Über Gruppen von Automorphismen in affinzusammenhängenden Räumen von Linienelementen.

Dem Andenken von Professor T. Szele gewidmet.

Von GY. SOÓS in Debrecen.

1. Einleitung.

Es sei eine Mannigfaltigkeit mit einer vorgeschriebenen differentialgeometrischen Struktur gegeben. Eine Abbildung dieser Mannigfaltigkeit auf sich wird ein Automorphismus der Mannigfaltigkeit genannt, falls sie die differentialgeometrische Struktur, mit der die Mannigfaltigkeit versehen ist, invariant läßt. Die Menge dieser Automorphismen bildet, unter gewißen Bedingungen, eine kontinuierliche Transformationsgruppe, die man die Gruppe von Automorphismen nennt.

In einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen (deren Grundelement in einer lokalen Koordinatenumgebung mit den Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n; v^1, \ldots, v^n)$ bestimmt ist) kann man z. B. eine metrische Struktur einführen, indem man die Existenz einer sog. Grundfunktion $L(x, v)$ postuliert. Eine andere Struktur, der affine Zusammenhang, ist durch ein Paar von differentialgeometrischen Objekten $\Gamma^{*i}_{jk}(x, v)$ und $C^i_{jk}(x, v)$ gegeben. Eine Abbildung $\bar{x}^i = \Phi^i(x)$, $\bar{v}^i = \Phi'^i(x, v)$, ($\Phi'$ bedeutet die durch Φ induzierte Abbildung der Linienelementen) heißt eine Isometrie (oder Bewegung), falls $L(x, v) = L(\Phi(x), \Phi'(v))$, ist, eine homothetische Transformation (Homothetie), falls

$$L(x, v) = cL(\Phi(x), \Phi'(v)), \; c = \text{const.}, \qquad c > 0$$

ist, eine Affinität, falls gleichzeitig

$$\Gamma^{*i}_{jk}(\Phi(x), \Phi'(v)) = \overline{\Gamma}^{*i}_{jk}(\Phi(x), \Phi'(v)); \; C^i_{jk}(\Phi(x), \Phi'(v)) = \bar{C}^i_{jk}(\Phi(x), \Phi'(v))$$

erfüllt ist, usw.

In einer früheren Arbeit [3], in der wir den Begriff der Gruppe von Affinitäten einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen eingeführt haben, beschäftigten wir uns mit dem Problem der Existenz einer solchen Gruppe. Um dasselbe Problem handelt es sich in einer Arbeit von H. HIRAMATU [2] im Falle der homothetischen Transformationen. In dieser Arbeit wird der

Zusammenhang dieser Gruppen untersucht und es wird unter anderem, gezeigt, daß man die Gruppe von homothetischen Transformationen als Untergruppe der Gruppe von Affinitäten auffassen kann. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz homothetischer Untergruppen aufgestellt.

2. Homothetische und affine Transformationen.

Damit eine infinitesimale Transformation

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\delta t \tag{2.1}$$

mit der zugehörigen Transformation des Linienelements

$$\bar{v}^i = v^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \left(\delta^i_j + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\delta t\right) v^j \tag{2.2}$$

eine infinitesimale Homothetie bzw. Affinität sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Relationen

$$\Delta_\xi g_{ij} = 2cg_{ij} \qquad (c = \text{const.},\ c > 0) \tag{2.3}$$

bzw.

$$\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk} = 0 \tag{2.4}$$ $$\Delta_\xi C^i_{jk} = 0 \tag{2.5}$$

bestehen. Der Operator Δ_ξ bedeutet die der infinitesimalen Transformation (2. 1) und (2. 2) entsprechende Lie-Ableitung.

Es ist leicht nachzuweisen, daß ein Vektorfeld ξ^i, das der Gleichung (2. 3) genügt, auch den Gleichungen (2. 4) und (2. 5) genügt. D. h., eine infinitesimale Homothetie einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen ist stets eine infinitesimale Affinität.

Wir geben nun eine tensoranalytische Charakterisierung der infinitesimalen Affinität.

