Eine nichtdesarguessche Ebene mit einem Körper als Koordinatenbereich.

Dem Andenken von Professor T. Szele gewidmet.

Von GÜNTER PICKERT in Tübingen.

In einer beliebigen affinen Ebene kann man bekanntlich[1]) folgendermaßen Koordinaten einführen. Man wählt zwei Punkte O, E sowie zwei Geraden α, β durch O, die nicht durch E gehen, und ordnet dann jedem Punkt P als Koordinatenpaar ein Paar (x_P, y_P) von Punkten auf β so zu, daß[2]) $y_P = P$ im Falle $P \in \beta$, $x_P = x_Q$ im Falle $PQ \| \beta$, $y_P = y_Q$ im Falle $PQ \| \alpha$ und $x_P = y_P$ im Falle $P \in OE$ gilt. Im Bereich der Koordinaten werden nun eine *Addition* und eine *Multiplikation* so eingeführt, daß P genau dann auf der Parallelen zu OE durch $v (\in \beta)$ liegt, wenn $y_P = x_P + v$ gilt, und genau dann auf OU mit $x_U = 1$, $y_U = u$, wenn $y_P = u x_P$ gilt. Bekanntlich ist die Ebene genau dann *desarguessch*, wenn

1. *der Koordinatenbereich bezüglich Addition und Multiplikation ein Schiefkörper ist und*

2. *jede nicht zu β parallele Gerade durch eine Gleichung der Form $y = ux + v$ gekennzeichnet wird.*

Es taucht nun die Frage auf, ob dabei auf die Bedingung 2 verzichtet werden kann. Daß man diese Frage verneinen muß, lehrt das im folgenden gebildete *Beispiel einer nichtdesarguesschen affinen Ebene, welche die Bedingung* 1 *erfüllt* und zwar sogar mit der Verschärfung, daß es sich bei dem Koordinatenbereich um einen angeordneten Körper handelt, in dem jedes positive Element Quadrat ist.

Um zu einem gegebenen Schiefkörper $\mathfrak{K}$ alle affinen Ebenen — bis auf Isomorphie — zu erhalten, welche einen zu $\mathfrak{K}$ bezügl. Multiplikation und Addition isomorphen Koordinatenbereich besitzen, kann man folgendermaßen vorgehen[1]): Als Punkte werden die Paare (x, y) mit $x, y \in \mathfrak{K}$ genommen und

[1]) Näheres findet man z. B. in: G. PICKERT, Projektive Ebenen, *Heidelberg*, 1955.

[2]) Im folgenden bezeichnet $X \in \xi$ die Inzidenz des Punktes X und der Geraden ξ, $\xi \| \eta$ die Parallelität der Geraden ξ, η (dh. ξ, η sind entweder gleich oder haben keinen Punkt gemeinsam) und XY die Verbindungsgerade der (verschiedenen) Punkte X, Y.

gewisse Punktmengen als Geraden eingeführt, so daß mit der Enthaltensein-Beziehung als Inzidenzrelation eine affine Ebene entsteht; unter den Geraden läßt man dabei für jedes $c \in \mathfrak{K}$ die Menge der (c, y), die Menge der (x, c), die Menge der $(x, x+c)$ sowie die Menge der (x, cx) vorkommen. Setzt man $O = (0, 0)$ und nimmt für α die Menge der $(x, 0)$ sowie für β die Menge der $(0, y)$, so hat der Punkt (x, y) die Koordinaten $(0, x)$, $(0, y)$, und $x \rightarrow (0, x)$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{K}$ auf den Koordinatenbereich. Ist die so erhaltene affine Ebene desarguessch, so wird jede nicht zu β parallele Gerade durch eine Gleichung $y = ux + v$ gekennzeichnet. Zur Gewinnung einer nichtdesarguesschen Ebene braucht man also lediglich die Geraden so einzuführen, daß dies nicht zutrifft.

