Allgemeine metrische Räume von skalarer Krümmung.

Dem Andenken von Professor T. Szele gewidmet.

Von ARTHUR MOÓR in Debrecen.

Einleitung.

In der Theorie der allgemeinen differentialgeometrischen Räume haben J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES eine weitgehende Verallgemeinerung dadurch erreicht, daß sie für das Grundelement des Raumes eine kontravariante bzw. eine kovariante Vektordichte gewählt haben. (Vgl. [8]. Siehe die Literatur am Ende des Artikels). Dadurch haben sie in der Geometrie der allgemeinen differentialgeometrischen Räume einen einheitlichen Gesichtspunkt erzielt.

Im folgenden werden wir in § 1 die fundamentalen Formeln dieser allgemeinen metrischen Räume bestimmen, weiter in § 2 die Krümmungstensoren der Räume bestimmen, dann in § 3 die BERWALDsche Krümmungsinvariante des Finslerschen Raumes in bezug auf die allgemeinen metrischen Räume erweitern; es wird sich herausstellen, daß in diesen Räumen zwei Krümmungsinvariante existieren, die miteinander nur in gewissen Spezialfällen übereinstimmen. Die Krümmungsinvarianten hängen im allgemeinen von der Zweistellung ab. Sind sie von der Zweistellung unabhängig, so ist der Raum ein Raum von skalarer Krümmung. In § 4 werden wir die Räume von skalarer Krümmung untersuchen, und einige Resultate, die L. BERWALD in seinem Artikel [2] für die Finslersche Räume entwickelt hat, auf diese Räume übertragen. Wir beschränken uns dabei auf den kontravarianten Fall, da unsere Resultate wegen der metrischen Dualität (vgl. [7]) auch für den kovarianten Fall gültig sind.

§ 1. Fundamentalformeln der allgemeinen metrischen Räume.

Zu Grunde gelegt sie eine n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit P_n. Wir erweitern P_n indem wir jedem Punkt x^i $(i=1, \ldots, n)$ von P_n die kontravariante Vektordichte u^i vom Gewicht p zuordnen und somit eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_n$ der Elemente (x^i, u^i) erhalten. Wenn in jedem Element von $\mathfrak{P}_n$

ein Skalar $L(x, u)$ — die „metrische Fundamentalfunktion" — gegeben ist, so ist $\mathfrak{P}_n$ ein allgemeiner metrischer Raum $\mathfrak{R}_n$. Mit Hilfe von $L(x, u)$ kann man die Bogenlänge s_{12} der Kurve $x^i(t)$ bezüglich des Feldes $u^i(t)$ der Vektordichten durch die Formel

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(x, u) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt$$

bestimmen, wo der metrische Grundtensor $g_{ik}(x, u)$ des Raumes $\mathfrak{R}_n$ durch

$$(1.1) \qquad g_{ik} = \mathfrak{a}^{-\frac{p}{np-1}} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial u^i \partial u^k}, \qquad \mathfrak{a} = Det \left| \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial u^i \partial u^k} \right|$$

gegeben ist. (Vgl. [6] insb. S. 73). Im folgenden nehmen wir an, daß $np \neq 1$ besteht.

Das invariante Differential eines Vektors $\xi^i(x, u)$ ist:

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{jk} \xi^j dx^k + C^i_{jk} \xi^j du^k,$$

das man auch in der Form

$$(1.2) \qquad D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^{*i}_{jk} \xi^j dx^k + A^i_{jk} \xi^j \omega^k(d)$$

schreiben kann, wo $\omega^k(d)$ das invariante Differential des Einheitsvektors l^k bedeutet. Die Größen

$$A^i_{jk} = L\sqrt{g^p}\, C^i_{jk}, \qquad g = \mathrm{Det}|g_{ik}|$$

und

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - A^i_{js} \Gamma^s_{0k}$$

sind aus der Grundfunktion $L(x, u)$ ableitbar. (Vgl. [8] und [4] S. 242—246). Der Übertragungsparameter Γ^{*i}_{jk} ist in den unteren Indizes j, k symmetrisch. Den Torsionstensor A^i_{jk} bekommt man aus g_{ij} durch die Operation:

$$\|_k = L\sqrt{g^p} \frac{\partial}{\partial u^k}$$

in der Form:

$$(1.3) \qquad A^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} g_{js}\|_k, \qquad A_{jik} = \frac{1}{2} g_{ji}\|_k.$$

Verschwindet der Torsionstensor im ganzen Raum $\mathfrak{R}_n$, so ist der metrische Grundtensor g_{ik} nach (1.2) allein von x^i abhängig, der Raum $\mathfrak{R}_n$ ist also ein Riemannscher Raum.

Aus der Definitionsgleichung (1.3) bekommt man nach Verjüngung den Torsionsvektor

$$(1.4) \qquad A_i = A^r_{ri} = (\log \sqrt{g})\|_i.$$

In einem Raum $\mathfrak{R}_n$ kann man das Inhaltsmaß nur in bezug auf ein Feld der Vektordichten

$$u^i = u^i(x)$$

definieren. Es ist

$$V = \int_{(n)} \sqrt{g(x, u(x))}\, dx^1 \dots dx^n.$$

Die Relation

$$A_i = 0 \tag{1.5}$$

charakterisiert also nach (1.4) diejenigen Räume, in denen ein Inhaltsmaß im gewöhnlichen Sinne, d. h. ein vom Feld $u^i(x)$ unabhängiges Inhaltsmaß existiert. Offenbar haben die Riemannschen Räume diese Eigenschaft. Ein allgemeiner metrischer Raum $\mathfrak{R}_n$, in dem (1.5) gültig ist, der aber nicht ein Riemannscher Raum ist, wird von der Grundfunktion:

$$L(x, u) = \varphi(x)\,(u^1 u^2 \dots u^n)^{\frac{1}{n}}, \qquad n > 2 \tag{1.6}$$

bestimmt, wo aber die Dimensionszahl n eine ungerade Zahl ist.

Das kann leicht gezeigt werden, wenn man beachtet, daß die Determinante

$$\mathfrak{a} = \operatorname{Det} |a_{ik}|, \qquad a_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (L^2)}{\partial u^i \partial u^k}$$

in der Form

$$\mathfrak{a} = L^{n+1} L_1$$

darstellbar ist, wo die Funktion L_1 die Determinante

$$L_1 = -\frac{1}{L^2} \operatorname{Det} \left| \begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^k} & \dfrac{\partial L}{\partial u^i} \\ \hdashline \dfrac{\partial L}{\partial u^k} & 0 \end{array} \right|$$

bedeutet. (Vgl. [1] Formel (1.2) und (1.4) auf S. 85). Nach (1.1) wird dann

$$g = \mathfrak{a}^{-\frac{1}{np-1}} = L^{-\frac{n+1}{np-1}} L_1^{-\frac{1}{np-1}}.$$

Nach Einsetzen der Grundfunktion (1.6) in diese Formel von g, folgt unsere Behauptung. Wir bemerken noch, daß nach einer konformen Transformation

$$\bar{g}_{ik} = e^{2\sigma(x)} g_{ik}$$

aus einem Raum in dem (1.5) gültig ist, ein ebensolcher Raum entsteht. (Vgl. [3], § 3).

Herr A. Deicke hat in seinem Artikel [5] bewiesen, daß ein Finslerraum mit $A_i = 0$, falls $L > 0$ besteht, notwendigerweise ein Riemannscher Raum ist. Dieses Resultat kann man auch auf die allgemeinen metrischen Räume übertragen (vgl. [7] insb. S. 180). Die durch (1.5) charakterisierten Räume können also keine positiv-definite Metrik haben. In diesem Falle müssen wir also unsere Untersuchungen auf eine solche Teilmannigfaltigkeit der Grundelemente (x, u) beschränken, wo $L(x, u) > 0$ gültig ist.

Überschieben wir den Torsionstensor mit dem Einheitsvektor

$$(1.7) \qquad l^i = \frac{u^i}{L\sqrt{g^p}}, \qquad l_i = \sqrt{g^p}\frac{\partial L}{\partial u^i},$$

so wird aus (1.3)

$$(1.8) \qquad A_{0ik} = A_{i0k} = p\, l_i A_k,$$

bzw.

$$(1.9) \qquad A_{ij0} = 0, \qquad A_0 = 0.$$

(Vgl. [4] S. 244—245). Man erhält noch den Torsionsvektor A_i durch die Verjüngung von $A_{i\ k}^{\ j}$ auf j, k aus der Gleichung:

$$(1.10) \qquad A_{i\ k}^{\ k} = A_i(1-(n-1)p).$$

(Vgl. [4] S. 245).