Satz 1. *Die einer infinitesimalen Transformation* (2. 1) *und* (2. 2) *zugehörige Lie-Ableitung ist dann und nur dann mit den kovarianten Ableitungen erster und zweiter Art eines beliebigen Tensorfeldes vertauschbar, falls*

$$\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk} = 0, \quad \Delta_\xi C^i_{jk} = 0$$

ist, d. h. falls es sich um eine infinitesimale Affinität handelt.

Beweis. Es sei $H^i{}_j(x, v)$ ein beliebiges Tensorfeld. Die kovarianten Ableitungen erster und zweiter Art ordnen dem Tensorfeld die Tensorfelder

$$H^i{}_{j|k} = \frac{\partial H^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial H^i_j}{\partial v^s}\Gamma^{*s}_{mk} v^m + H^m{}_j \Gamma^{*i}_{mk} - H^i_m \Gamma^{*m}_{jk} \tag{2.6}$$

bzw.

$$H^i{}_{j;k} = \frac{\partial H^i{}_j}{\partial v^k} + H^m{}_j C^i_{mk} - H^i{}_m C^m_{jk} \tag{2.7}$$

zu. Die Lie-Ableitung $\Delta_\xi H^i{}_j$ ist wieder ein Tensor des Typus von $H^i{}_j$:

$$\Delta_\xi H^i{}_j = H^i{}_{j|k}\xi^k + \frac{\partial H^i{}_j}{\partial v^s}\xi^s_{|m}v^m - H^m_j \xi^i_{|m} + H^i_m \xi^m_{|j} \tag{2.8}$$

Es ist bekannt, daß

$$\Delta_\xi(H^i{}_{j.k}) = \Delta_\xi\left(\frac{\partial H^i{}_j}{\partial v^k}\right) = (\Delta_\xi H^i{}_j)_{.k} \tag{2.9}$$

Nach einer einfachen Rechnung bekommt man die folgende Vertauschungsformel:

$$\begin{aligned}(\Delta_\xi H^i{}_j)_{|k} - \Delta_\xi(H^i{}_{j|k}) = H^i{}_{j.s}v^m \Delta_\xi \Gamma^{*s}_{mk} + \\ + H^i{}_m \Delta_\xi \Gamma^{*m}_{jk} - H^m{}_j \Delta_\xi \Gamma^{*i}_{mk}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Wendet man den Lieschen Ableitungsoperator auf die Gleichung (2. 7) an, so erhält man auf Grund (2. 9) die Formel:

$$\begin{aligned}\Delta_\xi(H^i_{j;k}) = \Delta_\xi(H^i_{j.k}) + C^i_{mk}\Delta_\xi H^m{}_j + H^m{}_j \Delta_\xi C^i_{mk} - C^m_j{}_k \Delta_\xi H^i_m - \\ - H^i{}_m \Delta_\xi C^m_j{}_k = (\Delta_\xi H^i{}_j)_{;k} + H^m{}_j \Delta_\xi C^i_{mk} - H^i_m \Delta_\xi C^m_j{}_k\end{aligned}$$

d. h.

$$\Delta_\xi(H^i{}_{j;k}) - (\Delta_\xi H^i{}_j)_{;k} = H^m{}_j \Delta_\xi C^i_{mk} - H^i_m \Delta_\xi C^m_j{}_k. \tag{2.11}$$

Wegen der Willkürlichkeit des Tensorfeldes folgt, daß die rechten Seiten der Gleichungen (2. 10) und (2. 11) dann und nur dann verschwinden, falls $\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk} = 0$, $\Delta_\xi C^i_{jk} = 0$ ist, d. h., falls die infinitesimale Transformation eine infinitesimale Affinität ist.