Es sei jetzt $\mathfrak{K}$ insbesondere ein *angeordneter Körper, in dem jedes positive Element ein Quadrat ist.* Wie ich nun in Ausführung des eben Angedeuteten eine nichtdesarguessche Ebene erhalten kann, läßt sich mit dem bereits beim MOULTONschen Beispiel[3]) verwandten Verfahren leicht erkennen: Diejenigen Geraden $y = ux + v$ der desarguesschen Ebene über $\mathfrak{K}$, für welche $u > 1$ und $v > 0$ ist, werden beim Übergang von $x < 0$ zu $x > 0$ gebrochen und zwar um so stärker, je größer $(u-1)v$ ist; beim Übergang von $x < 1$ zu $x > 1$ wird diese Brechung wieder rückgängig gemacht, also die alte Richtung der Geraden wieder hergestellt. Ich komme auf diese Weise dazu, als Geraden der zu bildenden Ebene die folgenden Mengen zu bezeichnen:

I. *Zu jedem* $c \in \mathfrak{K}$ *die Menge aller* (c, y).

II. *Zu jedem Paar* $u, v \in \mathfrak{K}$ *mit* $u \leqq 1$ *oder* $v \leqq 0$ *die Menge aller* $(x, ux+v)$.

III. *Zu jedem Paar* $u, v \in \mathfrak{K}$ *mit* $u > 1$ *und* $v > 0$ *die Menge aller* $(x, ux+v)$ *mit* $x \leqq 0$, *aller* $(x, (u+(u-1)v)x+v)$ *mit* $0 < x < 1$ *und aller* $(x, ux+uv)$ *mit* $1 \leqq x$.

Nach dem im vorigen Abschnitt Bemerkten brauche ich jetzt nur noch nachzuweisen, daß so wirklich eine affine Ebene entsteht, also die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) *Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche die beiden Punkte enthält.*

(2) *Durch einen Punkt P geht genau eine Gerade, welche mit der nicht durch P gehenden Geraden* γ *keinen Punkt gemeinsam that.*

Zum Nachweis von (1) darf ich mich offenbar auf den Fall zweier Punkte (a, b), (c, d) mit $a \neq c$ beschränken. Eine Gerade der Art I hat mit

---

[3]) F. R. MOULTON, A simple non-desarguesian plane geometry, *Trans. Amer. Math Soc.* **3** (1902), 192—195; vgl. auch D. HILBERT, Grunglagen der Geometrie, 7. Aufl. *Berlin* 1930. Das MOULTONsche Verfahren wurde bereits in der folgenden Arbeit in einer über den ursprünglichen Ansatz hinausgehenden Weise verwandt: H. NAUMANN, Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie, *Math. Z.* **60** (1954), 120—141.

jeder Geraden der Art II oder III genau einen Punkt gemeinsam. Durch $(a, b) \in \xi$, $(c, y) \in \xi$ wird daher eine Abbildung $\xi \to y$ der Menge aller Geraden der Arten II, III durch (a, b) in $\mathfrak{K}$ erklärt, und ich habe lediglich noch zu zeigen, daß es sich dabei um eine umkehrbare Abbildung *auf* $\mathfrak{K}$ handelt. Im Falle $a, c \leqq 0$ oder $a, c \geqq 1$ ist dies sofort klar, da im Bereich der Punkte (x, y) mit $x \leqq 0$ oder $x \geqq 1$ die Geraden genauso erklärt sind, wie in der desarguesschen Ebene über $\mathfrak{K}$. Ich kann mich daher auf die Fälle $a \leqq 0$ und $0 < a < 1$ mit den Unterfällen $0 < c < 1$ und $1 \leqq c$ beschränken, wobei ich im Falle $0 < a < 1$, $0 < c < 1$ noch $a < c$ voraussetzen darf.

Im Falle $a \leqq 0$ genügen die Bestimmungsstücke u, v der Geraden ξ durch (a, b) der Gleichung $b = ua + v$, sodaß bei $a < 0$ mit $q = a^{-1}b$ für $u > \mathrm{Max}(1, q) = u_0$ der Fall III und sonst Fall II vorliegt. Einfache Rechnung zeigt nun

$$y = \begin{cases} \begin{cases} u(c-a)+b & \text{für } u \leqq u_0, \\ u(c-a)+b+(-a)(u-1)(u-q) & \\ u(c-a)+b+(-a)(u-1)(u-q) & \text{für } u > u_0 \text{ und } 0 < c < 1, \end{cases} \\ u(c-a)+b+(-a)(u-1)(u-q) \quad \text{für } u > u_0 \text{ und } 1 \leqq c. \end{cases}$$

