Über das vollständige System von Differentialinvarianten im regulären Cartanschen Raum.

Dem Andenken von Professor T Szele gewidmet.

Von A. RAPCSÁK in Debrecen.

§ 1. Einführung.

Bekanntlich ist es eine der wichtigsten Aufgaben der differentialgeometrischen Forschung, die Ermittlung der Differentialinvarianten eines Raumes. In der vorliegenden Arbeit werden wir die von T. Y. THOMAS [6][1]) und O. VEBLEN [10], bzw. von O. VARGA [9] bei der Untersuchung affinzusammenhängender Punktmannigfaltigkeiten bzw. affinzusammenhängender Linienelementenmannigfaltigkeiten angewandte Methoden auf Cartansche Räume übertragen. Das resultat von T. Y. THOMAS und O. VEBLEN besagt, daß sämtliche Differentialinvarianten vorgeschriebener Ordnung einer affinzusammenhängenden Punktmannigfaltigkeit Funktionen der Normalaffinoren sind. Für den Fall affinzusammenhängender Linienelementenmannigfaltigkeiten hingegen hat O. VARGA gezeigt, daß sämtliche Differentialinvarianten vorgeschriebener Ordnung Funktionen der Normalaffinoren, der Überschiebungen der normalaffinoren mit v^{ϱ}, der $C^{\alpha}_{\beta\gamma}, \frac{\partial C^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial v^{\varrho}}, \dots \frac{\partial^s C^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial v^{\varrho_1} \dots \partial v^{\varrho_s}}$, von $\frac{\partial \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial v^{\varrho}}, \dots \frac{\partial \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial v^{\varrho_1} \dots \partial v^{\varrho_s}}$, der Überschiebungen dieser letzteren mit v^{ϱ}, sowie der kovarianten Derivationen der auftretenden Affinoren sind. Die Normalaffinoren können mit Hilfe des von O. VARGA [9][2]) eingeführten Hauptkrümmungsaffinors bestimmt werden Dementsprechend tritt bei den Invarianten statt des Normalaffinors der Hauptkrümmungsaffinor auf.

Auf Grund des gesagten können also in den erwähnten Räumen sämtliche Differentialinvarianten durch Elimination aus den Transformationsgesetzen derjenigen multilinearen Formen hergeleitet werden, deren Koeffizienten die erwähnten Affinoren sind.

[1]) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur am Ende der Arbeit.

[2]) Gleichung (3. 13): für den Cartanschen Raum s. L. BERWALD [1], Gleichung (12. 7).

In der vorliegenden Arbeit bestimmen wir sämtliche Differentialinvarianten vorgeschriebener Ordnung des Cartanschen Raumes.

Im § 2. definieren wir den regulären Cartanschen Raum. Hier werden auch die, für den Raum charakteristische wichtigste Funktionen und Operationen erörtert.

Im § 3. führen wir, mit Hilfe einer von O. VARGA herrührenden Methode, Normalkoordinaten im regulären Cartanschen Raume ein, was uns dann die Definition der Operation der Tensorerweiterung, sowie des Normaltensors ermöglicht.

Im § 4. wird ein wichtiger, sog. Reduktionssatz gewonnen, der es ermöglicht festzustellen, von welchen Ausdrücken eine gegebene Tensordifferentialinvariante abhängig ist.

Im § 5. bestimmen wir endlich, auf Grund der vorher gewonnenen Ergebnisse, sämtliche Differentialinvarianten vorgeschriebener Ordnung des Raumes.

Sämtliche, im Laufe unserer Darlegungen auftretende Größen sollen regulär-analytische Funktionen der entsprechenden Variabeln sein.

§ 2. Der reguläre Cartansche Raum.

Es sein $(x^1, \ldots, x^n, u_1, \ldots, u_n)$ die Koordinaten eines regulären Cartanschen Raumes, und es sei $L(x, u)$ die Grundfunktion des Raumes. (L ist eine positive homogene Funktion ersten Grades in u.)

Bekanntlich verhalten sich die u_i gegenüber einer zulässigen Koordinatentransformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{2. 1}$$

wie eine Vektordichte vom Gewicht 1, so daß die Transformationsformeln

$$\bar{u}_i = \Delta^{-1} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} u_k, \tag{2.2 a}$$

oder

$$u_i = \Delta \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{u}_k \tag{2. 2b}$$

mit

$$\Delta = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \right| \neq 0 \tag{2. 3}$$

gelten.

Der Maßtensor ist

$$g^{ik}(x, u) = \mathfrak{A}^{-\frac{1}{n-1}} \frac{\partial^2 \left[\frac{1}{2} L^2(x, u) \right]}{\partial u_i \, \partial u_k}, \tag{2. 4}$$

wo

$$\mathfrak{A} = \det \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2(x, u)}{\partial u_i \partial u_k} \right| \tag{2.5}$$

ist.

Das invariante Differential eines Vektors $\lambda^i(x, u)$ ist

$$D\lambda^i = d\lambda^i + C_k^{ih} \lambda^k du_h + \Gamma_{kh}^i \lambda^k dx^h, \tag{2.6}$$

wo die C_k^{ih} bzw. die Γ_{kh}^i homogene Funktionen (-1)-ten bzw. O-ten Grades in u_i des Hyperflächenelementes (x, u) sind.

Es gelten außerdem folgende Identitäten:

$$\begin{array}{ll} C_{ki}{}^h u_h = 0 & C^{kih} = C^{ikh} \\ \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = \Gamma_{ikh} + \Gamma_{khi} & \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u_h} = C_{ik}{}^h + C_{ki}{}^h \\ \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^h} = -\Gamma^{ik}{}_h - \Gamma^{ki}{}_h & \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial u_h} = -C^{ikh} - C^{kih}. \end{array} \tag{2.7}$$

Der Normal-Einheitsvektor des Hyperflächenelementes kann auf folgende Weise dargestellt werden:

$$l_i = \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \qquad l^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial u_i}. \tag{2.8}$$

Weiterhin werden wir die entsprechenden Indizes der mit l^i komponierten Größen mit O bezeichnen. Z. B.

$$T_i{}^k l^i = T_o{}^k.$$

Wir werden noch die folgende Operation benötigen:

$$f(x, u) \Big\|^i \overset{\text{def}}{=} \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial f}{\partial u_i}. \tag{2.9}$$

Auf Grund derselben gilt also

$$A^{ikh} \overset{\text{def}}{=} \frac{L}{\sqrt{g}} C^{ikh} = -\frac{1}{2} g^{ik} \Big\|^h \tag{2.10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ik}{}^o = A^{iko} = o \\ A^{okh} = A^{koh} = l^k A^h \\ A^h \overset{\text{def}}{=} A^{ooh} = -L \dfrac{\partial}{\partial u_h} \left(\dfrac{1}{\sqrt{g}} \right) = -\sqrt{g} \left(\dfrac{1}{\sqrt{g}} \right) \Big\|^h. \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Daraus ergibt sich leicht

$$\left\{ \begin{array}{ll} a) & L \|^i = L l^i \\ b) & \dfrac{L}{\sqrt{g}} \Big\|^i = \dfrac{L}{\sqrt{g}} (l^i - A^i) \\ c) & l_i \|^h = \delta_i^h - l_i (l^h - A^h) \\ d) & l^i \|^h = g^{ih} - l^i (l^h + A^h). \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Der Grad der Homogenität wird durch die Operation $\|^h$ offenbar nicht beeinträchtigt.