Wir kehren nun wieder zum invarianten Differential zurück. Statt (1.2) kann man das invariante Differential eines Vektors ξ^i noch durch die Formeln

$$(1.11) \qquad D\xi^i = \xi^i|_k dx^k + \xi^i;_k \omega^k(d),$$

$$(1.12) \qquad D\xi^i = d\xi^i + \omega^i_{\ j}(d)\xi^j$$

bestimmen, wo $\xi^i|_k$ die kovariante Ableitung von ξ^i und $\xi^i;_k$ den Tensor

$$\xi^i;_k = \xi^i\|_k + A_{s\ k}^{\ i}\xi^s$$

bedeuten. Es ist

$$(1.13) \qquad \xi^i|_k = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \xi^i\|_r \Gamma^{*\ r}_{0\ k} + \Gamma^{*\ i}_{r\ k}\xi^r,$$

$$(1.14) \qquad \omega^i_{\ j}(d) = \Gamma^{*\ i}_{j\ r} dx^r + A_{j\ r}^{\ i}\omega^r(d).$$

(Vgl. [3] S. 296—297. Bei R. S. CLARK steht statt $\xi^i|_k$ das Symbol $D_k\xi^i$, bzw. statt $\xi^i;_k$ das Symbol $\overset{1}{D}_k\xi^i$). Die Vektoren und die Tensoren sind bei unseren Untersuchungen stets homogen von nullter Dimension in den u^i. Das invariante Differential sowie die kovariante Ableitung des metrischen Grundtensors ist Null:

$$(1.15) \qquad Dg_{ik} = 0,$$

$$(1.16) \qquad g_{ik}|_m = 0.$$

Für den Einheitsvektor l^i ist nur die Formel

$$(1.17) \qquad l^i|_k = 0$$

gültig.

§ 2. Krümmungstheorie.

Bilden wir die Vertauschungsformel der kovarianten Ableitungen eines kontravarianten Vektors ξ^i im allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$, so bekommen wir die Formel (vgl. [4] S. 249):

$$\xi^i|_k|_m - \xi^i|_m|_k = \overline{R}_{j\ km}^{\ i}\,\xi^j - \overline{R}_{0\ km}^{\ r}\,\xi^i\|_r, \tag{2. 1}$$

wo der Tensor $\overline{R}_{j\ km}^{\ i}$ durch

$$\overline{R}_{j\ km}^{\ i} = \frac{\partial \Gamma_{j\ k}^{*\,i}}{\partial x^m} - \Gamma_{j\ k}^{*\,i}\|_r \Gamma_{0\ m}^{*\,r} + \Gamma_{j\ k}^{*\,r}\Gamma_{r\ m}^{*\,i} - [k|m] \tag{2. 2}$$

gegeben ist. Dabei bedeutet das Symbol $[k|m]$ den ganzen vorigen Ausdruck mit vertauschten Indizes k und m. Wir werden den Tensor (2. 2) im folgenden als Hauptkrümmungstensor des $\mathfrak{R}_n$ bezeichnen. Er ist, wie das die Gleichung (2. 2) zeigt, in den beiden letzten Indizes schiefsymmetrisch. Im falle $p=0$, also im Finslerschen Raum, spielt dieser Tensor in der Äquivalenztheorie eine wichtige Rolle (vgl. [9], insb. die Formel (3. 13) und den Satz 4.). Im folgenden wird dieser Tensor einen Teil des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors bilden.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der vollständigen Krümmungstersoren des Raumes $\mathfrak{R}_n$ über. Die Methode, die wir für die Bestimmung der Krümmungstensoren anwenden, rührt von E. CARTAN her, und wird für ähnliche Zwecke fast immer benutzt.

Bedeuten „d" und „δ" zwei vertauschbare Differentiationssymbole, „D" und „Δ" die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale, so erhält man die vollständigen Krümmungstensoren des Raumes $\mathfrak{R}_n$ durch die Berechnung des Ausdrucks:

$$(\Delta D - D\Delta)\xi^i,$$

wo ξ^i einen beliebigen Vektor im $\mathfrak{R}_n$ bedeutet. Auf Grund der Gleichung (1. 11) wird nach (2. 1), weiter, in Hinsicht auf die Vertauschungsformeln von E. T. DAVIES (vgl. [4], S. 249) und wegen $\omega^0 = 0$;

$$(\Delta D - D\Delta)\xi^i = \Omega_t^{\ i}\xi^t$$

wo $\Omega_t^{\ i}$ den Ausdruck:

$$\Omega_t^{\ i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} R_{t\ km}^{\ i}[dx^k dx^m] + P_{t\ km}^{\ i}[dx^k \omega^m] + \frac{1}{2} S_{t\ km}^{\ i}[\omega^k \omega^m] \tag{2, 3}$$

bedeutet. Dabei sind die eckigen Klammern äußere Produkte von Pfaffschen Formen. Die expliziten Ausdrücke der drei vollständigen Krümmungstensoren sind:

$$R_{t\ km}^{\ i} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{R}_{t\ km}^{\ i} + A_{t\ r}^{\ i}\overline{R}_{0\ km}^{\ r}, \tag{2. 4a}$$

$$P_{t\ km}^{\ i} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{t\ k}^{*i}\|_m - A_{t\ m}^{\ i}|_k + A_{t\ r}^{\ i}\Gamma_{s\ k}^{*r}\|_m l, \tag{2. 4b}$$

$$S_{t\ km}^{\ i} \stackrel{\text{def}}{=} A_{t\ m}^{\ r}A_{r\ k}^{\ i} - A_{t\ k}^{\ r}A_{r\ m}^{\ i}. \tag{2. 4c}$$

Wir bezeichnen den Tensor $R_t{}^i{}_{km}$ als vollständigen Riemannschen Krümmungstensor des Raumes $\mathfrak{R}_n$. Er ist die Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungstensors eines Punktraumes.

Benützt man bei der Herleitung der vollständigen Krümmungstensoren statt (1. 11) die Gleichung (1. 12) so bekommt man

$$\Omega_t{}^i = [\omega^r{}_t \omega^i{}_r] - (\omega^i{}_t)', \tag{2.5}$$

wo $(\omega^i{}_t)'$ die äußere Ableitung der Pfaffschen Form (1. 14) bedeutet. Es ist

$$(\omega^i{}_t)' = d\omega^i{}_t(\delta) - \delta\omega^i{}_t(d).$$

Mit Hilfe der Formel (1. 12) folgt leicht auf Grund von (1. 15) die Identität:

$$(D\varDelta - \varDelta D)g_{ik} = g_{ir}\Omega_k{}^r + g_{kr}\Omega_i{}^r = 0,$$

die *die schiefe Symmetrie der vollständigen Krümmungstensoren in ihren ersten beiden Indizes beweist.* Aus (2. 2), (2. 4a) und (2. 4c) folgt daß *die Tensoren $R_t{}^i{}_{km}$ und $S_t{}^i{}_{km}$ auch in den Indizes k, m schiefsymmetrisch sind.*

Die Tensoren (2 4a)—(2. 4c) stimmen formal mit den entspechenden Tensoren des Finslerschen Raumes vollständig überein, doch kommt der Unterschied sofort zum Vorschein, wenn man sie mit l^t übeschiebt. Nach (1. 8) werden dann die Formeln das Gewicht p der Grundelemente explizit enthalten.

Durch Bildung der äußeren Ableitung von

$$\Omega_{ik} = [\omega_{ti}\omega^t{}_k] - (\omega_{ik})', \qquad \Omega_{ik} = g_{kr}\Omega_i{}^r$$

erhalten wir die erste Gruppe der Bianchischen Identitäten. Es wird:

$$\Omega'_{ik} - [\omega^r{}_k \Omega_{ir}] + [\omega^r{}_i \Omega_{kr}] = 0. \tag{2.6}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\omega^i(d) = \omega^i(\delta) = 0$, so wird:

$$R_{ijkl|m} + P_{ijkr} R_0{}^r{}_{lm} + \{k, l, m\} = 0. \tag{2.7}$$

wo $\{k, l, m\}$ weitere Glieder mit der zyklischen Permutation von k, l, m bedeuten.