Es gilt der

Satz 2. *Genügt eine infinitesimale Transformation T den folgenden Bedingungen:*

a) *T ist eine infinitesimale Affinität,*

b) $\Delta_\xi g_{ij} = 2\psi(x, v)\, g_{ij}$ *so stellt T notwendigerweise eine infinitesimale Homothetie dar.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß aus den Voraussetzungen *a)* und *b)* die Relation $\psi(x, v) = \text{const.}$ folgt. Die folgende Formel ist bekannt:

$$\begin{aligned}\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ia}\{(\Delta_\xi g_{aj})_{|k} + (\Delta_\xi g_{ak})_{|j} - (\Delta_\xi g_{jk})_{|a}\} - \\ - C^i_{ja}\Delta_\xi \Gamma^{*a}_{bk} v^b - C^i_{ka}\Delta_\xi \Gamma^{*a}_{bj} v^b + g^{ia} C_{jkb}\Delta_\xi \Gamma^{*b}_{ca} v^c.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Nach *a)* und *b)* ist $\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk} = 0$ und $\Delta_\xi g_{aj} = 2\psi(x, v) g_{aj}$. Setzt man diese Werte in (2. 12) ein, so wird:

$$\frac{1}{2} g^{ia}\{2\psi_{|k} g_{aj} + 2\psi_{|j} g_{ak} - 2\psi_{|a} g_{jk}\} = \psi_{|k}\delta^i_j + \psi_{|j}\delta^i_k - \psi_{|a} g^{ia} g_{jk} = 0.$$

Es sei nun $i=j$ und wir summieren über diese Indizes:

$$n\psi_{|k}+\psi_{|k}-\psi_{|k}=n\psi_{|k}=0$$

woraus

$$\psi(x, v)_{|k}=0 \text{ folgt.} \tag{2.13}$$

Da T eine infinitesimale Affinität ist, gilt $\Delta_\xi C^i_{jk}=0$. Wir derivieren die Gleichung

$$\Delta_\xi g_{ij}=2\psi g_{ij}$$

partiell nach v^l:

$$\Delta_\xi g_{ij.l}=2\psi g_{ij.l}+2g_{ij}\psi_{.l}. \tag{2.14}$$

Es ist aber

$$\Delta_\xi C^m_{i\ j}=\Delta_\xi(g^{ml}C_{ijl})=(\Delta_\xi g^{ml})C_{ijl}+g^{ml}\Delta_\xi C_{ijl}=0.$$

Da wegen $g^{ml}g_{mk}=\delta^l_k$

$$\Delta_\xi g^{ml}=-2\psi g^{ml}$$

ist, haben wir aus der vorigen Gleichung

$$\Delta_\xi C_{ijl}=2\psi C_{ijl}.$$

Diese Gleichung (2.14) kann man daher in der Form

$$\Delta_\xi g_{ij.l}=2\Delta_\xi C_{ijl}=4\psi C_{ijl}=4\psi C_{ijl}+2g_{ij}\psi_{.l}$$

schreiben, woraus

$$2g_{ij}\psi_{.l}=0$$

oder

$$\psi_{.l}=0 \tag{2.15}$$

folgt.

Nach (2.13) ist

$$\psi_{|k}=\frac{\partial\psi}{\partial x^k}-\psi_{.l}\Gamma^{*l}_{mk}v^m=0.$$

Nimmt man (2.15) in Betracht, so folgt $\dfrac{\partial\psi}{\partial x^k}=0$, der Skalar ψ ist daher eine Konstante. Damit ist Satz 2. bewiesen.

3. Homothetie in Finslerschen Räumen skalarer Krümmung.

Es ist bekannt, (Berwald [1]), daß in einem Finslerschen Raum skalarer Krümmung die folgende Relation zwischen dem Krümmungstensor R^j_{0im} und dem Krümmungsmaß R besteht:

$$\begin{aligned} R_{0\ im}^{\ j}=\tilde{R}^j_{0im}=\frac{1}{3}R_{\|i}(\delta^j_m-l^jl_m)-\\ -\frac{1}{3}R_{\|m}(\delta^j_i-l^jl_i)+R(l_i\delta^j_m-l_m\delta^j_i).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Diese Relation ist charakteristisch, da aus der obigen Form des Tensors $R_0{}^j{}_{im}$ die Eigenschaft der skalaren Krümmung folgt.