Die Behauptung ergibt sich dann daraus, daß — wie man leicht nachrechnet — eine quatratische Gleichung $Au + (u-u_0)(u-u_1) = B$ im Falle $B > Au_0$, $A > 0$, $u_0 \geqq u_1$ genau eine Wurzel $> u_0$ besitzt. Bei $a = 0$ erhält man $b = v$ und somit bei $b \leqq 0$

$$y = uc + b$$

und bei $b > 0$

$$y = \begin{cases} uc+b & \text{für } u \leqq 1 \\ uc+b+(u-1)bc & \text{für } u > 1 \text{ und } 0 < c < 1, \\ uc+b+(u-1)b & \text{für } u > 1 \text{ und } 1 \leqq c, \end{cases}$$

woraus die Behauptung sofort eingesehen werden kann.

Im Falle $0 < a < 1$ ergibt sich für u, v die Gleichung

$$(u + (u-1)v)a + v = b \text{ falls } u > 1,\ v > 0$$

und $ua + v = b$ sonst. Wird wieder $q = a^{-1}b$ gesetzt, so liegt also für $1 < u < q$ der Fall III und sonst Fall II vor. Einfache Rechnung ergibt

$$y = \begin{cases} u(c-a)+b & \text{für } u \leqq 1 \text{ und für } u \geqq q, \\ \dfrac{u(c(a^{-1}+q)-1)+q(1-c)}{u+a^{-1}-1} & \text{für } 1 < u < q \text{ und } a < c < 1, \\ \dfrac{u^2(c-1)+u(c(a^{-1}-1)+q)}{u+a^{-1}-1} & \text{für } 1 < u < q \text{ und } 1 \leqq c. \end{cases}$$

Einfaches Nachrechnen zeigt, daß $u \to y$ im Falle $a < c < 1$, $a < b$ das Intervall von 1 bis q eineindeutig auf das Intervall von $c - a + b$ bis cq abbildet. Im Falle $1 \leqq c$, $a < b$ erkennt man durch Ausführen der Division (in dem Ausdruck für y bei $1 < u < q$) sofort, daß $u \to y$ eine monoton wachsende

Funktion ist. Da sich dann bei $c-a+b<y<cq$ für u eine quadratische Gleichung ergibt, deren linke Seite für $u=1$ einen Wert <0 und für $u=q$ einen Wert >0 annimmt, bildet also auch in diesem Fall $u \rightarrow y$ das Intervall von 1 bis q eineindeutig auf das Intervall von $c-a+b$ bis cq ab. Daraus folgt aber sofort die Behauptung.

Zum Beweis von (2) stelle ich zuerst einmal an Hand der Geradendefinition fest, daß durch P genau eine Gerade geht, welche einen vorgegebenen u-Wert besitzt. Es genügt daher nachzuweisen, daß zwei verschiedene Geraden, die nicht von der Art I sind, genau dann keinen Punkt gemeinsam haben, wenn sie in ihren u-Werten übereinstimmen. Daß diese Bedingung hinreicht, sieht man sofort. Seien nun umgekehrt zwei Geraden der Art II oder III mit den Bestimmungsstücken u, v bzw. u', v' und $u<u'$ gegeben, so rechnet man im Falle $v \leqq v'$ leicht nach, daß die Geraden einen gemeinsamen Punkt (x, y) mit $x \leqq 0$ besitzen. Liegen auf den beiden Geraden die Punkte $(1, c)$ bzw. $(1, c')$, so haben sie natürlich im Falle $v'<v$, $c<c'$ einen Punkt (x, y), mit $0<x<1$ gemeinsam, da ihre Gleichungen für $0<x<1$ ja ebenfalls linear sind. Im Falle $v'<v$, $c' \leqq c$ schließlich rechnet man wieder leicht nach, daß ein gemeinsamer Punkt (x, y) mit $x \geqq 1$ vorhanden ist.

(Eingegangen am 28. Juli 1955.)