Die zweite Gruppe der Bianchischen Identitäten erhält man durch die Berechnung der Torsion des Raumes. Beachten wir die Relationen

$$Dx^i = dx^i, \quad \varDelta x^i = \delta x^i,$$

die offenbar für die Differentiationssymbole „d" und „δ" bestehen, da x^i ein Skalar ist, so wird

$$\Omega^i \overset{\text{def}}{=} (\varDelta D - D\varDelta)x^i = A_j{}^i{}_k[dx^j \omega^k]$$

die Torsion des Raumes bestimmen. Durch Bildung der äußeren Ableitung von Ω^i bekommt man:

$$\Omega^{i'} - [dx^r \Omega_r{}^i] + [\omega^i{}_r \Omega^r] = 0. \tag{2.8}$$

Wenn wir jetzt die nach (1. 12) und (2. 5) leicht folgende Relation

$$(\omega^i)' = -\Omega_0{}^i + [\omega^t \omega^i{}_t]^{1)}$$

---

1) Es ist nach (1. 12)

$$(\omega^i)' = d\varDelta l^i - \delta D l^i = l^j\{(\omega^i{}_j)' - [\omega^t{}_j \omega^i{}_t]\} + [\omega^t \omega^i{}_t].$$

beachten, wird man nach der Substitution $\omega^i = 0$ zur Identität

$$R_{ijkm} + A_{ijr} R_0{}^r{}_{km} + \{j, k, m\} = 0 \tag{2.9}$$

gelangen, die die zweite Gruppe der Bianchischen Identitäten ist.

Aus den Gleichungen (2.6) und (2.8) könnte man noch weitere Relationen ableiten, was wir aber nicht durchführen wollen, da im folgenden nur die oben angegebenen Formeln von Bedeutung sein werden.

Wir wollen jetzt den Tensor P_{ijkm} untersuchen. Es ist wegen der schiefen Symmetrie in den ersten beiden Indizes

$$P_{ijkm} + P_{jikm} = 0.$$

Setzen wir in diese Gleichung die aus (2.4b) berechneten Werte von P_{ijkm} ein, so wird wegen (1,16) und wegen der Symmetrie des Torsiontensors $A_{ijk}|_m$ in i, j die Relation

$$A_{ijm}|_k = \frac{1}{2}(g_{jt} \Gamma_i^{*t}{}_k\|_m + g_{it} \Gamma_j^{*t}{}_k\|_m) + A_{ijr} \Gamma_s^{*r}{}_k\|_m l^s \tag{2.10}$$

bestehen. Substituieren wir jetzt diesen Wert von $A_{ijm}|_k$ in die Gleichung (2.4b), so wird:

$$P_{ijkm} = \frac{1}{2}(g_{jt} \Gamma_i^{*t}{}_k\|_m - g_{it} \Gamma_j^{*t}{}_k\|_m). \tag{2.11}$$

(Die Indizes in (2.4b) müssen vorher selbstverständlich heruntergezogen werden).

Wir zeigen jetzt, daß $\Gamma_i^{*j}{}_k\|_m$ allein durch den Torsionstensor A_{ijk} und dessen kovariante Ableitungen ausdrückbar ist. Überschieben wir die Gleichung (2.10) mit l^i, so wird nach (1.17) und (1.8):

$$p l_j A_m|_k = \frac{1}{2}(g_{jt} \Gamma_r^{*t}{}_k\|_m l^r + \Gamma_j^{*t}{}_k\|_m l_t) + p l_j A_r \Gamma_s^{*r}{}_k\|_m l^s, \tag{2.12}$$

und wenn wir (2.10) mit g^{ij} überschieben, dann bekommt man nach (1.4) und (1.16):

$$A_m|_k = \Gamma_t^{*t}{}_k\|_m + A_r \Gamma_s^{*r}{}_k\|_m l^s. \tag{2.13}$$

Multiplizieren wir jetzt (2.13) mit $p l_j$ und subtrahieren von (2.12), so wird:

$$l_t \Gamma_j^{*t}{}_k\|_m = 2 p l_j \Gamma_t^{*t}{}_k\|_m - g_{jt} \Gamma_r^{*t}{}_k\|_m l^r. \tag{2.14}$$

Aus (2.10) folgt nach (1.3):

$$(ijk, m) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\Gamma^*_{ijk}\|_m + \Gamma^*_{jik}\|_m) = A_{ijm}|_k + A_{jtm} \Gamma_i^{*t}{}_k + A_{itm} \Gamma_j^{*t}{}_k - A_{ijr} \Gamma_s^{*r}{}_k\|_m l^s.$$

Bilden wir den Ausdruck

$$(ijk, m) + (jki, m) - (kij, m),$$

so wird nach kleineren Umformungen in Hinsicht auf die Symmetrie der Γ^{*}_{ijk} in i und k:

$$\Gamma^{*\,j}_{i\ k}\|_m = A_i{}^j{}_m|_k + A_k{}^j{}_m|_i - A_{ikm}|_t g^{tj} - A_i{}^j{}_r \Gamma^{*\,r}_{s\ k}\|_m l^s - \\ - A_k{}^j{}_r \Gamma^{*\,r}_{s\ i}\|_m l^s + A_{ikr} g^{jt} \Gamma^{*\,r}_{s\ t}\|_m l^s. \tag{2.15}$$

Aus der Gleichung (2.14) bekommt man nach Überschiebung mit g^{js}:

$$\Gamma^{*\,s}_{r\ k}\|_m l^r = 2p l^s \Gamma^{*\,t}_{t\ k}\|_m - g^{rs} \Gamma^{*\,t}_{r\ k}\|_m l_t. \tag{2.16}$$

Setzen wir diese Werte in (2.15) ein, so wird nach der ersten Identität von (1.9):

$$\Gamma^{*\,j}_{i\ k}\|_m = A_i{}^j{}_m|_k + A_k{}^j{}_m|_i - A_{ikm}|_t g^{tj} + A_i{}^{jr} l_t \Gamma^{*\,t}_{r\ k}\|_m + A_k{}^{jr} l_t \Gamma^{*\,t}_{r\ i}\|_m - \\ - A_{ik}{}^r l_t \Gamma^{*\,t}_{r\ s}\|_m g^{sj}. \tag{2.17}$$

Nun müssen wir $l_t \Gamma^{*\,t}_{r\ k}\|_m$ berechnen. Überschieben wir (2.10) mit l^k und substitutieren wir den Wert von $l^k \Gamma^{*\,t}_{i\ k}\|_m$ aus der Gleichung (2.16), so wird:

$$l_t \Gamma^{*\,t}_{i\ j}\|_m + A_{ijm}|_0 = p(l_j \Gamma^{*\,t}_{t\ i}\|_m + l_i \Gamma^{*\,t}_{t\ j}\|_m) - A_{ij}{}^r \Gamma^{*\,t}_{r\ k}\|_m l_t l^k. \tag{2.18}$$

Wir überschieben nun (2.12) mit l^j, dann wird auf Grund von (2.13) die Relation

$$l^r l_t \Gamma^{*\,t}_{r\ k}\|_m = p \Gamma^{*\,t}_{t\ k}\|_m$$

bestehen. Somit erhält man aus (2.18):

$$l_t \Gamma^{*\,t}_{i\ j}\|_m + A_{ijm}|_0 = p(l_j \Gamma^{*\,t}_{t\ i}\|_m + l_i \Gamma^{*\,t}_{t\ j}\|_m - A_{ij}{}^r \Gamma^{*\,t}_{t\ r}\|_m). \tag{2.19}$$

Das Analogon der Gleichungen (2.17) und (2.19) im Cartanschen Raum hat L. BERWALD abgeleitet[2]). Es steht aber im Cartanschen Raum statt p der Wert 1[3]) und statt des Symbols $\|_s$ hat man das Symbol $\|^s$. Wir können jetzt weiter analog verfahren, also den Wert von $l_t \Gamma^{*\,t}_{i\ j}\|_m$ aus (2.19) in (2.17) substituieren, dann eine Verjüngung auf i, j durchführen, weiter

$$\delta^a_b + p A^c A_{cb}{}^a = H^a_b, \qquad H^0_b = l_b \tag{2.20a}$$

$$H^a_b K^b_c = H^b_c K^a_b = \delta^a_c \tag{2.20b}$$

(vgl. [3] S. 296) beachten, auf diese Weise wird nach leichten Rechnungen:

$$\Gamma^{*\,j}_{i\ k}\|_m = A_i{}^j{}_m|_k + A_k{}^j{}_m|_i - A_{ikm}|_t g^{tj} - A_i{}^{jr} A_{rkm}|_0 - A_k{}^{jr} A_{rim}|_0 + A_{ik}{}^r A_r{}^j{}_m|_0 + \\ + p K^f_t (A_m|_f - A^s A_{sfm}|_0)(l_k A_i{}^{jt} + l_i A_k{}^{jt} - l^j A_{ik}{}^t - A_i{}^{jr} A_{rk}{}^t - A_k{}^{jr} A_{ri}{}^t + \\ + A_{ik}{}^r A_r{}^{jt}). \tag{2.21}$$

Aus (1.4), (2.10) und (2.21) folgt, daß die Relationen

(2.22a) $\Gamma^{*\,j}_{i\ k}\|_m = 0$, (2.22b) $A_{ijk}|_m = 0$

miteinander gleichberechtigt sind. Besteht in einem Raum $\mathfrak{R}_n$ die Bedingungs-

[2]) Vgl. *Acta Math.* **71** (1939), 218—219, Form. (16.3) und (15.7).

