Sur la répartition des nombres sans diviseur quadratique.

Dédié à la memoire de Tibor Szele, mon ami, l'excellent mathématicien.

Par RICHARD OBLÁTH in Budapest.

Das une publication antérieure[1]) j'ai démontré le fait que pour x assez grand le nombre des nombres premiers qui sont contenus dans les intervalles de longueur égale à x

$$(1) \qquad \langle 1, \ldots, x \rangle, \langle x, \ldots, 2x \rangle, \ldots, \langle (n-1)x, \ldots, nx \rangle$$

décroît de manière monotone, si l'on a

$$n < \log^m x$$

où m désigne un nombre naturel quelconque.

Ce théorème ne se laisse pas étendre aux nombres sans diviseur quadratique car leur répartition est uniforme dans les intervalles égaux. Il subsiste à savoir le

Théorème 1. *Si x est assez grand et*

$$(2, \mathrm{a}) \qquad n = O(x),$$

la densité des nombres sans diviseur quadratique dans chacun des intervalles (1) *de la longueur x est asymptotiquement uniforme et elle est égale à* $\frac{6}{\pi^2} x$.

La *démonstration* est extrèmement simple. On sait que, pour x assez grand, le nombre $Q(x)$ des nombres sans diviseur quadratique et $< x$ est donné par la formule classique de GEGENBAUER

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x})$$

qui a été améliorée par E. LANDAU[2])

$$(3, \mathrm{a}) \qquad Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + o(\sqrt{x}).$$

[1]) R. OBLÁTH, Egymásra következő számközök primszámairól, *Mat. Fiz. Lapok* **41** (1934), 41—45., et Über Primzahlen in aufeinander folgenden Intervallen, *Ann. Mat. Pura Applicita*, Ser. 4., **14** (1935/6) 299—303.

[2]) E. LANDAU, Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie, *S. B. Kais. Akad. Wiss. in Wien*, Math-Natw. Kl. **115**, Abt. 2a, (1906), 589-632, et *Handbuch von der Lehre der Verteilung der Primzahlen* II., *Leipzig* 1909, 606—609, § 162.

En appliquant cette fórmule on a

$$Q(mx)-Q((m-1)x)=\frac{6}{\pi^2}x+o\,(\sqrt{mx})$$

et si l'on suppose

(4) $$m \leqq n$$

on obtient de (2, a)

$$o(\sqrt{m}x)=o(x)$$

et par conséquent

$$Q(mx)-Q((m-1)x)=\frac{6}{\pi^2}x+o(x)$$

c.-à-d. le terme principal est prépondérant sur le terme de correction et il est indépendent de m et linéaire en x, ce qui démontre notre proposition.

On peut même essentiellement augmenter le nombre des intervalles pour lesquels notre théorème reste valabe, mais seulement en supposant la célèbre hypothèse de RIEMANN sur les racines de la fonctionn $\zeta(s)$. Nous démontrons à savoir le.

Théorème 2. *Si x est assez grand et μ désigne un nombre positif arbitrairement petit mais fixé, la densité des nombres sans diviseur quadratiqe dans chacun des intervalles (1) de la longueur x est asymptotiquement uniforrme sous la supposition de l'hypothèse de* RIEMANN, *si l'on a*

(2, b) $$n=O\left(x^{\frac{3}{2}-\mu}\right).$$

La démonstration est basée sur la formule[3])

(3, b) $$Q(x)=\frac{6}{\pi^2}x+O\left(x^{\frac{2}{5}+\varepsilon}\right)$$

où $\varepsilon>0$ peut devenir arbitrairement petit. Cette formule est plus précise que celles de GEGENBAUER ou LANDAU, elle n'est d'ailleurs démontrée qu'en supposant l'hypothèse de RIEMANN.

La démonstration du théorème 2 est tout à fait analogue à celle du théorème 1, il suffit alors de déterminer le résidu. C'est

$$O\left((mx)^{\frac{2}{5}+\varepsilon}\right)O\left(\left(x^{\frac{5}{2}-\mu}\right)^{\frac{2}{5}+\varepsilon}\right)=O\left(x^{1-\frac{2\mu}{5}+c\varepsilon}\right)=o(x)$$

---

[3]) Quoiqu' elle est bien connue, je ne suis pas en état d'indiquer où elle était publiée. Je la connais d'une lettre de M. le professeur S. CHOWLA écrite en novembre 1934, dans laquelle il me communique que lui et M. WALFISZ l'ont démontré. C'est également M. S. CHOWLA qui a attiré l'attention des MM. PAUL ERDŐS et PAUL TURÁN sur la formule (3, b) surtout sur le terme de correction. ERDŐS et TURÁN ont également démontré la formule sans réussir à réduire l'ordre de grandeur du résidu.

parce que par hypothèse μ est fixé et l'on peut choisir ε suffisamment petit. On a donc

$$Q(mx)-Q((m-1)x)=\frac{6}{\pi^2}x+o(x)$$

si la condition (2, b) est remplie, c. q. f. d.