Falls wir statt der Γ^i_{kh} die in den unteren Indizes symmetrische Größe

$$\Gamma^{*i}_{kh} = \Gamma^i_{kh} + A_k{}^{ir}\,\Gamma_{roh} \tag{2.13}$$

einführen und die Bezeichnungen

$$\omega_i = D l_i \qquad \omega^i = D l^i \tag{2.14}$$

verwenden, so gewinnt (2.6) die Gestalt

$$D\lambda^i = d\lambda^i + \lambda^k\,(\Gamma^{*i}_{k\ h}\,dx^h + A_k{}^{ih}\,\omega_h). \tag{2.15}$$

Die Bedingung der Parallelverschiebung ist

$$D\lambda^i = o. \tag{2.15a}$$

Ist also

$$\omega_i = o \tag{2.15b}$$

dann ist das entsprechende Hyperflächenelementenfeld parallel.

Für die kovariante Ableitung einer Größe, die in u_i homogen Nullten Grades ist, ergibt sich im Cartanschen Raum folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \lambda^i|_h &= \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^h} + \lambda^i\|^m\,\Gamma^*_{moh} + \lambda^m\,\Gamma^{*i}_{mh} \\ \lambda_i|_h &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^h} + \lambda_i\|^m\,\Gamma^*_{moh} - \lambda_m\,\Gamma_i{}^{*m}{}_h. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die kovariante Ableitung ändert den Grad der Homogenität offenbar nicht, die kovarianten Indizes aber erfahren eine Zunahme um je eine Einheit.

Durch eine einfache Rechnung ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} &a)\ l_i|_h = \frac{\partial l_i}{\partial x^h} + l_i(A^m\,\Gamma^*_{moh} - \Gamma^*_{ooh}) = 0, \\ &b)\ l^i|_h = \frac{\partial l^i}{\partial x^h} - l^i\,(A^m\,\Gamma^*_{moh} + \Gamma^*_{ooh}) + \Gamma^{*io}{}_h + \Gamma^{*oi}{}_h = 0 \\ &c)\ \ g_{ik}|_h = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} + 2A_{ik}{}^m\,\Gamma^*_{moh} - \Gamma^*_{ikh} - \Gamma^*_{kih} = 0 \\ &d)\ \ g^{ik}|_h = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^h} + 2A^{ikm}\,\Gamma^*_{moh} - \Gamma^{*ik}{}_h - \Gamma^{*ki}{}_h = 0 \\ &e)\ \left.\frac{1}{\sqrt{g}}\right|_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) - \frac{1}{\sqrt{g}}(A^m\,\Gamma^*_{moh} - \Gamma^{*m}_{mh}) = 0 \\ &f)\ \ \sqrt{g}|_h = \frac{\partial}{\partial x^h}(\sqrt{g}) + \sqrt{g}\,(A^m\,\Gamma^*_{moh} - \Gamma^{*m}_{mh}) = 0 \\ &g)\ \ \frac{\partial L}{\partial x^h} + L(\Gamma^*_{ooh} - \Gamma^{*m}_{mh}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{2.17}$$

Die Tensoren der Raumkrümmung können in expliziter Form auf folgende Weise dargestellt werden (vgl. L. BERWALD [1], Gleichungen (12, 7)—(12, 14))

$$R_{r\ hk}^{\ i} = F_{r\ hk}^{\ i} - A_r^{im} F_{mohk} \tag{2. 18}$$

$$P_{r\ h}^{\ i\ k} = \Gamma_{r\ h}^{*\ i}\|^k - A_r^{ik}|_h - A_r^{ip}\, l_q\, \Gamma_{ph}^{*q}\|^k \tag{2. 19}$$

$$S_r^{\ ihk} = A^{mih} A_{mr}^{\ \ \ k} - A^{mik} A_{mr}^{\ \ \ h}, \tag{2. 20}$$

wo

$$F_{r\ hk}^{\ i} = \left(\frac{\partial \Gamma_{r\ h}^{*\ i}}{\partial x^k} + \Gamma_{r\ h}^{*\ i}\|^m \Gamma_{mok}^{*} + \Gamma_{r\ h}^{*\ m} \Gamma_{m\ k}^{*\ i}\right) - \tag{2. 21}$$
$$- \left(\frac{\partial \Gamma_{r\ k}^{*\ i}}{\partial x^h} + \Gamma_{r\ k}^{*\ i}\|^m \Gamma_{moh}^{*} + \Gamma_{r\ k}^{*\ m} \Gamma_{m\ h}^{*\ i}\right)$$

den für unsere weiteren Darlegungen höchst wichtigen sog. Hauptkrümmungstensor bedeutet. (O. VARGA [8]. Gleichung (3. 13)).

§ 3. Normalkoordinaten und Tensorenerweiterung.

Es sei $(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{u_i})$ ein festgewähltes Hyperflächenelement, und $\underset{(0)}{\lambda^i} = \lambda^i(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u})$ ein in diesem Hyperflächenelement definierter Vektor. Einer Idee von O. VARGA [9] folgend, können wir jetzt die Normalkoordinaten auf folgende Weise einführen.

Einem jeden Punkt einer Kurve $x^i = x^i(t)$ ordnen wir dasjenige Hyperflächenelement zu, welches die Kurve senkrecht schneidet. Wir definieren die Bogenlänge der Kurve auf Grund der dem Hyperflächenelement $(x(t), u(t))$ zugeordneten Euklidischen Maßbestimmung durch folgende Gleichung:

$$\frac{dx^i}{ds} = l^i(x(t), u(t)). \tag{3. 1}$$

Konstruieren wir jetzt diejenige, durch das Hyperflächenelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u})$ hindurchgehende Kurve, welche so beschaffen ist, daß die Parallelverschiebung des l^i entlang derselben ein Hyperflächenelementenfeld hervorbringt, für welches die Tangentenvektoren der gesuchten Kurve $x^i(s)$ parallel sind.

Die gesuchte Kurve und das Linienelementenfeld werden auf Grund von (2. 15a), (2. 15b) und (3. 1) durch die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x^i}{ds} = -\Gamma_{k\ l}^{*\ i}(x, l) \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \tag{3. 2a}$$

$$\frac{dl_i}{ds} = \Gamma_{iok}^{*}(x, l) \frac{dx^k}{ds} \tag{3. 2b}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x^i(s_0) = \underset{(0)}{x^i}$$

$$l_i(s_0) = \underset{(0)}{l_i} = \frac{\sqrt{g_0}}{L_0} \underset{(0)}{u_i}$$

$$\frac{d x^i(s_0)}{ds} = \underset{(0)}{\lambda^i}$$

geliefert.