Ist in Gleichung (3. 1) $R_{||i}=0$, so folgt aus einer von L. BERWALD herrührenden Verallgemeinerung des SCHURschen Satzes, daß sich R notwendigerweise auf eine Konstante reduziert. In diesem Fall ist

$$R^j_{0im}=\tilde{R}^j_{0im}=R(l^l\delta^j{}_m-l_m\delta^j{}_i)=Rl^s(g_{is}\delta^j_m-g_{ms}\delta^j_i). \tag{3. 2}$$

Ist eine infinitesimale Homothetie gegeben, so gelten außer den definierenden Gleichungen

$$\Delta_\xi g_{ij}=2cg_{ij}, \tag{3. 3}$$

unter anderem auch die Gleichungen

$$\Delta_\xi \tilde{R}^j_{kim}=0,$$

aus denen die Gleichung

$$\Delta_\xi R_0{}^j{}_{im}=\Delta_\xi \tilde{R}^j_{0im}=0 \tag{3. 4}$$

folgt. Wenden wir nun den Lieschen Ableitungsoperator auf (3. 2) an, so wird wegen (3. 3) und (3. 4)

$$\begin{aligned}\Delta_\xi R_0{}^j{}_{im}=\Delta_\xi \tilde{R}_0{}^j{}_{im}=Rl^s(2c\delta^j{}_m g_{is}-2c\delta^j{}_i g_{ms})=\\ 2cRl^s(\delta^j_m g_{is}-\delta^j{}_i g_{ms})=2cR_0{}^j{}_{im}.\end{aligned} \tag{3. 5}$$

Ist $R\neq 0$, dann ist auch $R_0{}^j{}_{im}\neq 0$, daher kann (3. 5) nur im Falle $c=0$ bestehen. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *In einem Finslerschen Raum konstanter Krümmung $R\neq 0$ kann keine eigentliche ($c\neq 0$) infinitesimale homothetische Transformation existieren.*

Dieser Satz liefert eine Verallgemeinerung einer bekannten Behauptung der Theorie der Riemannschen Geometrie konstanter, nichtverschwindender Krümmung.

4. Die Gruppe der homothetischen Transformationen, als Untergruppe von Affinitäten.

Setzen wir die Existenz einer r-parametrigen Gruppe von Affinitäten G_r in einem Finslerschen Raum voraus, dann haben wir

$$\Delta_{\xi_\beta}\Gamma^{*i}_{jk}=0,\ \Delta_{\xi_\beta}C^i_{jk}=0, \qquad (\beta=1,\ldots,r)$$

wobei die Vektorfelder ξ^i_β eine Basis der Lieschen Algebra der Transformationsgruppe G_r bilden.

Es fragt sich, unter welchen Bedingungen Konstanten $c^\sigma(\sigma=1,\ldots,r)$ und c derart existieren, daß die durch den Vektor $\xi^i=c^\sigma\xi^i_\sigma$ bestimmte infinitesimale Transformation eine infinitesimale homothetische Transformation darstellt, d. h. die Gleichungen

$$(4.1)\qquad \Delta_{\xi} g_{ij} = c^{\sigma} \Delta_{\xi_{\sigma}} g_{ij} = 2c g_{ij}$$

bestehen.

Damit die Gleichungen (4. 1) in den Unbekannten c^{σ} und c ein Lösungssystem haben, ist es notwendig, daß

$$(4.2)\qquad \text{Rang}\, \|\Delta_{\xi_{\sigma}} g_{ij}, g_{ij}\| < r+1.$$

Ist der Rang nämlich $s < r+1$, so haben wir $r+1-s$ linear unabhängige Lösungssysteme $\varphi^{\sigma}_{\alpha}(x, v)$, $\psi_{\alpha}(x, v)$:

$$\varphi^{\sigma}_{\alpha} h_{\sigma ij} = 2\psi_{\alpha} g_{ij} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r+1-s)$$

wobei $h_{\sigma ij} = \Delta_{\xi_{\sigma}} g_{ij}$ ist.

Wir zeigen, daß die Bedingung (4. 2) auch hinreichend ist, da aus den Grundlösungen (4. 3) ein konstantes Lösungssystem immer bestimmbar ist.