La distribution uniforme reste aussi conservée pour des nombres qui ne contiennent pas des k-ièmes puissances comme facteurs („k-freie Zahlen", „k-free numbers"). Nous les appelons brièvement „*nombres sans k-diviseurs*".

Théorème 3. *Pour x assez grand et*

$$n=O(x^{k-1}), \tag{2, c}$$

la densité des nombres sans k-diviseurs est uniforme dans chaque intervalle de la suite (1) *de la longueur x.*

Désignons le nombre des nombres sans k-diviseurs $< x$ par $Q_k(x)$. FOGELS[4]) a communiqué la formule

$$Q_k(x)=\frac{x}{\zeta(k)}+o(x)$$

valable pour x assez grand, qui a été démontrée par M. A. RÉNYI aussi avec un résidu plus précis. $\zeta(k)$ est la fonction connue de RIEMANN. Mais leur précède M. SIGMUND SELBERG[5]) qui a obtenu l'évaluation beaucoup plus précise

$$Q_k(x)=\frac{x}{\zeta(k)}+o\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \tag{3, c}$$

qui est améliorée par M. P. TURÁN à

$$Q_k(x)=\frac{x}{\zeta(k)}+O\left(x^{\frac{1}{k}}e^{-\sqrt{\log x}}\right).$$

Pour démontrer le théorème 3, il suffit la formule (3, c). En se servant de la formule due à P. TURÁN on arriverait à une plus longue suite d'intervalles. La démonstration en est complètement analogue à celle du théorème 1, il est donc superflu d'entrer en détails.

M. SIGMUND SELBERG s'est occupé en deux travaux encore[6]) avec des nombres sans diviseur quadratique. On pourrait aussi obtenir notre théorème 1

---

[4]) E. FOGELS, On average values of arithmetic functions, *Proc. Cambridge Phils. Soc.* **37** (1941), 358—372. Ce travail m'était inaccessible, je ne le connais que des rapports dans le *Zentrclblatt f. Math.* **28** (1943), p. 110 et dans la *Math. Rev.* **3** (1942) p. 69.

[5]) SIGMUND SELBERG, Einige zahlentheoretische Funktionen, *Arch. Math. Naturvid,* B. XLII Nr. 2, *Oslo* 1938, 13 pages, surtout p. 2.

[6]) SIGMUND SELBERG, Zur Theorie der quadratfreien Zahlen, *Math. Z.* **44** (1938), 306—318 et Über die zahlentheoretische Funktion $\pi_n(x)$, *Norske Vid. Selsk. Forh.* **13** (1940) 30—33.

par sa méthode, mais d'une façon moins simple. K. F. ROTH[7]) a évalué la distance de deux nombres consécutifs sans diviseur quadratique par

$$o\left(x^{\frac{1}{4}}\right),$$

ce qui est essentiellement améliorée par M. P. TURÁN. H. HALBERSTAM et K. F, ROTH[8]) ont étendu le résultat précité pour les nombres sans diviseur quadratique aux nombres sans k-diviseurs, ils ont évalué la distance de deux nombres consécutifs sans k-diviseurs par

$$O\left(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right).$$

L'essence de leur méthode consiste de trouver des expressions pour

$$Q(x+h)-Q(x)$$

et pour

$$Q_k(x+h)-Q_k(x)$$

et d'employer quelques artifices pour les évaluer. On voit que nous pourrions aussi suivre leur méthode pour démontrer nos propositions, ce serait cependant beaucoup plus compliqué que la démonstration exposée.

Tous nos résultats restent valables aussi pour les nombres sans diviseur quadratique (et pour les nombres sans k-diviseurs) de la progression aritmétique dont le terme initial et la difference sont premiers entre eux.

(Reçu le 20 novembre 1954)

---

[7]) K. F. ROTH, On the gaps between squarefree numbers, *J. London Math. Soc.* **26** (1951), 263—268.

[8]) H. HALBERSTAM and K. F. ROTH, On the gaps between consecutive k-free integers, *J. London Math. Soc.* **26** (1951), 268—273.