Die regulären Lösungen von (3. 2a) und (3. 2b) können durch folgende Taylorsche Reihen dargestellt werden, welche für genügend kleines $|s-s_0|$ konvergent sind:

$$(3.4)\qquad x^i(s) = \underset{(0)}{x^i} + \underset{(0)}{\lambda^i}(s-s_0) - \frac{1}{2!}\Gamma^{*\,i}_{k_1 k_2}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\lambda^{k_1}}\underset{(0)}{\lambda^{k_2}}(s-s_0)^2 - \\ - \cdots - \frac{1}{n!}\Gamma^{*\,i}_{k_1\ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\lambda^{k_1}}\cdots\underset{(0)}{\lambda^{k_n}}(s-s_0)^n - \cdots$$

$$(3.5)\qquad l_i(s) = \underset{(0)}{l_i} + \Gamma^{*}_{iok_1}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\lambda^{k_1}}(s-s_0) + \frac{1}{2!}\Gamma^{*}_{iok_1 k_2}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\cdot \\ \cdot \underset{(0)}{\lambda^{k_1}}\underset{(0)}{\lambda^{k_2}}(s-s_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\Gamma^{*}_{iok_1\ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\lambda^{k_1}}\cdots\underset{(0)}{\lambda^{k_n}}(s-s_0)^n + \cdots$$

Die Größen

$$\Gamma^{*i}_{k_1\ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}),\quad \Gamma^{*}_{iok_1\ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$$

in (3, 4) und (3, 5) können mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$(3.6)\qquad \Gamma^{*i}_{k_1\ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}) = \frac{1}{n!}\sum_{P(k_1\ldots k_n)}\left[\frac{\partial \Gamma^{*\,i}_{k_1\ldots k_{n-1}}}{\partial x^{k_n}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Gamma^{*\,i}_{k_1 k_2\ldots k_{n-1}}}{\partial l_r} - \Gamma^{*}_{rok_n}(n-1)\,\Gamma^{*\,i}_{r\,k_1 k_2\ldots k_{n-2}}\Gamma^{*\,r}_{k_{n-1}k_n}\right]$$

$$(3.7)\qquad \Gamma^{*}_{iok_1\ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}) = \frac{1}{n!}\sum_{P(k_1\ldots k_n)}\left[\frac{\partial \Gamma^{*}_{iok_1\ldots k_{n-1}}}{\partial x^{k_n}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Gamma^{*}_{iok_1\ldots k_{n-1}}}{\partial l_r}\Gamma^{*}_{rok_n} - (n-1)\,\Gamma^{*}_{ior\,k_1\ldots k_{n-2}}\Gamma^{*}_{k_{n-1}k_n}\right]$$

bestimmt werden. (Es soll über sämtliche Permutationen von $k_1 k_2 \ldots k_n$ summiert werden.)

BEMERKUNG: $\Gamma^{*}{}_{j}{}^{i}{}_{k}(x, u)$ und $\Gamma^{*}_{ioj}(x, u)$ sind in u homogen nullten Grades, so daß

$$\Gamma^{*\,i}_{j\,k}(x, u) \equiv \Gamma^{*\,i}_{j\,k}(x, l)$$

gilt.

Falls wir den Vektor $\overset{}{\underset{(0)}{\lambda^i}}$ unter Festhaltung des Hyperflächenelementes $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u})$ variieren, so ergibt sich eine Kurvenschar, welche eine Umgebung des Punktes $\underset{(0)}{x^i}$ einfach bedeckt.

Führen wir nämlich durch die Gleichungen

$$\bar{x}^i = \underset{(0)}{\lambda^i}(s-s_0) \tag{3.8}$$

neue Koordinaten $\bar{x}^i$ ein, dann wird aus (3.4) formal:

$$x^i = \underset{(0)}{x^i} + \bar{x}^i - \frac{1}{2!}\Gamma^{\bullet\, i}_{k_1 k_2}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\, \bar{x}^{k_1}\bar{x}^{k_2} - \tag{3.9}$$

$$- \cdots - \frac{1}{n!}\Gamma^{\bullet\, i}_{k_1 k_2 \ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\, \bar{x}^{k_1}\bar{x}^{k_2}\cdots\bar{x}^{k_n} - \cdots$$

Die Gleichung (3.9) stellt eine Koordinatentransformation dar, für welche offenbar

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)_{\bar{x}^k=0} = \delta^i_k \tag{3.10}$$

gilt. Wegen (3.10) ist also die Koordinatentransformation (3.9) in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes $\bar{x}^k = 0$ umkehrbar eindeutig. Die Inverse von (3.9) sei:

$$\bar{x}^i = H^i(x - \underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}). \tag{3.11}$$

Aus (3.9), (3.10) und (2.2a) folgern wir, daß die Komponenten des Hyperflächenelementes $(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{u_i})$ im neuen Koordinatensystem $\bar{x}^k$ durch die Größen $(0, \underset{(0)}{u_i})$ bestimmt werden, wo $\underset{(0)}{u_i} = \frac{L_0}{\sqrt{g_0}}\, \underset{(0)}{l_k}$ ist.

Setzen wir (3.8) in (3.5) ein, so ergibt sich

$$l_i = \underset{(0)}{l_i} + \Gamma^{\bullet}_{i0k_1}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\, \bar{x}^{k_1} + \cdots + \frac{1}{n!}\Gamma^{\bullet}_{i0k_1\ldots k_n}\, \bar{x}^{k_1}\cdots\bar{x}^{k_n}\cdots. \tag{3.12}$$

Wegen (3.12) und (3.11) wird das zur Konstruktion der Kurvenschar benötigtes Hyperflächenelementenfeld durch die eindeutige Funktion

$$l_i = R_i(x, \underset{(0)}{x}, L_0, g_0, u_0) \tag{3.13}$$

dargestellt. Deswegen wird eine genügend kleine Umgebung des Punktes $\underset{(0)}{x}$ von der Kurvenschar einfach bedeckt.

Die Koordinaten $\bar{x}^i$, welche eine Verallgemeinerung der Descarteschen Koordinaten darstellen, nennen wir die zum Koordinatensystem x^i und zum Anfangshyperflächenelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u})$ gehörigen Riemannschen Normalkoordinaten.

Die Gleichung der Kurvenschar, welche der Einführung des Normalkoordinatensystems zugrunde liegt, ist wegen (3. 8) in den Normalkoordinaten linear:

$$\bar{x}^i(s) = \underset{(0)}{\lambda^i}(s - s_0). \tag{3. 14}$$

Mit Hilfe der somit eingeführten Normalkoordinaten können wir die Operation der Tensorenerweiterung definieren.

Es seien x^i und $\hat{x}^i$ zwei verschiedene Koordinatensysteme, und es sei

$$(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u}) \equiv (\underset{(0)}{\hat{x}}, \underset{(0)}{\hat{u}}). \tag{3. 15}$$

Die zu $\underset{(0)}{\lambda^i}$ und zum Anfangshyperflächenelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u})$ gehörigen Normalkoordinaten bezeichnen wir mit y^i, die zu $\hat{x}^i$ und zum gleichen Anfangshyperflächenelement gehörigen aber mit $\hat{y}_i$.