Wir differenzieren deswegen (4. 3) kovariant nach x^k:

$$(4.4)\qquad \varphi^{\sigma}_{\alpha|k} h_{\sigma ij} + \varphi^{\sigma}_{\alpha} h_{\sigma ij|k} = 2\psi_{\alpha|k} g_{ij}.$$

Da $\Delta_{\xi\sigma} \Gamma^{*i}_{jk} = 0$ ist, ist nach Satz 2. die kovariante Ableitung mit der Lieschen Ableitung vertauschbar. Folglich ist

$$h_{\sigma ij|k} = (\Delta_{\xi_{\sigma}} g_{ij})_{|k} = \Delta_{\xi_{\sigma}}(g_{ij|k}) = 0.$$

Dann haben wir aus (4. 4)

$$\varphi^{\sigma}_{\alpha|k} h_{\sigma ij} = 2\psi_{\alpha|k} g_{ij}$$

d. h., außer den Funktionen $\varphi^{\sigma}_{\alpha}$ bzw. ψ_{α} sind auch die Funktionen $\varphi^{\sigma}_{\alpha|k}$ bzw. $\psi_{\alpha|k}$ Lösungen von (4. 1). Man kann also Funktionen $L^{\beta}_{\alpha k}$ derart finden, daß

$$(4.5)\qquad \varphi^{\sigma}_{\alpha|k} = L^{\beta}_{\alpha k} \varphi^{\sigma}_{\beta}, \quad \psi_{\alpha|k} = L^{\beta}_{\alpha k} \psi_{\beta}$$

bestehen.

Wir derivieren nun (4. 3) partiell nach v^l:

$$(4.6)\qquad \varphi^{\sigma}_{\alpha.l} h_{\sigma ij} + \varphi^{\sigma}_{\alpha} h_{\sigma ij.l} = 2\psi_{\alpha.l} g_{ij} + 2\psi_{\alpha} g_{ij.l}.$$

Da $\Delta_{\xi_{\sigma}} C^{i}_{jk} = 0$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} h_{\sigma ij.l} &= (\Delta_{\xi_{\sigma}} g_{ij})_{.l} = \Delta_{\xi_{\sigma}} g_{ij.l} = 2\Delta_{\xi_{\sigma}} C_{ijl} = \\ &= 2\Delta_{\xi_{\sigma}}(g_{im} C^{m}_{j\,l}) = 2(\Delta_{\xi_{\sigma}} g_{im}) C^{m}_{j\,l} + 2 g_{im} \Delta_{\xi} C^{m}_{j\,l} = \\ &= 2 C^{m}_{j\,l} \Delta_{\xi_{\sigma}} g_{im} = 2 C^{m}_{j\,l} h_{\sigma im}. \end{aligned}$$

Setzen wir die erhaltene Werte in (4. 6) ein, so kommt:

$$\varphi^{\sigma}_{\alpha.l} h_{\sigma ij} + 2\varphi^{\sigma}_{\alpha} C^{m}_{j\,l} h_{\sigma im} = 2\psi_{\alpha.l} g_{ij} + 2\psi_{\alpha} g_{ij.l}$$

$$\varphi^{\sigma}_{\alpha.l} h_{\sigma ij} + 2 C^{m}_{j\,l}(\varphi^{\sigma}_{\alpha} h_{\sigma im} - 2\psi_{\alpha} g_{im}) = 2\psi_{\alpha.l} g_{ij}.$$

Es ist aber $\varphi_\alpha^\sigma h_{\sigma im} = 2\psi_\alpha g_{im}$, daher folgt aus der vorigen Gleichung

$$\varphi_{\alpha.l}^\sigma h_{\sigma ij} = 2\psi_{\alpha.l} g_{ij}.$$

Dies bedeutet, daß auch die Funktionen $\varphi_{\alpha.l}^\sigma$ und $\psi_{\alpha.l}$ Lösungen sind. Folglich existieren Funktionen $M_\beta{}^\alpha{}_l$ derart, daß

$$\varphi_{\alpha.l}^\sigma = M_\alpha{}^\beta{}_l \varphi_\beta^\sigma; \quad \psi_{\alpha.l} = M_\alpha{}^\beta{}_l \psi_\beta. \tag{4.7}$$

Damit ein konstantes Lösungssystem existiert, sollen Funktionen λ^α mit der Eigenschaft

$$c^\sigma = \lambda^\beta \varphi_\beta^\sigma \tag{4.8}$$
$$c = \lambda^\beta \psi_\beta \qquad (\beta = 1, \dots, r+1-s) \tag{4.9}$$

gewählt werden können.