[3]) Das Grundelement des Cartanschen Raumes ist eine kovariante Vektordichte vom Gewicht —1.

gleichung (2. 22a) oder (2. 22b), so ist nach (2. 11) der Krümmungstensor $P_{ijkm}=0$ und die Bianchischen Identitäten (2. 7) haben dieselbe Form, wie in einem Riemannschen Raum.

Aus (2. 11) und (2. 21) folgt für den Tensor P_{ijkm} die wichtige Formel:

$$P_{ijkm}=A_{jkm}|_i-A_{ikm}|_j+A_{ik}{}^r A_{rjm}|_0-A_{jk}{}^r A_{rim}|_0+pK_t^f(A_m|_f-A^s A_{sfm}|_0)\times \\ \times(l_i A_{jk}{}^t-l_j A_{ik}{}^t-A_{jk}{}^r A_{ri}{}^t+A_{ik}{}^r A_{rj}{}^t). \tag{2.23}$$

§ 3. Die Krümmungsinvarianten des Raumes.

I. Der allgemeine Fall. L. BERWALD derfinierte in seiner Arbeit [2] daß Krümmungsmaß des Finslerschen Raumes mit Hilfe des Tensors R_{oioj}. In einem allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$ sind zwei verschiedene Verallgemeinerungen des BERWALDschen Krümmungsmaßes möglich, denn es ist im Falle $p \neq 0$ nach den Gleichungen (2. 4a) und (1. 8) im allgemeinen

$$R_{oiom} \neq \bar{R}_{oiom}.$$

Da im Finslerschen Raum wegen $p=0$, nach (1. 8) und (2. 4a)

$$R_{oiom}=\bar{R}_{oiom}$$

besteht, erhält man dasselbe Krümmungsmaß, wenn man bei der Bildung den vollständigen Krümmungstensor oder den Hauptkrümmungstensor verwendet.

Wir definieren jetzt durch die Formeln

$$\bar{B}(x, u, \eta)=\frac{\bar{R}_{oiok}\eta^i\eta^k}{(g_{ik}-l_i l_k)\eta^i\eta^k} \tag{3.1}$$

und

$$B(x, u, \eta)=\frac{R_{oiok}\eta^i\eta^k}{(g_{ik}-l_i l_k)\eta^i\eta^k} \tag{3.2}$$

die zur Zweistellung (l^i, η^k) gehörigen Krümmungsinvarianten des allgemeinen metrischen Raumes $\mathfrak{R}_n$. Wir wollen $\bar{B}$ als Hauptkrümmungsmaß und B als vollständiges Krümmungsmaß von $\mathfrak{R}_n$ bezeichnen.

Offenbar kommt in (3. 1) und in (3. 2) nur der symmetrische Teil der Tensoren $\bar{R}_{oiok}$ und R_{oiok} vor. Aus der Gleichung (2. 9) kann der schiefsymmetrische Teil von R_{oiok} leicht berechnet werden. Überschieben wir (2.9) mit $l^i l^k$, und beachten wir die schiefsymmetrischen Eigenschaften des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors, so wird:

$$R_{o[i|o|k]}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(R_{oiok}-R_{okoi})=\frac{1}{2}pA_s(R_o{}^s{}_{ik}-l_i R_o{}^s{}_{ok}+l_k R_o{}^s{}_{oi}). \tag{3.3}$$

Aus dieser Formel sieht man, daß im Finslerschen Raum, also für $p=0$, der aus dem vollständigen Riemannschen Krümmungstensor gebildete Tensor R_{oiok} symmetrisch ist.

Jetzt wollen wir den schiefsymmetrischen Teil des Hauptkrümmungstensors bestimmen. Aus der Gleichung (2. 4a) folgt nach Überschiebung mit l^i in Hinsicht auf (1. 8).

$$R_{ojkm} = \bar{R}_{ojkm} + p l_j A_r \bar{R}_o{}^r{}_{km}, \tag{3. 4a}$$

und nach einer neuen Überschiebung mit l^k wird:

$$R_{ojom} = \bar{R}_{ojom} + p l_j A_r \bar{R}_o{}^r{}_{om}. \tag{3. 5}$$

Setzen wir nun die Werte aus (3. 4a) und (3. 5) in die Formel (3. 3) ein, so wird nach (1. 9):

$$\bar{R}_{o[i|o|k]} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\bar{R}_{oiok} - \bar{R}_{okoi}) = \frac{1}{2} p A_s (\bar{R}_o{}^s{}_{ik} - 2 l_i \bar{R}_o{}^s{}_{ok} + 2 l_k \bar{R}_o{}^s{}_{oi}). \tag{3. 6}$$

Die Formel (3. 4a) bestimmt den Tensor R_{ojkm} durch $\bar{R}_{ojkm}$. Für das folgende wird es wichtig sein, auch $\bar{R}_{ojkm}$ durch R_{ojkm} auszudrücken. Nach (3. 4a) ist wegen (1. 9)

$$A_r R_o{}^r{}_{jk} = A_r \bar{R}_o{}^r{}_{jk};$$

somit erhält man aus (3. 4a)

$$\bar{R}_{ojkm} = R_{ojkm} - p l_j A_r R_o{}^r{}_{km}. \tag{3. 4b}$$

Wir beweisen den

Satz 1. *Ist der Tensor $\bar{R}_{oiok}$ symmetrisch, dann ist auch der Tensor R_{oiok} symmetrisch, und die beiden Krümmungsinvarianten des Raumes $\mathfrak{R}_n$ stimmen überein.*

Beweis. Nach der Gleichung (3. 5) ist:

$$R_{ojom} - R_{omoj} = 2\bar{R}_{o[j|o|m]} + p A_r (l_j \bar{R}_o{}^r{}_{om} - l_m \bar{R}_o{}^r{}_{oj}).$$

Nach unserer Bedingung ist aber $\bar{R}_{o[j|o|m]} = 0$, somit bekommt man aus der letzten Gleichung nach Überschiebung mit l^j wegen der schiefsymmetrischen Eigenschaften des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors die Gleichung:

$$p A_r \bar{R}_o{}^r{}_{om} = 0. \tag{3. 7a}$$

Auf Grund von (1. 9) folgt aus dieser Gleichung wegen (3. 5), daß auch

$$p A_r R_o{}^r{}_{om} = 0 \tag{3. 7b}$$

besteht. Nach (3. 7a) folgt aus (3. 6) wegen $\bar{R}_{o[i|o|k]} = 0$, daß auch

$$p A_s \bar{R}_o{}^s{}_{km} = 0 \tag{3. 8a}$$

gültig ist und nach (3. 4a) folgt auch die Relation

$$p A_s R_o{}^s{}_{km} = 0. \tag{3. 8b}$$

Aus den Gleichungen (3. 3), (3. 7b) und (3. 8b) folgt, daß

$$R_{o[i|o|k]} = 0$$

besteht, und das beweist die Symmetrie des vollständigen Krümmungstensors. Aus den Gleichungen (3. 4a) und (3. 8a) folgt noch

$$R_{ojkm} = \bar{R}_{ojkm}, \qquad R_{ojom} = \bar{R}_{ojom}$$

und das beweist nach (3. 1) und (3. 2) die Identität der Krümmungsinvarianten. Damit haben wir den Satz 1. vollständig bewiesen.

Wir werden jetzt untersuchen, wieweit sich der Satz 1. umkehren läßt. Es besteht der

Satz 2. *Besteht in einem allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$ die Relation:*

$$B(x, u, \eta) = \bar{B}(x, u, \eta), \tag{3. 9}$$

so bestehen auch die Relationen (3. 7a) *und* (3. 7b), d. h.

$$R_{ojom} = \bar{R}_{ojom}. \tag{3.10}$$

Beweis. Wie schon bemerkt wurde, kommen in (3. 1) und (3. 2) nur die symmetrischen Teile der Tensoren $\bar{R}_{oiok}$ und R_{oiok} vor. Dabei bedeutet z. B. der symmetrische Teil von R_{oiok} den Tensor:

$$R_{o(i|o|k)} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(R_{oiok} + R_{okoi}).$$

Aus unserer Annahme (3. 9) folgt unmittelbar

$$R_{o(i|o|k)} = \bar{R}_{o(i|o|k)}.$$

Auf Grund von (3. 5) bekommt man aus unserer letzten Gleichung:

$$p l_i A_r \bar{R}_o{}^r{}_{ok} + p l_k A_r \bar{R}_o{}^r{}_{oi} = 0.$$

Nach Überschiebung mit l^i folgt sofort das Bestehen der Gleichung (3. 7a). Aus (3. 5) und (3. 7a) folgt dann die Gleichung (3. 10) und daraus auch (3. 7b) w. z. b. w.