Offenbar gilt

$$\underset{(0)}{\hat{\lambda}^i} = \frac{\partial \hat{x}^i(\underset{(0)}{x})}{\partial x^k} \underset{(0)}{\lambda^k}. \tag{3. 16}$$

Aus (3. 4), (3. 8) und (3. 16) ergibt sich

$$\hat{y}^i = \frac{\partial \hat{x}^i(\underset{(0)}{x})}{\partial x^k} y^k. \tag{3. 17}$$

(3. 17) bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß die Koordinaten zweier zum gleichen Anfangshyperflächenelement gehörigen Normalkoordinatensysteme durch eine homogene lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten miteinander zusammenhängen.

Falls nun die Komponenten einer Größe in zwei zum gleichen Anfangshyperflächenelement gehörigen Koordinatensystemen miteinander derart zusammenhängen wie die Komponenten eines Tensors, dann transformieren sich die Ableitungen nach y^i bzw. $\hat{y}^i$ dieser Größe (bis zu einer beliebigen Ordnung) in diesen Koordinaten wie die Komponenten eines Tensors.

Wegen (3. 17) gilt z. B.

$$\hat{\Gamma}^{\bullet\,i}_{j\,k}(\hat{y}, \hat{u}) = \Gamma^{\bullet\,a}_{b\,c}(y, u) \frac{\partial y^b}{\partial \hat{y}^j} \frac{\partial y^c}{\partial \hat{y}^k} \frac{\partial \hat{y}^i}{\partial y^a}, \tag{3. 18}$$

wegen (3. 17) und (3. 18)

$$\frac{\partial^n \hat{\Gamma}^{\bullet\,i}_{j\,k}}{\partial \hat{y}^{s_1} \cdots \partial \hat{y}^{s_n}} = \frac{\partial^n \Gamma^{\bullet\,a}_{b\,c}}{\partial y^{r_1} \cdots \partial y^{r_n}} \frac{\partial y^b}{\partial \hat{y}^j} \frac{\partial y^c}{\partial \hat{y}^k} \frac{\partial \hat{y}^i}{\partial y^a} \frac{\partial y^{r_1}}{\partial \hat{y}^{s_1}} \cdots \frac{\partial y^{r_n}}{\partial \hat{y}^{s_n}}. \tag{3. 19}$$

Mit Hilfe der Werte, welche die somit bezüglich des Koordinatensystems y^i gewonnene Komponenten auf dem betrachteten Hyperflächenelement annehmen, definieren wir nun die n-te Erweiterung der gegebenen Größe in den Koordinaten x^i. Offenbar ist diese Operation bezüglich der n kovarianten Indizes symmetrisch.

Wir nennen die n-te Erweiterung des Parameters Γ^{*i}_{jk} den n-ten Normaltensor.

Kehren wir nunmehr zu unseren ursprünglichen Bezeichnungen zurück, bezeichnen wir also die Koordinaten und die entsprechenden Normalkoordinaten durch (x^i, u_i) und durch $(\bar{x}^i, \bar{u}_i)$, so erhalten wir für den p-ten Normaltensor folgende Definitionsgleichung:

$$(3.20) \qquad \overset{p}{N}{}^i_{j\,k\,r_1\ldots r_p}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^p \overline{\Gamma}{}^{*i}_{jk}(0, \underset{(0)}{u})}{\partial \bar{x}^{r_1} \cdots \partial \bar{x}^{r_p}}.$$

Aus (3. 20) und (2. 13) ergibt sich

$$(3.21) \qquad \overset{p}{N}{}^i_{j\,k\,r_1\ldots r_p} = \overset{p}{N}{}^i_{r_{s_1}\ldots r_{s_p} jk} \qquad \overset{p}{N}{}^i_{j\,k\,r_1\ldots r_p} = \overset{p}{N}{}^i_{r_1\ldots r_p kj}$$

wo $(r_{s_1} \ldots r_{s_p})$ eine beliebige Permutation von $(r_1 \ldots r_p)$ bedeutet.

§ 4. Der Reduktionssatz.

Im folgenden beweisen wir einige Hilfssätze, die wir bei Beweise des Reduktionssatzes brauchen werden.

Wir bemerken vor allem, daß in einem Normalkoordinatensystem mit dem Anfangshyperflächenelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u})$ wegen des Transformationsgesetzes der Γ^{*i}_{jk} die Gleichung

$$(4.1) \qquad \overline{\Gamma}{}^{*i}_{jk}(o, \underset{(0)}{u}) = 0$$

gilt, woraus

$$(4.2) \qquad \overline{\Gamma}{}^{*}_{jok}(o, \underset{(0)}{u}) = 0$$

folgt, da

$$(4.3) \qquad \Gamma^{*}_{jok} = \Gamma^{*i}_{jk}\, l_i$$

gilt. Mit Rücksicht auf (4. 3) transformieren sich die Komponenten der Größen Γ^{*}_{jok} in zwei verschiedenen, aber zu demselben Koordinatensystem gehörigen Normalkoordinatensystemen so, wie die Komponenten eines Tensors. Darum können die Größen Γ^{*}_{jok} erweitert werden.

Leiten wir jetzt die auf ein Normalkoordinatensystem bezogene Gleichung (4. 3) nach $\bar{x}^i$ ab, so ergibt sich

$$(4.4) \qquad \frac{\partial^p \overline{\Gamma}_{jok}(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{x}^{s_1} \ldots \partial \bar{x}^{s_p}} = \sum_{r=0}^{p} \sum_{P(s_1 \ldots s_p)} \frac{1}{(p-r)!\, r!} \frac{\partial^{p-r} \overline{\Gamma}{}^{*i}_{jk}(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{x}^{s_1} \ldots \partial \bar{x}^{s_p}} \frac{\partial^r \bar{l}_i}{\partial \bar{x}^{s_{p-1}} \cdots \partial \bar{x}^{s_p}}.$$

(Die innere Summation gilt für sämtliche Permutationen von $(s_1 \ldots s_p)$).

Betrachten wir (4. 4) im Anfangshyperflächenelement, so folgt aus (4. 1), daß auf der rechten Seite von (4. 4) die Normaltensoren von der 1-ten bis zur p-ten Ordnung einschließlich, komponiert mit der Erweiterung von l_i bis zur Ordnung o--$(p-1)$, auftreten. (Unter der 0-ten Erweiterung von l_i verstehen wir $\underset{(0)}{\bar{l}_i(o,u)}$!)