Wir zeigen, daß Funktionen λ^α mit obiger Eigenschaft wirklich existieren, indem wir für sie ein unbeschränkt integrables Differentialgleichungssystem aufstellen.

Zu diesem Zwecke bilden wir die kovariante Ableitung von (4.8). Dann wird auf Grund von (4.5):

$$\lambda_{|k}^\beta \varphi_\beta^\sigma + \lambda^\beta \varphi_{\beta|k}^\sigma = (\lambda_{|k}^\alpha + \lambda^\beta L_{\beta k}^\alpha)\varphi_\alpha^\sigma = c^\sigma{}_{|k} = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der φ_α^σ ist

$$\lambda_{|k}^\alpha + \lambda^\beta L_{\beta k}^\alpha = 0. \tag{4.10}$$

Die partielle Ableitung von (4.8) nach v^l gibt auf Grund von (4.7):

$$\lambda^\alpha_{.l} + \lambda^\beta M_{\beta l}^\alpha = 0. \tag{4.11}$$

Die kovariante, bzw. partielle Ableitungen von (4.9) führen im Wesentlichen zu einem mit (4.10) und (4.11) äquivalenten Gleichungssystem.

Es genügt daher zu zeigen, daß (4.10) und (4.11) für λ^α unbeschränkt integrabel sind. Wir stellen nun die Integrabilitätsbedingungen von (4.10) und (4.11) zusammen.

Es ist auf Grund von (4.10):

$$\lambda_{|k|l}^\beta - \lambda_{|l|k}^\beta = \lambda^\gamma (L_{\gamma l|k}^\alpha - L_{\gamma k|l}^\alpha + L_{\beta k}^\alpha L_{\gamma l}^\beta - L_{\beta l}^\alpha L_{\gamma k}^\beta). \tag{4.12}$$

Nach einer bekannten Vertauschungsformel ist

$$\lambda_{|k|l}^\beta - \lambda_{|l|k}^\beta = -\lambda^\beta_{.m} R_{0kl}^m = \lambda^\gamma - M_{\gamma m}^\beta R_{0kl}^m. \tag{4.13}$$

Die Subtraktion von (4.13) aus (4.12) gibt

$$(L_{\gamma l|k}^\alpha - L_{\gamma k|l}^\alpha + L_{\beta k}^\alpha L_{\gamma l}^\beta - L_{\beta l}^\alpha L_{\gamma k}^\beta - M_{\gamma m}^\alpha R_{0kl}^m)\lambda^\gamma = 0. \tag{4.14}$$

Im Falle von (4.11) führt die Bedingung

$$\lambda^\alpha_{.l.k} - \lambda^\alpha_{.k.l} = 0$$

zu folgender Integrabilitätsbedingung:

$$(M_{\gamma k.l}^\alpha - M_{\gamma l.k}^\alpha + M_{\beta l}^\alpha M_{\gamma k}^\beta - M_{\beta k}^\alpha M_{\gamma l}^\beta)\lambda^\gamma = 0. \tag{4.15}$$

Die letzte Bedingung erhalten wir aus der Berechnung der Differenz $\lambda^{\alpha}_{|k.l}-\lambda^{\alpha}_{.l|k}$:

(4. 16) $$(M^{\alpha}_{\gamma l|k}-L^{\alpha}_{\gamma k.l}+L^{\alpha}_{\beta l}M^{\beta}_{\gamma l}-L^{\beta}_{\gamma k}M^{\alpha}_{\beta l}-M^{\alpha}_{\gamma m}\overset{*}{\Gamma}{}^{m}_{\beta k.l}v^{s})\lambda^{\gamma}=0.$$

Wir zeigen, daß die die Koeffizienten von λ^{γ} in Gleichungen (4. 14)—(4. 16) identisch verschwinden.

