Über Additions- und Subtraktionstheoreme.

Dem Andenken meines unvergesslichen teuren Freundes und Kollegen Professor Dr. Tibor Szele mit tiefster Erschütterung und Ehrerweisung gewidmet.

Von J. ACZÉL in Debrecen.

O. PERRON [8] hat in einer gleichbetitelten Arbeit in 1920 über die Funktionalgleichungen

$$f(x+y)=F[f(x),f(y)] \tag{1}$$

und

$$f(x-y)=G[f(x),f(x)] \tag{2}$$

gesprochen.

Die Gleichung (1) kann offenbar als Verallgemeinerung der CAUCHYschen Funktionalgleichung

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{3}$$

betrachtet werden. Wie bekannt, befaßt sich eine große Anzahl von Arbeiten mit dieser und ähnlichen Gleichungen. In gewissem Sinne ist das allgemeinste Resultat auf diesem Gebiete das von A. OSTROWSKI [7] (vgl. auch H. KESTELMAN [5]) in 1929 erreichte Ergebnis, daß falls eine Lösung der Funktionalgleichung (3) auf einer Menge von positivem Maße durch eine meßbare Funktion majorisierbar ist, so kann sie nur von der Gestalt

$$f(x)=cx \tag{4}$$

sein. Die allgemeinere Gleichung (1) wurde von R. CACCIOPPOLI [2] für nicht-negative Veränderliche bezüglich meßbarer Lösungen und vom Verfasser der vorliegenden Arbeit ([1]) für ein beliebiges bezüglich der Addition geschlossenes reelles Intervall bezüglich der stetigen streng monotonen Lösungen untersucht.

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir, daß falls (1) bzw. (2) eine nicht-konstante stetige Lösung hat, so ist jede, auf einer Menge von positivem Masse durch eine meßbare Funktion majorisierbare Lösung stetig und falls nicht konstant, so streng monoton. Wir werden auch den Ausdruck der allgemeinsten solchen Lösungen aus einer partikulären Lösung finden, sowie die Bedingungen dafür, daß eine oben vorausgesetzte Lösung überhaupt existiere.

Der letztere Gedankengang wird denen von É. CARTAN [3] bzw. M. HOSSZÚ [4] und P. LORENZEN [6]*) in gewisser Hinsicht ähnlich sein.

Das Ergebnis stützt sich auf den oben erwähnten Satz von OSTROWSKI und enthält ihn auch offenbar, da ja die Existenz einer nicht-konstanten stetigen Lösung von (3) durch (4) (mit $c \neq 0$) gesichert ist.

1. Die Gleichung

$$f(x+y) = F[f(x), f(y)] \tag{1}$$

soll eine stetige, nicht-konstante Lösung besitzen, die ihr für alle reelle x, y Genüge leistet. Wir untersuchen was für Einschränkungen dies bezüglich der Funktion $F(u, v)$ bedeutet.

Erstens wird offenbar das uns interessierende Definitionsbereich von $F(u, v)$ bezüglich beiden Veränderlichen ein offenes Intervall (a, b) sein. Andererseits muß $F(u, v)$ wegen der Stetigkeit von f eine stetige Funktion sein.

Setzen wir weiter $x = 0$ bzw. $x = -y$ in (1), ein so erhalten wir

$$f(y) = F[f(0), f(y)],$$

bzw.

$$f(0) = F[f(-y), f(y)],$$

d. h. mit $f(y) = v$, $f(0) = e$, $f(-y) = v^{-1}$

$$F(e, v) = v, \tag{5}$$

bzw.

$$F(v^{-1}, v) = e. \tag{6}$$

Endlich folgt aus

$$\begin{gathered} F\{F[f(x), f(y)], f(z)\} = f(x+y+z) = F\{f(x), F[(y), f(z)]\}, \\ F[F(u,v), w] = F[u, F(v, w)]. \end{gathered} \tag{7}$$

Es können natürlich auch weitere Bedingungen bezüglich F abgeleitet werden (z. B. Symmetrie), wir werden aber zeigen, daß schon diese dazu genügen, daß (1) sogar eine streng monotone, stetige Lösung besitze. Da (7) die Assoziativität, (5) bzw. (6) die Existenz von Einheits- und Inverselementen bedeutet, können unsere Bedingungen darin zusammengefaßt werden daß es ein offenes Intervall (a, b) gebe, in welchem die Operation

$$F(u, v) = u \circ v \tag{8}$$

eine stetige Gruppe bildet.

Mit dieser Bezeichnung wollen wir also beweisen, daß es unter dieser Bedingung immer wenigstens eine stetige streng monotone Funktion $f(x)$ derart gibt, daß

$$f(x+y) = f(x) \circ f(y) \tag{9}$$

gelte.

---

*) Vgl. auch die inzwischen erschienene Arbeit H. FURSTENBERG, The inverse operation in groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 991—997. (*Bemerkung bei der Korrektur, 17, 4, 1956*).