Um die Erweiterung von l_i bestimmen zu können, leiten wir (2. 17a) nach x^i ab, und betrachten die Werte der Ableitung auf dem Anfangshyperflächenelement; falls wir dann noch (4. 1) sowie die Formel

$$\Gamma^*_{ooh} = \Gamma^{*ij}{}_h\, l_i\, l_j \tag{4. 5}$$

berücksichtigen, so ergibt sich

$$\frac{\partial \underset{(0)}{\bar{l}_i(o,u)}}{\partial \bar{x}^{s_i}} = 0. \tag{4. 6a}$$

$$\frac{\partial^2 \underset{(0)}{\bar{l}(o,u)}}{\partial \bar{x}^{s_1}\partial \bar{x}^{s_2}} = \overset{1}{N}{}^{jr}{}_{s_1 s_2}\, \bar{l}_j\, \bar{l}_r\, \bar{l}_i - \overset{1}{N}{}^{r}_{j\, s_1 s_2} l_r\, l_i\, A^j. \tag{4. 6b}$$

$$\frac{\partial^m \underset{(0)}{\bar{l}_i(o,u)}}{\partial \bar{x}^{s_1}\cdots\partial \bar{x}^{s_m}} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial \bar{x}^{s_2}\cdots\partial \bar{x}^{s_m}}\left[\bar{\Gamma}^{*jr}{}_{s_i}\, \bar{l}_j\, \bar{l}_r\, \bar{l}_i - \bar{\Gamma}^{*r}{}_{j\,s_1}\, \bar{l}_r\, \bar{l}_i\, \bar{A}^j\right]. \tag{4. 6c}$$

Indem wir (4. 6c) als Rekursionsformel ansehen, erhalten wir den folgenden

Satz I. *Die n-te Erweiterung von l_i ist eine Summe mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Glieder Produkte bzw. Komposita der folgenden Tensoren sind:*

1. *Die mit $\bar{l}_i$ komponierten Normaltensoren bis zur Ordnung* $0-(m-1)$ *einschließlich.*

2. *Erweiterungen $\bar{A}^i$, bis zur Ordnung* $0-(m-2)$ *einschließlich.*

3. *Der Vektor $\bar{l}_i$*

Aus (4. 4) und aus dem Satz 1. folgt sofort der

Satz II. *Die p-te Erweiterung Γ^*_{roh} ist eine Summe mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Glieder Produkte bzw. Komposita der folgenden Tensoren sind:*

1. *Die mit $\bar{l}_i$ komponierten Normaltensoren bis zur Ordnung* $0-p$ *einschließlich.*

2. *Erweiterungen von $\bar{A}^i$, bis zur Ordnung* $0-(p-2)$ *einschließlich.*

3. *Der Vektor $\bar{l}_i$.*

Wenden wir jetzt die Operation $\|^s$ auf (4. 3) p-mal an, so ergibt sich:

$$\bar{\Gamma}^*_{jok}(\bar{x},\bar{u})\|^{s_1\cdots s_p} = \sum_{p=s}^{n}\sum_{P(s_1\cdots s_p)}\left(\frac{1}{(p-r)!\,r!}\,\bar{\Gamma}^{*i}_{jok}\|^{s_1\cdots s_{p-r}}\cdot \bar{l}_i\|^{s_{p-r+1}\cdots s_p}\right). \tag{4. 7}$$

(Der Kürze halber bezeichnen wir die Operation $\|^{s_1}\|^{s_2}\cdots\|^{s_p}$ mit $\|^{s_1\cdots s_p}$).

Beziehen wir (4.7) auf das Anfangshyperflächenelement, so wird ersichtlich, daß sich $\overline{\Gamma}^{*}_{jok}(o, \underset{(o)}{u})$ durch die Tensoren

$$\overline{\Gamma}^{*\,i}_{j\,k}\|^{s_1}, \ldots \overline{\Gamma}^{*\,i}_{j\,k}\|^{s_1\ldots s_p},\ \overline{l}_i, \overline{l}_i\|^{s_i}, \overline{l}^i\|^{s_1\ldots s_p}$$

ausdrücken läßt.

Andererseits folgt aus (2.12c)

$$l_i\|^{s_1} = l_i(g^{s_1 r} l_r - A^{s_1}). \tag{4.8}$$

Infolge von (4.8) und (2.10) läßt sich nun $\overline{l^i}\|^{s_1\ldots s_p}$ durch folgende Größen ausdrücken:

1. Durch $\overline{A}^{s_1}$, $\overline{A}^{s_1}\|^{s_2}, \ldots \overline{A}^{s_1}\|^{s_2\ldots s_p}$
2. Durch die Komposita der Tensoren $\overline{A}^{s_1 r s_2}$, $\overline{A}^{s_1 r s_2}\|^{s_3}, \ldots \overline{A}^{s_1 r s_2}\|^{s_3\ldots s_p}$ mit l^r.
3. Durch den Vektor $\overline{l}_i$ und den Tensor $\overline{g}^{ik}$.

Es gilt demnach der

Satz I'. $\overline{\Gamma}^{*}_{jok}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_1\ldots s_p}$ *ist eine summe mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Glieder Produkte bzw. Komposita folgender Tensoren sind:*

1. $\overline{A}^{s_1}\|^{s_2\ldots s_r}$ $1 \leqq r \leqq p$,
2. *Die Komposita der Tensoren* $A^{s_1 j s_2}\|^{s_3\ldots s_r}$ $2 \leqq r \leqq p$ *mit* l^r,
3. *Die Komposita der Tensoren* $\overline{\Gamma}^{*\,i}_{j\,k}\|^{s_1\ldots s_r}$ $1 \leqq r \leqq p$ *mit* l_i,
4. *Der Vektor* $\overline{l}_i$ *und der Tensor* $\overline{g}^{ik}$.

Leiten wir (4.7) n-mal nach $\overline{x}^i$, so ergibt sich, mit Rücksicht auf die Sätze I. und I'., sowie wegen (2.17a) der

Satz II'. *Die p-te Erweiterung von* $\overline{\Gamma}^{*}_{jok}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_1\ldots s_p}$ *ist durch die Erweiterung folgender Tensoren bestimmt:*

1. $\overline{A}^{s_1}\|^{s_2\ldots s_r}$ $\quad 1 \leqq r \leqq p$
2. $\overline{A}^{s_1 j s_2}\|^{s_3\ldots s_r}$ $\quad 2 \leqq r \leqq p$
3. $\overline{\Gamma}^{*i}_{jk}\|^{s_1\ldots s_r}$ $\quad 2 \leqq r \leqq p$
4. *Durch die Normaltensoren bis zur Ordnung* $1-(m-1)$ *einschließlich.*
5. *Durch den Vektor* $\overline{l}_i$ *und den Tensor* $\overline{g}^{ik}$.

Satz III. *Die p-te Erweiterung eines Tensors* $H_{i_1\ldots i_r}^{\ j_1\ldots j_s}$ *ist eine Summe mit ganzzahligen Koeffizienten, von deren ein Glied*

1. *die p-te kovariante Ableitung von* $\overline{H}$ *ist.*

Die übrigen Glieder bestehen aus Produkte bzw. aus Komposita folgender Tensoren:

2. *Kovariante Ableitung von* $\overline{H}$, *bis zur Ordnung* $o-(p-2)$ *einschließlich.*
3. *Kovariante Ableitung von* $\overline{H}\|^{s_1\ldots s_m}$ $(1 \leqq m \leqq p-1)$ *bis zur Ordnung* $o-(p-m-1)$.

4. *Kovariante Ableitung von* $\overline{\Gamma}^{*i}_{jk}\|^{s_1\ldots s_m}$ $(1 \leqq m \leqq p-2)$ *bis zur Ordnung* $o-(p-m-2)$.

5. *Kovariante Ableitung von* $\bar{A}^i\|^{s_1\ldots s_m}(o \leqq m \leqq p-3)$ *bis zur Ordnung* $o-(p-m-3)$.