Besteht in einem allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$ die Relation (3. 9), so ist

$$R_{o[i|o|k]} l^i = \frac{1}{2} \bar{R}_{oook} = 0. \tag{3. 11}$$

Nach dem Satz 2. ist nämlich in einem durch (3. 9) charakterisierten Raum $\mathfrak{R}_n$ die Gleichung (3. 7a) gültig. Überschieben wir also (3. 6) mit l^i, so bekommen wir auf Grund von (3. 7a) eben die Relation (3. 11). Die Gleichung (3. 11) ist nicht in allen Räumen erfüllt. Ein explizites Beispiel dafür liefert uns die Gleichung (3. 21). Daraus folgt noch, daß $\bar{R}_{ijkm}$ in i, j im allgemeinen nicht schiefsymmetrisch ist. Es folgt leicht der

Satz 3. *Die Relation* (3. 11) *ist charakteristisch für die Räume, in denen die beiden Krümmungsinvarianten übereinstimmen.*

Beweis. Überschiebt man (3.6) mit l^i, so bekommt man nach (3.11) und wegen der Schiefsymmetrie von $\overline{R}_{o\,ik}^{\;s}$ in i, k eben die Gleichung (3.7a). Aus (3.1), (3.2) und (3.7a) folgt dann die Gleichung (3.9), w. z. b. w.

* * *

II. Der zweidimensionale Fall. Im zweidimensionalen Raum $\mathfrak{R}_2$ kann in jedem Grundelement (x^i, v^i) des Raumes zu dem Einheitsvektor l^i ein orthogonaler Einheitsvektor h^i bestimmt werden. Im Finslerschen Fall hat diese Konstruktion L. Berwald durchgeführt in seiner Arbeit [1] (vgl. S. 89), die aber auch für den allgemeinen Raum $\mathfrak{R}_2$ bestehen wird. Vollständigkeitshalber stellen wir die wichtigsten Formeln für die Vektoren l^i, h^i zusammen. Es ist

(3.12) $$h^i = -\varepsilon^{ik} l_k, \qquad h_i = -\varepsilon_{ik} l^k,$$

wo der schiefsymmetrische Tensor ε^{ik} durch

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \qquad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{g}},$$
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \qquad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g}$$

angegeben ist. Nach (1.16) und (1.17) hat man:

(3.13) $$\varepsilon^{ij}|_k = 0, \qquad \varepsilon_{ij}|_k = 0,$$

(3.14) $$h^i|_k = 0, \qquad h_i|_k = 0.$$

Zwischen den Grundtensoren bestehen die wichtigen Relationen:

(3.15) $$\begin{cases} \delta_i^k = l_i l^k + h_i h^k \\ g_{ik} = l_i l_k + h_i h_k \\ \varepsilon_{ik} = l_i h_k - l_k h_i. \end{cases}$$

Die Vektoren l_i, h_i bilden ein normiertes orthogonales Zweibein; mit Hilfe dieses Zweibeins können alle Vektoren und Tensoren des Raumes $\mathfrak{R}_2$ ausgedrückt werden. Wegen den schiefsymmetrischen Eigenschaften des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors wird R_{ijkm} die Form

(3.16) $$R_{ijkm} = R\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}$$

haben. Dabei ist R wegen

$$\varepsilon^{ij}\varepsilon_{ij} = 2$$
$$R = \frac{1}{4} R_{ijkm}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{km}.$$

$R(x, v)$ ist der Krümmungsskalar des zweidimensionalen Raumes $\mathfrak{R}_2$. Aus (3.16) bekommt man nach Überschiebung mit l^i in Hinsicht auf die Gleichung (3.12)

(3.17a) $$R_{ojkm} = Rh_j\varepsilon_{km},$$

(3.17b) $$R_{ojom} = Rh_j h_m.$$

Aus dieser letzten Gleichung sieht man unmittelbar, daß der Tensor R_{oiok} im Raum $\mathfrak{R}_2$ immer symmetrisch ist.

Setzt man (3. 17b) in (3. 2) ein, so läßt sich nach der zweiten Gleichung von (3. 15) behaupten: *In einem allgemeinen zweidimensionalen metrischen Raum $\mathfrak{R}_2$ ist das vollständige Krümmungsmaß B allein vom Stützelement (x, u) abhängig;* d. h. es ist von der Zweirichtung (ξ^i, η^i) unabhängig. Man hat

$$B(x, u) = R(x, u).$$

Um die Beindarstellung des Tensors R_{ojkm} bestimmen zu können, müssen wir vorher die Beindarstellung des Torsionstensors bzw. des Torsionsvektors feststellen. Nach (1. 9) hat man

$$A_i = \mathfrak{J} h_i, \tag{3. 18}$$

wo

$$\mathfrak{J} = A_i h^i$$

den Hauptskalar des Raumes bedeutet.[4]) Da der Torsionstensor A_{ijk} in i, j symmetrisch ist, so wird er nach (1. 9) die Form

$$A_{ijk} = \underset{(1)}{\mathfrak{J}} l_i l_j h_k + \underset{(2)}{\mathfrak{J}} h_i h_j h_k + \underset{(3)}{\mathfrak{J}} (l_i h_j + h_i l_j) h_k \tag{3. 19}$$

haben. Aus (1. 8) folgt nach (3. 18)

$$A_{ook} = p A_k = \underset{(1)}{\mathfrak{J}} h_k; \qquad \underset{(1)}{\mathfrak{J}} = p \mathfrak{J};$$

und wenn wir noch (3. 19) beachten, bekommt man:

$$\underset{(1)}{\mathfrak{J}} + \underset{(2)}{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}, \quad \underset{(2)}{\mathfrak{J}} = (1-p)\mathfrak{J}.$$

Wir zeigen noch, daß $\underset{(3)}{\mathfrak{J}} = 0$ ist. Nach (1. 8) und (3. 19) ist wegen $l_i h^i = 0$

$$A_{oik} h^i h^k = A_{iok} h^i h^k = \underset{(3)}{\mathfrak{J}} = 0.$$

Der Torsionstensor hat also nach (3. 19) die Form:

$$A_{ijk} = p \mathfrak{J} l_i l_j h_k + (1-p) \mathfrak{J} h_i h_j h_k. \tag{3. 20}$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß im Falle $p = 1$ die Relationen

$$A_{ij}{}^r A_{rkm} = 0, \quad A^r A_{rkm} = 0$$

bestehen, somit wird nach (2. 20a) und (2. 20b)

$$H_a^b = K_a^b = \delta_a^b$$

ebenso wie im Finslerschen Raum, also bei $p = 0$ bestehen. Mit Hilfe der

---

[4]) Vgl. [1] Formel (4. 6), S. 89. Im Fislerschen Raum kann man den Hauptskalar unmittelbar mit Hilfe des Torsionsvektors A_{ijk} definieren, da A_{ijk} in allen ihren Indizes symmetrisch ist.

Gleichung (2. 23) kann sofort verifiziert werden, daß für $p=0$, oder $p=1$ im Raum $\mathfrak{R}_2$ der Tensor P_{ijkm} dieselbe Form hat, undzwar ist:

$$P_{ijkm}=A_{jkm}|_i-A_{ikm}|_j.$$

Nach einer Überschiebung mit l^i wird aber gemäß der Identität (1. 8) der Tensor P_{ojkm} für $p=0$, bzw. $p=1$ verschiedene Formen haben.

Jetzt werden wir den Hauptkrümmungstensor untersuchen. Nach (3. 4b), (3. 17a) und (3. 18) wird:

$$\overline{R}_{ojkm}=R(h_j-p\mathfrak{J}l_j)\varepsilon_{km},$$

und nach (3. 12) in Hinsicht auf die Schiefsymmetrie von ε_{ik} wird:

$$\overline{R}_{ojom}=R(h_j-p\mathfrak{J}l_j)h_m. \tag{3.21}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3. 17b) und (3. 21) können wir leicht den folgenden Satz beweisen:

Satz 4. *In einem allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_2$ kann*

$$R_{ojom}=\overline{R}_{ojom} \tag{3.22}$$

nur in folgenden drei Fällen bestehen:

a) $p=0$, $\mathfrak{R}_2$ ist also ein Finslerscher Raum:

b) Es ist $R=0$;

c) Der Raum ist ein Riemannscher Raum.