Dazu bilden wir die kovariante Ableitung von (4. 5) nach x^{l}, dann vertauschen wir die Indizes k und l, und betrachten die Differenz der entstehenden Gleichungen:

(4. 17) $$\varphi^{\sigma}_{\alpha|k|l}-\varphi^{\sigma}_{\alpha|l|k}=(L^{\gamma}_{\alpha k|l}-L^{\gamma}_{\alpha l|k}+L^{\beta}_{\alpha k}L^{\gamma}_{\beta l}-L^{\beta}_{\alpha l}L^{\gamma}_{\beta k})\varphi^{\sigma}_{\gamma}.$$

Andererseits ist

(4. 18) $$\varphi^{\sigma}_{\alpha|k|l}-\varphi^{\sigma}_{\alpha|l|k}=-\varphi^{\sigma}_{\alpha.m}R^{m}_{0kl}=-M^{\gamma}_{\alpha m}R^{m}_{0kl}\varphi^{\sigma}_{\gamma}.$$

Die Differenz der vorangehenden Gleichungen ist

$$(L^{\gamma}_{\alpha k|l}-L^{\gamma}_{\alpha l|k}+L^{\beta}_{\alpha k}L^{\gamma}_{\beta l}-L^{\beta}_{\alpha l}\cdot L^{\gamma}_{\beta k}+M^{\alpha}_{\gamma m}R^{m}_{0\,kl})\varphi^{\sigma}_{\gamma}=0,$$

woraus man wegen der linearen Unabhängigkeit die folgende Relation erhält:

(4. 19) $$L^{\gamma}_{\alpha k|l}-L^{\gamma}_{\alpha l|k}+L^{\beta}_{\alpha k}L^{\gamma}_{\beta l}-L^{\beta}_{\alpha l}L^{\gamma}_{\beta k}+M^{\alpha}_{\gamma m}R^{m}_{0\,kl}=0.$$

Ein ähnliches Verfahren führt im Falle der Gleichuhgen (4. 5) und (4. 7) zu den Relationen:

(4. 20) $$M^{\gamma}_{\alpha\,l.k}-M^{\gamma}_{\alpha\,k.l}+M^{\beta}_{\alpha l}M^{\gamma}_{\beta k}-M^{\beta}_{\alpha k}M^{\gamma}_{\beta l}=0$$

(4. 21) $$L^{\gamma}_{\alpha\,k.l}-M^{\gamma}_{\alpha\,l.k}+L^{\beta}_{\alpha k}M^{\gamma}_{\beta l}-L^{\gamma}_{\beta k}M^{\beta}_{\alpha l}+M^{\gamma}_{\alpha m}\overset{*}{\Gamma}{}^{m}_{sk.l}v^{s}=0.$$

Auf Grund von (4. 19), (4. 20) und (4. 21) reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen (4. 14), (4. 15) und (4. 16) auf Identitäten, folglich sind die Gleichungen (4. 8) und (4. 9) unbeschränkt integrabel.

Wir haben daher den

Satz 4. *Es sei in einem Finslerschen Raum eine r-parametrige Gruppe von Affinitäten G_r gegeben. Damit G_r wenigstens eine einparametrige Gruppe von homothetischen Transformation enthält, ist es notwendig und hinreichend, daß*

$$\text{Rang}\,\|\Delta_{\xi_\sigma}g_{ij},\,g_{ij}\|<r+1.$$

Ist der Rang $s<r+1$, so ist die homothetische Untergruppe von der Dimension $r+1-s$.

Literatur.

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV, *Ann. of Math.* **48** (1947), 755—781.

[2] H. Hiramatu, Groups of homothetic transformations in Finsler spaces, *Tensor*, **3** (1954), 131—143.

[3] Gy. Soós, Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 73—84.

(Eingegangen am 27. September, 1955.)