6. *Kovariante Ableitung von* $\bar{A}^{ijk}\|^{s_1\ldots s_m}$ $(o \leqq m \leqq p-4)$ *bis zur Ordnung* $o-(p-m-4)$.

7. *Die Normalvektoren der Ordnungen* 1 bis p.

8. *Der Vektor* $\bar{l}_i$.

9. *Der Tensor* $\bar{g}^{ik}$.

BEWEIS. Zum Beweis unseres Satzes ziehen wir einen von O. VEBLEN ([11], Kapiel VI. § 12.) herrührendent und von O. VARGA [9] verallgemeinerten Gedankengang heran.

Offenbar gilt der zu beweisende Satz für $p=1$, da wegen (4. 1) und (4. 2) die erste Erweiterung eines Tensors mit seiner ersten kovarianten Ableitung zusammenfällt. (Für die Werte $p=5$ beweisen wir den Satz durch direktes Nachrechnen, wobei bereits sämtliche Größen auftreten.)

Wir beweisen jetzt den Satz durch vollständige Induktion für beliebiges p. Es soll also der Satz voraussetzungsgemäß für ein gewisses $p=k$ gelten. Wir leiten, unter Zugrundelegung von Normalkoordinaten, die erste kovariante Ableitung des Tensors H k-mal nach $\bar{x}^s$ ab, und betrachten den so gewonnenen Ausdruck im Anfangshyperflächenelement des Normalkoordinatensystems. Wegen (2. 16), (4. 1) und (4. 2) ergibt sich dann

$$\frac{\partial^k \overline{H}(\underset{(o)}{o}, u)|_{s_1}}{\partial \bar{x}^{s_2}\ldots\partial \bar{x}^{s_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} \overline{H}(\underset{(o)}{o}, u)}{\partial \bar{x}^{s_1}\ldots\partial \bar{x}^{s_{k+1}}} + \tag{4.9}$$
$$+\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{P(s_1,\ldots s_{k+1})}\left(\frac{1}{r!(k-r)!}\,\frac{\partial^r \overline{H}(\underset{(o)}{o}, u)}{\partial \bar{x}^{s_2}\ldots\partial \bar{x}^{s_{r+1}}}\cdot\frac{\partial^{n-r} \overline{\Gamma}^{*}_{tos_1}(\underset{(o)}{o}, u)}{\partial \bar{x}^{s_{r+2}}\ldots\partial \bar{x}^{s_{k+1}}}\right) + **.$$

Die Sterne bedeuten diejenigen Glieder, in welchen die ersten Normalvektoren, sowie die Erweiterungen von H bis zur Ordnung $(k-1)$ einschließlich, auftreten.

Auf der rechten Seite von (4.9) ist das erste Glied die $(k+1)$-te Erweiterung von H, die folgenden Glieder enthalten die Erweiterungen von H bis zur Ordnung $(k-1)$ einschließlich, sowie gemäß dem Satz II'. die Erweiterungen des Vektors A^i bis zur Ordnung $(k-2)$ einschließlich, dann den Vektor l_i, sowie wiederum die Normaltensoren bis zur Ordnung k einschließlich. Auf der linken Seite steht die k-te Erweiterung von $H|_{s_1}$. Da wir die Gültigkeit unseres Satzes für k vorausgesetzt haben, treten auf der linken Seite die im Satze erwähnte Tensoren, sowie die Tensoren $H|_{s_1}\|^{s_2\ldots s_m}$ $(2 \leqq m \leqq k)$ und deren kovariante Ableitungen bis zur Ordnung $(k-m)$, sowie die kovarianten Ableitungen von H von den Ordnungen $(1, 2, \ldots k-1,\ k+1)$ auf.

Untersuchen wir jetzt die im Satz unter 3. angegebenen Ausdrücke. Zu diesem Zwecke bilden wir die Tensoren $H|_{s_1}\|^{s_2\ldots s_m}$ und $H\|^{s_2\ldots s_m}|_{s_1}$ im Anfangshyperflächenelement des Normalkoordinatensystems.

Aus (2.17), (4.1) und (4.2) ergibt sich unmittelbar

$$\frac{\partial \bar{H}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_2\ldots s_m}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{H}(o, \underset{(o)}{u})}{\partial \bar{x}^k}\Bigg\|^{s_2\ldots s_m} \tag{4.10}$$

Aus den erwähnten Gleichungen folgt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \frac{\bar{L}(o, \underset{(o)}{u})}{\sqrt{\bar{g}(o, \underset{(o)}{u})}} = 0.$$

Aus (4.10) und (2.16) folgt nun:

$$\bar{H}(o, \underset{(o)}{u})|_{s_1}\|^{s_2\ldots s_h} = \bar{H}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_2\ldots s_h}\|_{s_1} + \bar{\Gamma}^{*}_{tos_1}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_2\ldots s_m} \bar{H}(o, \underset{(o)}{u})\|^{t} + **. \tag{4.11}$$

Durch Sterne werden in (4.11) diejenigen Glieder angedeutet, in welchen die Produkte der Tensoren

$$\bar{H}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_2\ldots s_{i+1}},\ \bar{\Gamma}^{*}_{tos_1}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_2\ldots s_i},\ \bar{\Gamma}^{a}_{jk}(o, \underset{(0)}{u})\|^{s_2\ldots s_i} \quad (2 \leqq i \leqq m) \tag{4.12}$$

auftreten.

Aus (4.11) und (4.12) folgt nun, daß die $\bar{H}|_{s_1}\|^{s_2\ldots s_m}$ $(2 \leqq m \leqq k)$ und deren kovariante Ableitungen bis zur Ordnung $(k-m)$ folgende Tensoren enthalten: die $\bar{H}\|^{s_2\ldots s_m}$ $(2 \leqq m \leqq k+1)$ und deren kovariante Ableitungen bis zur Ordnung $(k+1-m)$ einschließlich; die Tensoren $\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o, \underset{(o)}{u})\|^{s_2\ldots s_m}$ $(2 \leqq m \leqq k)$ und deren kovariante Ableitungen bis zur Ordnung $(k+1-m-1)$ einschließlich; die Tensoren $\bar{A}^{s_1}\|^{s_2\ldots s_m}$ $(1 \leqq m \leqq k-2)$ und deren kovariante Ableitungen bis zur Ordnung $(k+1-m-3)$ einschließlich; die Tensoren $\bar{A}^{s_1 j s_2}\|^{s_3\ldots s_m}$ $(2 \leqq m \leqq k-3)$ und deren kovariante Ableitungen bis zur Ordnung $(k+1-m-4)$ einschließlich. Das besagt aber, daß auch der aus (4.9) für die $k+1$-te Erweiterung von H zu gewinnende Ausdruck die im Satze aufgezählten Glieder enthält, nur daß hier $p=k+1$ gilt. Damit haben wir den Beweis von Satz III. vollendet.

Sind die Komponenten eines Tensors $H_{i_1\ldots i_k}{}^{j_1\ldots j_s}$ Funktionen der Größen Γ^{*s}_{pk} und g^{ik} sowie der Derivierten dieser Größen nach x^i und u_i, und bewahrt diese Abhängigkeit in jedem Koordinatensystem dieselbe Form, dann ist der betreffende Tensor eine Differentialinvariante des Cartanschen Raumes. Die Ordnung der Invariante ist der Grad der höchsten Ableitung.