Erstens zeigen wir, daß $F(u,v)=u\circ v$ in beidem Veränderlichen *streng monoton wächst*. Es ist z. B. für $v<w$ wegen (5)

$$e\circ v<e\circ w$$

und gäbe es ein u derart, daß

$$u\circ v\geqq u\circ w \tag{10}$$

wäre, so würde es aus Stetigkeitsgründen auch ein t geben, für welches

$$t\circ v=t\circ w,$$

was nicht möglicht ist. (Die Linksmultiplikation mit t^{-1} würde $v=w$ ergeben im Gegensatz zu $v<w$.) Also gilt (10) für kein u, d. h. $F(u,v)=u\circ v$ wächst in v, w. z. B. w. Ganz ähnlich verlauft auch der Beweis des Wachsens in u. Deshalb ist auch die immer existierende und eindeutige Funktion

$$u^m=\underset{\smile}{\overset{1}{u}}\circ\underset{\smile}{\overset{2}{u}}\circ\ldots\circ\underset{\smile}{\overset{m}{u}}$$

stetig und streng monoton wachsend in u. (Der Exponent in u^m ebenso wie in u^{-1} wird nicht im Sinne des gewöhnlichen Potenzierens, sondern im Sinne der Potenz-Operation bezüglich der „Multiplikation" $\circ$ benutzt.) Wegen (7) gilt auch

$$u^m\circ u^n=u^{m+n} \tag{11}$$

und wegen der strengen Monotonie

$$u^{m+1}=u^m\circ u\gtrless u^m\circ e=u^m,\text{ je nachdem } u\gtrless e.$$

Wir behaupten ferner, daß hier

$$\lim_{m\to\infty}u^m=\begin{cases}b\\a\end{cases},\text{ je nachdem } u\gtrless e$$

ist. Als monotone Folge hat nämlich u^m einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert und wäre $\lim\limits_{m\to\infty}u^m=t\in(a,b)$, so wäre wegen der Stetigkeit von $F(u,v)=u\circ v$

$$t=t\circ e\lesseqgtr t\circ u=(\lim_{m\to\infty}u^m)\circ u=\lim_{m\to\infty}(u^m\circ u)=\lim_{m\to\infty}u^{m+1}=t,$$

ein Widerspruch! Also gehört $\lim\limits_{m\to\infty}u^m$ nicht zum offenen Intervall (a,b) muß also als Grenzwert einer Folge deren Elemente in (a,b) liegen, ein Randpunkt dieses Intervalles sein, w. z. B. w. — Deshalb ist

$$u^m=v$$

immer eindeutig lösbar, und zwar $u\gtrless e$, je nachdem $v\gtrless e$. Die Lösung sei mit

$$u=v^{\frac{1}{m}}$$

bezeichnet. Wir führen noch die Bezeichnung

$$v^{\frac{m}{n}} = \left(v^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

ein.

Jetzt sind wir schon im Stande jene Funktion $f(x)$ zu konstruieren, deren Existenz wir behauptet haben. Es sei

$$f(1) = c$$

z. B. rechts von e:

$$c > e;$$

dann sind

$$f(m) = c^m,\ f\left(\frac{1}{n}\right) = c^{\frac{1}{n}},$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(c^{\frac{1}{n}}\right)^m = c^{\frac{m}{n}}$$

alle rechts von e. Es gilt wegen (11)

$$f\left(\frac{m_1}{n}\right) \circ f\left(\frac{m_2}{n}\right) = \left(c^{\frac{1}{n}}\right)^{m_1} \circ \left(c^{\frac{1}{n}}\right)^{m_2} = \left(c^{\frac{1}{n}}\right)^{m_1+m_2} = f\left(\frac{m_1+m_2}{n}\right)$$

und

$$f\left(\frac{m+1}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) \circ f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{m}{n}\right) \circ e = f\left(\frac{m}{n}\right),$$

d. h. für positiv rationale x, y gilt (9), und f ist streng monoton.

Insbesondere ist

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c^{\frac{1}{n}} > e$$

mit wachsendem n streng monoton abnehmend und hat den Grenzwert e. Hätte diese Folge nämlich einen Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = d > e,$$

so wäre

$$d = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) \circ f\left(\frac{1}{2n}\right) = \left[\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2 = d^2 > d,$$

ein Widerspruch! Also ist

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = e. \tag{12}$$

Wird also für ein beliebiges positiv reelles x $f(x)$ als der Dedekindsche Schnitt von $\{f(r_n)\}$ und $\{f(R_n)\}$ definiert, mit rationalen r_n, R_n und

$$r_n < x < R_n,\quad R_n - r_n = \frac{1}{n},$$

so ist diese Definition eindeutig und die so erhaltene stetige Funktion $f(x)$ erfüllt (9) für jedes positiv relle x. $f(x)$ bleibt auch streng monoton, da es für zwei reelle $x < x'$ immer zwei rationale r, r' gibt, so daß $x < r < r' < x'$ und also

$$f(x) \leqq f(r) < f(r') \leqq f(x')$$

gilt.