Beweis. Offenbar folgt aus (3. 17b) und (3. 21), daß (3. 22) nur dann bestehen kann, falls α) $p=0$, β) $R=0$, oder γ) $\mathfrak{J}=0$ besteht. α) bzw. β) ergibt schon unsere Behauptung *a)* bzw. *b)*. Im Fall γ) ist also $\mathfrak{J}=0$, dann wird aber nach (3. 20) und (1. 3) der metrische Grundtensor g_{ik} von u^i unabhängig sein; $\mathfrak{R}_2$ ist also ein Riemannscher Raum, w. z. b. w.

Der Zusammenhang zwischen die Krümmungsinvarianten B und $\overline{B}$ eines $\mathfrak{R}_2$ kann auf Grund der zweiten Relation von (3. 15) leicht bestimmt werden. Aus (3. 1) und (3. 21) folgt

$$\overline{B}(x,u,\eta)=R-p\mathfrak{J}R\frac{l_j\eta^j}{h_k\eta^k}.$$

Beachten wir jetzt, daß in den zweidimensionalen Räumen $B=R$ ist, bezeichnen wir ferner den Winkel der Vektoren l_i und η^j mit φ, so wird:[5])

$$\overline{B}=B(1-p\mathfrak{J}\operatorname{cotg}\varphi).$$

[5]) Es ist nämlich $l_i\eta^i=\eta\cos\varphi$, $h_i\eta^i=\eta\sin\varphi$, da l_i und h_i orthogonale Einheitsvektoren sind. Der Vektor η^i kann immer in der Form:

$$\eta^i=\eta\cos\varphi\, l^i+\eta\sin\varphi\, h^i$$

dargestellt werden, wo η die Länge des Vektors η^i bezeichnet.

Wir wollen in diesem Paragraphen noch die Bianchischen Identitäten des $\mathfrak{R}_2$ untersuchen. Wir werden zeigen, daß *im $\mathfrak{R}_2$ die Gleichungen* (2.7) *in zwei Gruppen zerfallen*, undzwar:

(3.23a) $$R_{ijkl}|_m + \{k, l, m\} = 0,$$

(3.23b) $$P_{ijkr} R^r_{o\;lm} + \{k, l, m\} = 0.$$

Offenbar müssen wir nur (3.23a) beweisen; die Relation (3.23b) folgt dann unmittelbar aus (2.7) und (3.23a). Nun ist aber nach (3.16) im $\mathfrak{R}_2$

$$R_{ijkl}|_m + \{k, l, m\} = R|_t(\delta^t_m \varepsilon_{kl} + \delta^t_k \varepsilon_{lm} + \delta^t_l \varepsilon_{mk})\varepsilon_{ij}.$$

Setzen wir jetzt in diese Gleichung die Werte von δ^t_s und ε_{rs} aus (3.14) ein, so folgt sofort (3.23a), w. z. b. w.

Auch *die Gleichungen* (2.9) *zerfallen im $\mathfrak{R}_2$ in die zwei Gruppen:*

(3.24a) $$R_{ijkm} + \{j, k, m\} = 0,$$

(3.24b) $$A_{ijr} R^r_{o\;km} + \{j, k, m\} = 0.$$

Auf Grund von (3.16) ist nämlich

(3.25) $$R_{ijkm} + \{j, k, m\} = R(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{mj} + \varepsilon_{im}\varepsilon_{jk}).$$

Nach der dritten Gleichung von (3.15) folgt aus dieser Gleichung unmittelbar (3.24a), w. z. b. w. Die Gleichungen (2.9) und (3.24a) ergeben dann selbstverständlich auch (3.24b).

Die Gleichungen (3.23a) und (3.24a) hängen letztenfalls mit der Tatsache zusammen, daß im $\mathfrak{R}_2$ der vollständige Riemannsche Krümmungstensor wegen seiner schiefsymmetrischen Eigenschaften im wesentlichen nur die einzige Komponente R_{1212} hat. Wählt man in (3.23a) für j, k, l die Werte 2, 1, 2 und auch in (3.24a) für j, k, m die Werte 2, 1, 2 so kann man diese beiden Identitäten sofort verifizieren.

L. Berwald hat im zweidimensionalen Finslerschen Raum anstatt der Gleichung (2.7) die Identität

(3.26) $$\mathfrak{J}_{ss} + \mathfrak{J}R + R_\vartheta = 0$$

abgeleitet, die auch als die Bianchische Identität des zweidimensionalen Finslerschen Raumes betrachtet werden kann (vgl. [1], Gleichung (7.8), S. 92). Wir wollen jetzt das Analogon dieser Gleichung im allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_2$ bestimmen.

Wir definieren die folgenden Operationen:

$$\Phi_s \overset{\text{def}}{=\!=} \Phi_{(i)} l^i; \quad \Phi_b \overset{\text{det}}{=\!=} \Phi_{(i)} h^i; \quad \Phi_\vartheta \overset{\text{def}}{=\!=} \Phi\|_i h^i;$$

$$\Phi_{(i)} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \Phi\|_j \Gamma^{*j}_{o\;i}, \quad \Phi\|_j \overset{\text{def}}{=\!=} L\sqrt{g^p}\,\frac{\partial \Phi}{\partial u^j}.$$

(Diese Operationen sind im Falle $p = 0$ offenbar mit den von L. Berwald in [1] angegebenen entsprechenden Operationen identisch. Wir werden seine

Bezeichnungen beibehalten). Die Gleichungen (1. 17) und (3. 14) kann man in der Form:

$$l^j{}_{(i)} = -\Gamma^{*j}_{o\ i}, \quad h^j{}_{(i)} = -\Gamma^{*j}_{r\ i} h^r$$

schreiben. Mit Hilfe der Formeln für $\sqrt{g^p}$, die E. T. Davies in seiner Arbeit [4] angegeben hat, kann man in Hinsicht auf (3. 15) die folgenden Formeln ableiten (vgl. [4], (3. 1)—(3. 5) und (5. 4)—(5. 6)):

$$\frac{\partial L\sqrt{g^p}}{\partial x^k} = L\sqrt{g^p}\,(l_m + pA_m)\,\Gamma^{*m}_{o\ k},$$

$$(L\sqrt{g^p})\|_k = L\sqrt{g^p}\,(l_k + pA_k),$$

$$h^i\|_j = -l^i h_j - (1-p)\mathfrak{J} h^i h_j.$$

Wir können jetzt die folgenden Vertauschungsformeln leicht verifizieren:

$$\Phi_{(i)(k)} - \Phi_{(k)(i)} = -R_o{}^j{}_{ik}\,\Phi\|_j,$$

$$\Phi\|_j\|_k - \Phi\|_k\|_j = (l_k + pA_k)\,\Phi\|_j - (l_j + pA_j)\,\Phi\|_k,$$

$$\Phi_{(i)}\|_k - \Phi\|_{k(i)} = -(\Gamma^{*j}_{k\ i} + \Gamma^{*j}_{r\ i}\|_k l^r)\,\Phi\|_j.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\Phi_{sb} - \Phi_{bs} = -R\,\Phi_\vartheta,$$

$$\Phi_{\vartheta s} - \Phi_{s\vartheta} = -\Phi_b + p\mathfrak{J}\Phi_s + \Gamma^{*r}_{s\ j}\|_i l^s l^j h^i\,\Phi\|_r,$$

$$\Phi_{b\vartheta} - \Phi_{\vartheta b} = -\Phi_s - (1-p)\mathfrak{J}\Phi_b - \Gamma^{*r}_{s\ j}\|_i l^s h^i h^j\,\Phi\|_r.$$

Die Gleichung (2. 21) ergibt die Beindarstellung des Tensors $\Gamma^{*r}_{s\ j}\|_i$, wenn man A_{ijk} mit Hilfe von (3. 20) ausdrückt. Wir müssen aber vorher die Beindarstellung des Tensors K^f_t durch (2. 20a) und (2. 20b) bestimmen. Nach (3. 15), (3. 18) und (3. 20) wird:

$$K^f_t = l^f l_t + \bar{\mathfrak{J}} h^f h_t,$$

wo

(3. 27) $$\bar{\mathfrak{J}} = \frac{1}{1 + p(1-p)\mathfrak{J}^2}$$

ist. Somit erhält man für die Vertauschungsformeln:

(3. 28a) $$\Phi_{sb} - \Phi_{bs} = -R\,\Phi_\vartheta,$$

(3. 28b) $$\Phi_{b\vartheta} - \Phi_{\vartheta b} = -\Phi_s - (1-p)\mathfrak{J}\Phi_b - (1-p)\mathfrak{J}^*\Phi_\vartheta,$$

