Sur une propriété de la fonction $\varphi(n)$.

Dédié à la mémoire de T. Szele

Par W. SIERPIŃSKI à Varsovie.

Le but de cette Note est de démontrer la propriété suivante de la fonction $\varphi(n)$ (où $\varphi(n)$ est le nombre de tous les nombres naturels $\leqq n$ et premiers avec n):

Théorème 1. *Il existe pour tout nombre naturel k un nombre naturel n_k tel que $\varphi(n_k+k)=\varphi(n_k)$.*

DÉMONSTRATION. Soit k un nombre naturel et soit p le plus petit nombre premier qui ne divise pas k. Tout nombre premier $<p$ est donc un diviseur de k, d'où il résulte que tout facteur premier du nombre $p-1$ est un diviseur de k et il s'en suit que $\varphi((p-1)k)=(p-1)\varphi(k)$. Or, comme $(p,k)=1$ on a $\varphi(pk)=\varphi(p)\varphi(k)=(p-1)\varphi(k)$. On a ainsi $\varphi(pk)=\varphi((p-1)k)$ et pour $n_k=(p-1)k$ on a l'égalité $\varphi(n_k+k)=\varphi(n_k)$. Notre théorème se trouve ainsi démotré.

Pour k impairs on a évidemment $p=2$, donc $n_k=k$.

Il résulte de notre théorème que pour tout nombre naturel k donné l'équation $\varphi(x+k)=\varphi(x)$ a au moins une solution (en nombres naturels x). Or, il est a remarquer que le nombre n_k défini dans la démonstration de notre théorème peut n'être pas le plus petit nombre naturel x_k satisfaisant à l'équation $\varphi(x+k)=\varphi(x)$. Par exemple $n_7=7$ et $x_7=5$, $n_8=16$ et $x_8=13$. Voici les valeurs de nombres x_k pour $k\leqq 25$: $x_1=1, x_2=4, x_3=3, x_4=8, x_5=5, x_6=24, x_7=5, x_8=13, x_9=9, x_{10}=20, x_{11}=7, x_{12}=48, x_{13}=13, x_{14}=16, x_{15}=13, x_{16}=26, x_{17}=17, x_{18}=52, x_{19}=19, x_{20}=37, x_{21}=21, x_{22}=44, x_{23}=13, x_{24}=96, x_{25}=25$.

En utilisant la formule connue $\lim\limits_{n=\infty}[\pi(2n)-\pi(n)]=+\infty$ (où $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers $\leqq x$) ANDRÉ SCHINZEL a démontré le théorème suivant.

Théorème 2. *Il existe pour tout nombre naturel m un nombre naturel k tel que l'équation $\varphi(x+k)=\varphi(x)$ a plus que m solutions en nombres naturels x.*[1])

[1]) Ce théorème, ainsi que sa démonstration publiée ci-dessus, m'ont été communiqués par une lettre de M. ANDRÉ SCHINZEL.

DÉMONSTRATION. Désignons par p_i le i-ème nombre premier. m étant un nombre naturel donné il existe un nombre naturel n tel que $\pi(2p_{n+1})-$ $-\pi(p_{n+1}) \geqq m$. Posons $k = p_1, p_2 \ldots p_n$. Soit q un nombre premier tel que

$$p_{n+1} \leqq q < 2p_{n+1}. \tag{1}$$

Le nombre $q-1$ est évidemment pair: s'il avait un diviseur premier $> p_n$, donc $\geqq p_{n+1}$, on aurait $q-1 \geqq 2p_{n+1}$ contrairement à (1). Donc tout diviseur premier du nombre $q-1$ est un diviseur de k d'où il résulte que $\varphi((q-1)k) =$ $= (q-1)\varphi(k)$ et, comme $(q, k) = 1$, d'où $\varphi(qk) = \varphi(q)\varphi(k) = (q-1)\varphi(k)$, on obtient $\varphi((q-1)k + k) = \varphi((q-1)k)$ pour tout nombre premier q satisfaisant aux inégalités (1). Or, il existe évidemment $\pi(2p_{n+1}) - \pi(p_{n+1}) + 1 > m$ de tels nombres q, ce qui prouve que l'équation $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ a plus que m solutions. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Or, je ne sais pas s'il existe pour tout nombre naturel k plus qu'une solution de l'équation $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ (ou s'il en existe une infinité), ni s'il existe pour tout nombre naturel m un nombre naturel s_m tel que pour k naturels $> s_m$ l'égalité $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ a plus que m solutions.

(Reçu le 29 août 1955.)