Auf Grund der Satzes III. können wir nun folgenden sog. Reduktionssatz aussprechen:

Satz IV. *Die Tensordifferentialinvariante* $\bar{H}_{i_1 \ldots i_k}{}^{j_1 \ldots j_e}$ *ist eine Funktion der Tensoren*

$$A_{jk}{}^{i}.\ A_{jk}{}^{i}\|^{s_1}, \ldots A_{jk}{}^{i}\|^{s_1 \ldots s_r}$$
$$A^{i},\ A^{i}\|^{s_1}, \ldots A^{i}\|^{s_1 \ldots s_r}$$
$$\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\|^{s_1}, \ldots \overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\|^{s_1 \ldots s_r}$$

der kovarianten Ableitungen dieser Tensoren, der Normaltensoren, sowie des Vektors l_i *und des Tensors* g^{ik}.

BEWEIS. Nach Unseren Voraussetzungen sind die differentialinvarianten Komponenten des Tensors H solche Funktionen der Größen $\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}$ und g^{ik}, sowie der Ableitungen dieser Größen, welche in jedem Koordinatensystem die Gleiche Form bewahren. Wir können also ein, zu einem beliebigen Anfangshyperflächenelement gehöriges Normalkoordinatensystem einführen. Bestimmen wir die Werte der erwähnten Größen auf dem Anfangshyperflächenelement, so sind diese offenbar Erweiterungen der Größen

$$g^{ik}, g^{ik}\|^{s_1} \ldots, g^{ik}\|^{s_1 \ldots s_r}, \overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\|^{s_1}, \ldots \overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\|^{s_1 \ldots s_r}$$

da ja $\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}$ im Anfangshyperflächenelement gleich Null ist (4. 1).

Auf Grund des Satzes III. können Aber diese Erweiterungen durch die im Satz IV. Erwähnten Tensoren ausgedrückt werden, woraus der Satz IV. folgt.

§ 5. Elimination der im Reduktionssatz auftretenden Normaltensoren mit Hilfe des Hauptkrümmungstensors.

In diesem Kapitel beweisen wir den folgenden Hauptsatz:

Satz V. *Jede Tensordifferentialinvariante des regulären Cartanschen Raumes ist eine Funktion der Tensoren*

$$A_{jk}{}^{i},\ A_{jk}{}^{i}\|^{s_1}, \ldots A_{jk}{}^{i}\|^{s_1 \ldots s_r}$$
$$A^{i},\ A^{i}\|^{s_1}, \ldots A^{i}\|^{s_1 \ldots s_r}$$
$$\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\|^{s_1}, \ldots \overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk}\|^{s_1 \ldots s_r}$$

der kovarianten Ableitungen dieser Tensoren, des Hauptkrümmungstensors und seiner kovarianten Ableitungen, sowie des Vektors l_i *und des Tensors* g^{ik}.

Daraus folgt, daß wir die Differentialinvarianten durch Elimination aus den Transformationsformeln derjenigen multilinearen Formen erhalten können, deren Koeffizienten die erwähnten Tensoren sind.

Man sieht sofort, daß dieser Satz eine Übertragung des entsprechenden Satzes von O. VARGA [8] auf Cartansche Räume darstellt.

Um diesen Satz beweisen zu können, weisen wir vor allem darauf hin, daß die Gleichungen (3. 2a) und (3. 2b) koordinateninvariant sind. und demzufolge auch in dem, auf dem Anfangshyperflächenelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{u})$ definierten

Normalkoordinatensystem gültig sind. Es gelten also in unserer bisheriger Schreibweise die Gleichungen

$$(5.\,1a)\qquad \frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} = -\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(\bar{x},\bar{l})\frac{d\bar{x}^j}{ds}\frac{d\bar{x}^k}{ds}$$

$$(5.\,1b)\qquad \frac{d\bar{l}_i}{ds} = \bar{\Gamma}^{*}_{ioj}(\bar{x},\bar{l})\frac{d\bar{x}^j}{ds}.$$

Setzen wir die Lösungen (3. 8) der Gleichungssysteme (5. 1a) und (5. 1b) in (5. 1a) ein, so ergibt sich die Identität

$$\frac{d^2\underset{(0)}{\lambda^i}\cdot(s-s_0)}{ds^2} \equiv o \equiv -\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(\bar{x},\bar{l}(\bar{x}))\underset{(0)}{\lambda^j}\underset{(0)}{\lambda^k}$$

oder

$$(5.\,2)\qquad \bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(\bar{x},\bar{l}(\bar{x}))\bar{x}^j\bar{x}^k \equiv 0.$$

Falls wir jetzt die Reihenentwicklung der Funktion $\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(\bar{x},\bar{l}(\bar{x}))$ nach Potenzen von $\bar{x}$ in der Umgebung des Punktes $(o,\underset{(0)}{l})$ vornehmen, so ergibt sich wegen (5. 2)

$$(5.\,3)\qquad \frac{1}{2!}\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})\bar{x}^j\bar{x}^k + \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(p-2)^2!}\sum_{P(j,k,s,\dots,s_p)}\left[\frac{\partial^p\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{x}^{s_1}\dots\partial\bar{x}^{s_p}} + \frac{\partial\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{l}_s}\cdot\frac{\partial^p\bar{l}_s(o)}{\partial\bar{x}^{s_1}\dots\partial\bar{x}^{s_p}} + *\right]\bar{x}^{s_1}\dots\bar{x}^{s_p}\bar{x}^j\bar{x}^k\right\} \equiv 0.$$

Durch einen Stern werden in (5. 3) diejenigen Glieder bezeichnet, welche Komposita von Ausdrücken der Form

$$\frac{\partial\bar{l}_i(o)}{\partial\bar{x}^{s_1}\dots\partial\bar{x}^{s_m}}\qquad [1\leqq m\leqq p-1]$$

$$\frac{\partial^{m+h}\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{x}^{s_1}\dots\partial\bar{x}^{s_m}\partial\bar{l}_{a_1}\dots\partial\bar{l}_{a_2}},\qquad \left(1\leqq m\leqq p-1,\ h\leqq\left[\frac{p}{2}\right]\right)$$

sind.