(3. 28c) $$\Phi_{\vartheta s} - \Phi_{s\vartheta} = -\Phi_b + p\mathfrak{J}\Phi_s - p(\mathfrak{J}_b - (1-p)\mathfrak{J}\mathfrak{J}^*)\,\Phi_\vartheta,$$

wo $\mathfrak{J}^*$ den Ausdruck

(3. 29) $$\mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}_s + p\mathfrak{J}\bar{\mathfrak{J}}(\mathfrak{J}_b - (1-p)\mathfrak{J}\mathfrak{J}_s)$$

bedeutet. Die Jacobische Identität ist:

$$[\Phi_{sb\vartheta} - \Phi_{bs\vartheta} - (\Phi_{\vartheta sb} - \Phi_{\vartheta bs})] + \{s, b, \vartheta\} = 0.$$

(Vgl. [1], Gl. (7. 7), S. 92). Nach den Gleichungen (3. 28) bekommt man:

$$-(1-p)[\mathfrak{J}_s - \mathfrak{J}^* + p\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_b - (1-p)\mathfrak{J}\mathfrak{J}^*)]\,\Phi_b -$$

$$-[R_\vartheta + \mathfrak{J}R + (1-p)\mathfrak{J}^*_s + p(\mathfrak{J}_{bb} - (1-p)\mathfrak{J}_b\mathfrak{J}^* - (1-p)\mathfrak{J}\mathfrak{J}^*_b)]\,\Phi_\vartheta = 0.$$

Nach den Formeln (3. 29) und (3. 27) ist aber der Faktor von Φ_b gleich Null. Beachten wir noch die Willkürlichkeit des Skalars Φ, so bekommt man:

$$(3.30)\qquad R_\vartheta+\mathfrak{J}R+(1-p)\mathfrak{J}^{\bullet}_{s}+p(\mathfrak{J}_{bb}-(1-p)\mathfrak{J}_b\mathfrak{J}^{\bullet}-(1-p)\mathfrak{J}\mathfrak{J}^{\bullet}_{b})=0.$$

Diese Gleichung ist also die Bianchische Identität des allgemeinen mertischen Raumes $\mathfrak{R}_2$. Im Falle $p=0$ geht (3. 30) nach dcr Relation (3. 29) in (3. 26) über. Für $p=1$ hat diese Identität die einfache Form:

$$R_\vartheta+\mathfrak{J}R+\mathfrak{J}_{bb}=0.$$

Ist $\mathfrak{J}=$ konst., dann geht (3. 30) in

$$R_\vartheta+\mathfrak{J}R=0$$

über, die Bianchische Identität ist also von p unabhängig; d. h. *die Räume $\mathfrak{R}_2$ mit konstantem Hauptskalar haben dieselbe Bianchische Identität.*

Wir beweisen noch den

Satz 5. *Im allgemeinen zweidimensionalen metrischen Raum $\mathfrak{R}_2$ hat der Krümmungstensor die Form:*

$$(3.31)\qquad R_{o\,jk}^{\,i}=\frac{1}{3L\sqrt{g^p}}\left[\frac{\partial}{\partial u^j}(L^2g^pR_{o\,ok}^{\,i})-\frac{\partial}{\partial u^k}(L^2g^pR_{o\,oj}^{\,i})\right].$$

Beweis: Statt der Gleichung (3. 31) kann immer

$$(3.32)\qquad R_{o\,jk}^{\,i}=\frac{1}{3L\sqrt{g^p}}\left[\frac{\partial}{\partial u^j}(L^2g^pR_{o\,ok}^{\,i})-\frac{\partial}{\partial u^k}(L^2g^pR_{o\,oj}^{\,i})\right]+T_{j\,k}^{\,i}$$

gesetzt werden, wo $T_{j\,k}^{\,i}$ ein entsprechend bestimmter Tensor ist. Offenbar ist $T_{j\,k}^{\,i}$ in j und k schiefsymmetrisch, wie das nach (3. 32) sofort gezeigt werden kann. Überschiebt man (3. 32) mit l^j, so erhält man in Hinsicht auf die Schiefsymmetrie des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors in den beiden letzten Indizes, und wegen der Homogenität:[6])

$$T_{o\,k}^{\,i}=0;$$

wegen der Schiefsymmetrie wird dann auch

$$T_{j\,o}^{\,i}=0$$

bestehen. Die Beindarstellung von $T_{j\,k}^{\,i}$ muß also die Form:

$$T_{j\,k}^{\,i}=\underset{(1)}{T}l^ih_jh_k+\underset{(2)}{T}h^ih_jh_k$$

haben. In diesem Falle kann aber dieser Tensor in j,k nur dann schiefsymmetrisch sein wenn er verschwindet. Aus $T_{j\,k}^{\,i}=0$ folgt aber die Gültigkeit von (3. 31), w. z. b. w.

[6]) Es ist nämtich:

$$R_{o\,ok}^{\,i}=\frac{1}{3L^2g^p}\left[2L^2g^pR_{o\,ok}^{\,i}-L^2g^p\frac{\partial R_{o\,oj}^{\,i}}{\partial u^k}u^j\right]+T_{o\,k}^{\,i}=R_{o\,ok}^{\,i}+T_{o\,k}^{\,i}$$

§ 4. Räume von skalarer Krümmung.

Durch die Gleichungen (3. 1) und (3. 2) haben wir im allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$ zwei Krümmungsinvarianten definiert. Ist eine dieser Invarianten von η^i unabhängig, so nennen wir den Raum $\mathfrak{R}_n$ einen Raum von skalarer Krümmung. Ein $\mathfrak{R}_2$ ist immer ein Raum von skalarer Krümmung, da das vollständige Krümmungsmaß B im zweidimensionalen Raum mit dem Krümmungsskalar R übereinstimmt.

Wir wollen jetzt denjenigen Fall untersuchen, in dem B und $\bar{B}$ beide von η^i unabhängig sind, Nach (3. 1) und (3. 2) soll also

$$\bar{R}_{o(i|o|k)} = \bar{B}(x, u)\,(g_{ik} - l_i l_k), \tag{4. 1a}$$

$$R_{o(i|o|k)} = B(x, u)\,(g_{ik} - l_i l_k) \tag{4. 1b}$$

bestehen, da in den Gleichungen (3. 1) und (3. 2) nur die symmetrischen Teile der Krümmungstensoren vorkommen. Wir beweisen den

Satz 6. *Sind in einem Raum $\mathfrak{R}_n$ die beiden Invarianten B und $\bar{B}$ gleichzeitig von η^i unabhängig, ist also der Raum in bezug auf beide Krümmungsinvarianten ein Raum von skalarer Krümmung, dann ist*

$$\bar{B}(x, u) = B(x, u), \qquad \bar{R}_{ojom} = R_{ojom}.$$

Beweis. Nach der Gleichung (3. 5) ist

$$R_{o(i|o|k)} = \bar{R}_{o(i|o|k)} + \frac{1}{2} p A_r (l_i \bar{R}_o{}^r{}_{ok} + l_k \bar{R}_o{}^r{}_{oi}).$$

Setzt man in diese Gleichung die entsprechenden Werte aus (4. 1a) und (4. 1b) ein, so wird:

$$(B - \bar{B})(g_{ik} - l_i l_k) = \frac{1}{2} p A_r (l_i \bar{R}_o{}^r{}_{ok} + l_k \bar{R}_o{}^r{}_{oi}).$$

Nach einer Überschiebung mit g^{ik} bekommt man wegen der Schiefsymmetrie des Hauptkrümmungstensors in den beiden letzten Indizes die Relation;

$$(n-1)(B - \bar{B}) = 0,$$

also $B = \bar{B}$. Nach dem Satz 2 im § 3 folgt auch $R_{oiok} = \bar{R}_{oiok}$, womit der Satz 6. vollständig bewiesen ist.

Ein allgemeiner metrischer Raum $\mathfrak{R}_n$ ist im allgemeinen nur in bezug auf eine der Krümmungsinvarianten ein Raum von skalarer Krümmung. Wir werden deshalb, Einfachheit halber, die beiden Krümmungstensoren R_{ijkm} und $\bar{R}_{ijkm}$ durch R^*_{ijkm} bezeichnen; der Tensor R^*_{ijkm} wird also immer denjenigen Krümmungstensor bedeuten, der eine solche Krümmungsinvariante bestimmt, die von der Zweistellung unabhängig ist. Nach (4. 1a) bzw. (4. 1b) wird also $R^*_{o(i|o|k)}$ die Form

$$R^*_{o(i|o|k)} = R^*(x, u)\,(g_{ik} - l_i l_k) \tag{4. 2}$$

haben, wo $R^*(x, u)$ die Invariante $\bar{B}(x, u)$ bzw. $B(x, u)$ bedeuten kann, je nachdem R^*_{oiok} den Tensor $\bar{R}_{oiok}$, bzw. den Tensor R_{oiok} bezeichnet.

