}^{(i)}$ gleich 0 sind, wo i_1, i_2, i_3 und l_1, l_2, l_3 Permutationen von 1, 2, 3 bedeuten. So kann

$$(4) \quad Q^{(3)} = P_{i_1 i_2 i_3}^{(2)} D^{(3)} \bar{P}_{i_1 i_2 i_3}^{(2)}$$

geschrieben werden, wo $D^{(3)}$ eine kubische Diagonalmatrix ist. Ist nämlich $Q^{(3)} = (a_{i_1 l_1} | a_{i_2 l_2} | a_{i_3 l_3})$, so ist

$$D^{(3)} = (d_{111} | d_{222} | d_{333}) \text{ mit } d_{111} = a_{i_1 l_1}, d_{222} = a_{i_2 l_2}, d_{333} = a_{i_3 l_3}.$$

Also ergibt sich nach (b)

$$(5) \quad \Phi(Q^{(3)}) = |P_{i_1 i_2 i_3}^{(2)}| \cdot \Phi(D^{(3)}) \cdot |\bar{P}_{i_1 i_2 i_3}^{(2)}|.$$

Wenn wir noch beachten, daß

$$(6) \quad D^{(3)} = D^{(2)} E^{(3)}$$

gilt, wobei $D^{(2)} = (d_{11}, d_{22}, d_{33})$ eine gewöhnliche Diagonalmatrix mit $d_{ii} = d_{iii}$, ($i=1, 2, 3$) ist, so folgt auf Grund von (c)

$$(7) \quad \Phi(D^{(3)}) = |D^{(2)}| = d_{11} d_{22} d_{33} = a_{i_1 l_1} a_{i_2 l_2} a_{i_3 l_3}.$$

Da für $A^{(3)} = (a_{ikl})$ auf Grund von (β)

$$\Phi(A^{(3)}) = \sum_{i_1, i_2, i_3; l_1, l_2, l_3} \Phi(P_{i_1 i_2 i_3}^{(2)} D^{(3)} \bar{P}_{i_1 i_2 i_3}^{(2)})$$

gilt, wobei über alle Permutationen i_1, i_2, i_3 , bzw. l_1, l_2, l_3 von 1, 2, 3 zu summieren ist, so folgt aus (b), (5), (7) unser Satz.

Auf Grund des bewiesenen Satzes sind die kubischen Determinanten durch (a), (b), (c) charakterisiert.

Wir bemerken noch, daß sich unser Satz auf p -dimensionale Determinanten verallgemeinern läßt. Zu diesem Zwecke muß man nur die Operatorendefinitionen in geeigneter Weise modifizieren.

Literatur.

- [1] A. CAYLEY, Collected mathematical papers, Vol. I., Cambridge, 1889. 75—79.
- [2] A. DE GASPARIS, Sopra due teoremi dei determinante a tre indice ed un'altra maniera di formazione degli elementi di un determinante ad m indice, *Rend. di Napoli* 7 (1861), 118—121.
- [3] L. H. RICE, Introduction to higher determinants, *J. Math. Physics Mass.* 9 (1929-30), 47—71.
- [4] J. GÁSPÁR, Eine neue Definition der Determinanten, *Publ. Math. Debrecen* 3 (1954), 257—260.

(Eingegangen am 15. September, 1954.)