Aus (5. 3) folgen die Identitäten

$$(5.\,4a)\qquad \bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l}) = 0$$

$$(5.\,4b)\qquad \sum_{P(j,k,s_1)}\left[\frac{\partial\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{x}^{s_1}} + \frac{\partial\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{l}_{m_1}}\frac{\partial\bar{l}_{m_1}(o)}{\partial\bar{x}^{s_1}}\right] = 0$$

$$(5.\,4c)\qquad \sum_{P(j;k,s_1,\dots,s_p)}\left[\frac{\partial^p\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{x}^{s_1}\dots\partial\bar{x}^{s_p}} + \frac{\partial\bar{\Gamma}^{*i}_{jk}(o,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{l}_{m_1}}\frac{\partial^p\bar{l}_{m_1}(o)}{\partial\bar{x}^{s_1}\dots\partial\bar{x}^{s_p}}\right] = 0.$$

Die in (5. 4c) auftretenden Erweiterungen $\dfrac{\partial^p l_m(o)}{\partial \overline{x}^{s_1} \ldots \partial \overline{x}^{s_p}}$ können nach den Sätzen I. und III. durch die Normaltensoren bis zur Ordnung $p-1$ einschließlich, durch die Tensoren $[A^i, A^i\|^{s_1}, \ldots A_{jk}{}^i, A_{jk}{}^i\|^{s_1}, \ldots \Gamma^{*i}_{jk}\|^{s_1}, \ldots]$, durch die kovarianten Ableitungen der in [ ] stehenden Tensoren, sowie durch den Vektor l_i dargestellt werden, so daß

$$(5.\,5) \qquad \frac{\partial^p \overline{l}_i(o)}{\partial \overline{x}^{s_1} \ldots \partial \overline{x}^{s_p}} = M_{s_1 \ldots s_p i}(\overset{p-1}{N}, \ldots, \overset{1}{N}, \ldots)$$

gilt. Die Punkte bezeichnen in (5. 5) die oben angeführten, von den Normaltensoren verschiedenen Tensoren.

Aus (5. 4c) und (5. 5) folgt

$$(5.\,6) \qquad \sum_{P(j,\,k,\,s_1,\,\ldots\,s_p)} \overset{p}{N}{}^i_{j k s_1, \ldots s_p} = P(\overset{p-1}{N}, \ldots \overset{1}{N}, \ldots).$$

Die Punkte haben hier dieselbe Bedeutung wie in (5. 5).

Aus (4. 6a), (5. 4b) und (3. 20) folgt unmittelbar

$$(5.\,7) \qquad \overset{1}{N}{}^i_{jks_1} + \overset{1}{N}{}^i_{ks_1j} + \overset{1}{N}{}^i_{s_1jk} = 0.$$

Indem wir die Gleichung (2. 2) auf Normalkoordinaten anwenden und im Anfangshyperflächenelement betrachten, sodann aber in das ursprüngliche Koordinatensystem zurückkehren, erhalten wir

$$(5.\,8a) \qquad F^i_{jks_1} = \overset{1}{N}{}^i_{jks_1} - \overset{1}{N}{}^i_{js_1k},$$

und

$$(5.\,8b) \qquad F^i_{kjs_1} = \overset{1}{N}{}^i_{kjs_1} - \overset{1}{N}{}^i_{ks_1j}.$$

Aus (3. 2) folgt

$$(5.\,8c) \qquad \overset{1}{N}{}^i_{jks_1} = \overset{1}{N}{}^i_{kjs_1}.$$

Aus (5. 7), (5. 8a), (5. 8b) und (5. 8c) erhalten wir nun

$$(5.\,9) \qquad 3\overset{1}{N}{}^i_{jks_1} = F^i_{jks_1} + F^i_{kjs_1}.$$

Um endlich den Hauptkrümmungstensor aus den Differentialinvarianten zu eliminieren, bilden wir seine $(p-1)$-te kovariante Derivierte.

Aus (2. 27) folgt

$$(5.\,10) \qquad F^i_{jks_1}|_{s_2}|_{s_3} \ldots |_{s_p} = \frac{\partial^p \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial x^{s_1} \ldots \partial x^{s_p}} - \frac{\partial^p \Gamma^{*i}_{js_1}}{\partial x^k \partial x^{s_2} \ldots \partial x^{s_p}} + **.$$

Die Sterne bezeichnen in (5. 10) diejenigen Glieder, in welchen Ableitungen von der Γ^{*i}_{jk} und Γ^{*}_{jok} niedrigerer als p-ter Ordnung auftreten.

Betrachten wir (5. 10) im Anfangshyperflächenelement eines Normalkoordinatensystems, und kehren wir sodann zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so erhalten wir

$$F^i_{jks_1}|_{s_2}\dots|_{s_p} = \overset{p}{N}{}^i_{jks_1\dots s_p} - \overset{p}{N}{}^i_{js_1ks_2\dots s_p} + P'. \tag{5. 11}$$

P' hat in (5. 11) dieselbe Bedeutung, wie P in (5. 6).

Berücksichtigen wir jetzt die Symmetrierelation (3. 21), so ergibt sich aus (5. 11), daß jede, von der Komponente $\overset{p}{N}{}^i_{jks_1\dots s_p}$ verschiedene Komponente des p-ten Normaltensors durch diese Komponente, durch gewisse Komponenten der $(p-1)$-ten kovarianten Ableitung des Hauptkrümmungstensors, sowie duch die in der Funktion auftretenden bereits erwähnten Tensoren darstellbar ist.

Somit erhalten wir aus (5. 6) die Relation

$$\overset{p}{N}{}^i_{jks_1\dots s_p} = S(F^i_{jks_1}|_{s_2}\dots|_{s_p}) + P''. \tag{5. 12}$$

In (5. 12) bedeutet S eine aus gewissen Komponenten der $(p-1)$-ten kovarianten Ableitung des Hauptkrümmungstensors gebildete Summe, P'' ist aber eine Funktion von ebensolcher Beschaffenheit, wie die in (5. 11).

Auf Grund der Rekursionsformel (5. 12) und von (5. 9) kann jeder Normaltensor durch folgende Tensoren ausgedrückt werden:

1. Den Hauptkrümmungstensor.
2. $A_i, A^i\|^{s_1}, \dots$.
3. $A_{jk}{}^i A_{jk}{}^i\|^{s_1}, \dots$.
4. Die Tensoren $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}\|^{s_1}, \dots$, die kovarianten Ableitungen desselben; den Vektor l_i; den Tensor g^{ik}.

Damit haben wir unseren Hauptsatz vollständig bewiesen.

Literatur.

[1] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-fachen Oberflächenintegrals, *Acta Math.* **71** (1939), 190—248.

[2] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie II, *Compositio Math.* **7** (1940), 141—176.

[3] E. Cartan, Les espaces metriques fondés sur la notion d'aire, *Actualités Sci. Ind.* **72**, Paris, 1933.

[4] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités Sci. Ind.* **79**, Paris, 1937.

[5] J. Douglas, The general theory of paths, *Ann. of Math.* **29** (1928), 143—168.

[6] T. Y. Thomas, A projective theory of affinely connected manifolds, *Math. Z.* **25** (1926), 723—733.

[7] J. M. Thomas and O. Veblen, Projective invariants of affine geometry of paths, *Ann. of Math.* **27** (1926), 279—296.

[8] O. VARGA, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 7—17.

[9] O. VARGA, Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrische Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathematiciens Hongrois 1950* (Budapest 1952), 131—162.

[10] O. VEBLEN, Normal coordinates of geometry of paths, *Proc. Nat. Acad Sci. U.S.A.* **8** (1922), 192—197.

[11] O. VEBLEN, Invariants of quadratic differential forms, Cambridge, 1933.

[12] O. VEBLEN, and T. Y. THOMAS, The geometry of paths, *Trans. Amer. Math. Soc.* **25** (1923), 551—608.

(Eingegangen am 26. September, 1955.)