Wir beweisen den folgenden Satz;

Satz 7. *In den allgemeinen metrischen Räumen von skalarer Krümmung besteht die Relation:*

$$g^{ij} R^*_{o(i|o|k)} \|_j - \frac{1}{n-1} R_{o\ oj}^{*j} \|_k + R_{o\ oj}^{*j} l_k = 0 \tag{4. 3}$$

immer identisch.

Diese Gleichung ist das Analogon der entsprechenden Identität des Finslerschen Raumes von skalarer Krümmung. (Vgl. [2] Gl. (15. 1) auf S. 776).

Beweis des Satzes 7. Offenbar ist nach (4. 2)

$$g^{ij} R^*_{o(i|o|j)} = R_{o\ oj}^{*j} = (n-1) R^*. \tag{4. 4}$$

Substituiert man die entsprechenden Werte von (4. 2) und (4. 4) in die Gleichung (4. 3), so wird (4. 3) wegen

$$l^j \|_k = \delta^j_k - l^j (l_k + p A_k), \tag{4. 5}$$

und in Hinsicht auf die Homogenität von nullter Dimension der Größen in den u^i, identisch erfüllt sein. Das beweist die Richtigkeit des Satzes 7.

Wir werden jetzt zwei Fälle näher untersuchen. Erstens wollen wir annehmen, daß der Tensor $\bar{R}_{oiok}$ symmetrisch ist, zweitens: den Tensor R_{oiok} soll symmetrisch sein. Wir beweisen den

Satz 8. $\mathfrak{R}_n$ *sei ein allgemeiner Raum von skalarer Krümmung. Ist der Tensor $\bar{R}_{oiok}$ kein Nulltensor, und ist er symmetrisch in i, k, dann ist $\mathfrak{R}_n$ entweder ein Finslerscher Raum, oder es ist $A_k = 0$.*

Beweis. Auf Grund des Satzes 1. folgt nach (4. 1a) und (4. 1b)

$$\bar{R}_{o\ ok}^{\ i} = R_{o\ ok}^{\ i} = B(x, u)(\delta^i_k - l^i l_k)\,^{7)}$$

Substituiert man diese Werte in (3. 7a), oder (3. 7b), so folgt nach der Gleichung (1. 9)

$$p A_k = 0;$$

Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes 8.

Bemerkung. *Ist $\mathfrak{R}_n$ ein Raum ($p \neq 0$) von skalarer Krümmung in Bezug auf die Invariante B, ist der Tensor R_{oiok} kein Nulltensor, und ist er symmetrisch in i, k, so hat $R_{o\ ik}^{\ s}$ die Form:*

$$R_{o\ ik}^{\ s} = B(\delta^s_k l_i - \delta^s_i l_k) + Z^s_{ik},$$

---

7) Der symmetrische Teil des Krümmungstensors ist nämlich jetzt der Krümmungstensor selbst.

wo $Z_{i\ k}^{\ s}$ einen in i, k schiefsymmetrischen Tensor bedeutet, für den die Relationen

$$A_s Z_{i\ k}^{\ s} = 0, \quad Z_{o\ k}^{\ s} = Z_{k\ o}^{\ s} = Z_{i\ k}^{\ o} = 0$$

bestehen.

BEWEIS. Nach unseren Annahmen hat der Tensor R_{oiok} die Form (vgl. die Gleichung (4. 1b)):

$$R_{oiok} = B(g_{ik} - l_i l_k). \tag{4. 6}$$

Aus (3. 3) folgt wegen der Symmetrie:

$$A^s (R_{osik} - l_i R_{osok} + l_k R_{osoi}) = 0,$$

und nach (4. 6) wird:

$$A^s (R_{osik} - B(g_{sk} l_i - g_{si} l_k)) = 0.$$

Daraus folgt schon, daß

$$R_{osik} - B(g_{sk} l_i - g_{si} l_k) = Z_{isk} \tag{4. 7}$$

einen Tensor bedeutet, der in i, k schiefsymmetrisch ist, und für den

$$A^s Z_{isk} = 0$$

besteht. Überschieben wir (4. 7) mit l^i, bzw. mit l^s, so wird nach (4. 6), bzw. nach der Schiefsymmetrie des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors:

$$Z_{osk} = 0, \qquad Z_{iok} = 0,$$

w. z. b. w.

Im zweidimensionalen Fall ist

$$Z_{isk} = 0.$$

Das folgt aus (3. 17a) nach der letzten Gleichung von (3. 15). Es ist nämlich im $\mathfrak{R}_2$

$$h_j \varepsilon_{km} = g_{jm} l_k - g_{jk} l_m, \qquad B = R.$$

§ 5. Schlußbemerkungen.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Definition und die Fundamentalrelationen der Räume von skalarer Krümmung angegeben. Zum Schluß wollen wir noch einige Tensoren bestimmen, die bei der Definition der Räume von skalarer Krümmung statt des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors auch anwendbar sind.

Bilden wir den Tensor

$$B_{h\ jk}^{\ i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial u^h} (L \sqrt{g^p} B^i_{\ jk}) = (l_h + p A_h) B^i_{jk} + B^i_{jk} \|_h \tag{5. 1}$$

mit

$$B^i_{jk} = \frac{1}{3L\sqrt{g^p}} \left[\frac{\partial}{\partial u^j} (L^2 g^p S^i_k) - \frac{\partial}{\partial u^k} (L^2 g^p S^i_j) \right], \quad S^i_j = g^{ir} R_{o(r|o|j)}, \tag{5. 2}$$

so haben wir das Analogon des Berwaldschen affinen Krümmungstensors $K_h{}^i{}_{jk}$ erhalten. Das folgt sofort aus den Relationen (2. 10), (13. 3) und (13. 4) von [2].[8]) Nach der Homogenität erster Dimension der Grundfunktion $L(x, u)$ ist

$$B_o{}^i{}_{jk} = B^i{}_{jk}, \tag{5.3}$$

und nach den schiefsymmetrischen Eigenschaften des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors folgt unmittelbar aus der Gleichung (5. 2) in Hinsicht auf die Homogenität der Größen in den u^i die Relation:

$$B^i{}_{ok} = g^{ir} R_{o(r|o|k)}. \tag{5.4}$$

Aus den Gleichungen (5. 3) und (5. 4) folgt, daß man für die Definition les BERWALDschen Krümmungsmaßes auch den Tensor $B_h{}^i{}_{jk}$ anwenden kann. Es besteht also:

$$B(x, u, \eta) = \frac{B_{oiok}\, \eta^i \eta^k}{(g_{ik} - l_i l_k)\eta^i \eta^k}.$$

Nach den Gleichungen (5. 2), (5. 3) und (5. 4) besteht die Relation

$$B_o{}^i{}_{jk} = \frac{1}{3L\sqrt{g^p}} \left[\frac{\partial}{\partial u^j} (L^2 g^p B_o{}^i{}_{ok}) - \frac{\partial}{\partial u^k} (L^2 g^p B_o{}^i{}_{oj}) \right], \tag{5.5}$$

die ein Analogon von (3. 31) ist. Die Gleichung (3. 31) besteht im Falle $p = 0$, also im Finslerschen Raum, auch im n-dimensionalen Fall. Im allgemeinen n-dimensionalen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$ hat man statt (3. 31) die Gleichung (5. 5). Das zeigt die Wichtigkeit des Tensors $B_h{}^i{}_{jk}$, da (3. 31) eine wichtige Relation des Finslerschen Raumes von skalarer Krümmung ist.

Literatur.

[1] L. BERWALD, On Finsler and Cartan Geometries III., *Ann. of Math.* **42** (1941), 84—112.

[2] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV., *Ann. of Math.* **48** (1947), 755—781.

[3] R. S. CLARK, The conformal geometry of a general differential metric space, *Proc. London Math. Soc.* (2) **53** (1951), 294—309.

[4] E. T. DAVIES, On metric spaces based on a vector density, *Proc. London Math. Soc.* (2) **49** (1947), 241—259.

[5] A. DEICKE, Über Finslerräume mit $A_i = 0$, *Arch. der Math.* **4** (1953), 45—51.

[6] J. G. FREEMAN, First and second variation of the length integral in a generalized metric space, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **15** (1944), 70—83.

[7] A. MOÓR, Metrische Dualität der allgemeinen Räume, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955), 171—196.

[8]) $B^i{}_{jk}$ ist aber nicht das Analogon von $K^i{}_{jk}$; das Analogon von $K^i{}_{jk}$ wäre nach (13.4) von [2] der Tensor $L\sqrt{g^p} B^i{}_{jk}$.

[8] J. A. Schouten und J. Haahtjes, Über die Festlegung von allgemeinen Maßbestimmungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten, *Monatsh. Math. Phys.* **43** (1936), 161—176.

[9] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insb. deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 7—17.

(Eingegangen am 5. September, 1955.)