Für negative x lautet die Definition:

$$f(x) = f(-x)^{-1} \qquad (x < 0,\ f(-x) \circ f(x) = f(0) = e)$$

und da in unserem Falle $f(-x) > e$ war, wird $f(x) < e$ und $f(x)$ bleibt stetig und wie sofort zu sehen ist, auch streng monoton. Auch (9) bleibt erfüllt:

$$f(x) \circ f(y) = f(-x)^{-1} \circ f(-y)^{-1} = [f(-y) \circ f(-x)]^{-1} = f(-x-y)^{-1} = \\ = f(x+y) \qquad (x < 0, y < 0),$$

$$f(x) \circ f(y) = f(-x)^{-1} \circ f(y) = f(-x)^{-1} \circ f(-x) \circ f(x+y) = f(x+y) \\ (x < 0, y > 0, x+y > 0),$$

$$f(x) \circ f(y) = f(-x)^{-1} \circ f(y) = [f(y) \circ f(-x-y)]^{-1} \circ f(y) = \\ = f(-x-y)^{-1} \circ f(y)^{-1} \circ f(y) = f(-x-y)^{-1} = f(x+y) \\ (x < 0, y > 0, x+y < 0).$$

Wir elhielten also den

Satz 1. *Die Funktionalgleichung* (1) *besitzt dann und nur dann eine nicht-konstante stetige Lösung für alle reelle x, y, falls es ein offenes Intervall gibt, das unter der Operation* (8) *eine stetige Gruppe bildet. Hat andererseits* (1) *für jedes x, y, überhaupt eine stetige Lösung, so ist diese, falls nicht konstant, so streng monoton.*

Es seien jetzt $f(x)$ und $g(x)$ zwei Lösungen derselben Funktionalgleichung:

$$(1) \qquad f(x+y) = F[f(x), f(y)],$$

$$(13) \qquad g(x+y) = F[g(x), g(y)],$$

und zwar setzen wir voraus, daß $f(x)$ stetig und streng monoton, $g(x)$ auf einer Menge von positivem Maße durch eine meßbare Funktion majorisierbar (minorisierbar) ist. Da die stetigen und streng monotonen Funktionen invertierbar sind, folgt aus (1)

$$F(u, v) = f[f^{-1}(u) + f^{-1}(v)]$$

und aus (13)

$$g(x+y) = f\{f^{-1}[g(x)] + f^{-1}[g(y)]\},$$

d. h. mit

$$h(x) = f^{-1}[g(x)]$$

(eine Funktion mit meßbarer Majoranten auf einer Menge von positivem Maße):

$$h(x+y) = h(x) + h(y),$$

was eben (3) ist. Aus dem in der Einleitung erwähnten Satze von A. OSTROWSKI [7]—H. KESTELMAN [5] folgt also, daß

$$h(x) = cx, \qquad g(x) = f(cx)$$

ist. Dies ergibt den

Satz 2. *Falls* (1) *weningstens eine nicht-konstante stetige Lösung hat, so ist jede Lösung von* (1) *die auf einer Menge von positivem Maße eine meßbare Majorante (Minorante) besitzt, auch stetig (und wenn nicht-konstant, so streng monoton). Es genügt mit jeder Funktion $f(x)$ die der Gleichung* (1) *Genüge leistet auch $f(cx)$ derselben Gleichung, und unter den Funktionen der betrachteten Art nur diese.*

(Man sieht nämlich aus (1) sofort, daß falls $f(x)$ der Gleichung (1) genügt, so tut dies auch $f(x)$ mit beliebigem c).

2. Wir gehen jetzt zu der Gleichung

$$f(x-y) = G[f(x), f(y)] \tag{2}$$

über, die wir mit der Bezeichnung

$$G(u, v) = u/v \tag{14}$$

in die Gestalt

$$f(x-y) = f(x)/f(y) \tag{15}$$

schreiben wollen, und untersuchen was für Einschränkungen die Existenz einer nicht-konstanten stetigen Lösung von (2) für die Funktion (14) mit sich bringt.

Vorerst sehen wir wieder, daß aus der Stetigkeit der nicht-konstanten Funktion f die Stetigkeit von $G(u, v)$ und die Notwendigkeit dessen, daß das Definitionsbereich von G bezüglich u ebenso wie bezüglich v auch hier ein offenes Intervall sein muß, folgt.

Die Einsetzung von $y=0$, bzw. $y=x$ in (15) ergibt dann

$$f(x) = f(x)/f(0),$$

bzw.

$$f(0) = f(x)/f(x),$$

oder mit der Bezeichnung $f(x) = u, f(0) = e$:

$$u/e = u \tag{16}$$

bzw.

$$u/u = e, \tag{17}$$

d. h. es gibt ein Rechtseinheitselement e bezüglich der Operation u/v die sich als involutorisch erwiesen hat. — Endlich folgt aus

$$f(x)/f(y) = f(x-y) = f[(x-z)-(y-z)] = f(x-z)/f(y-z) =$$
$$= [f(x)/f(z)]/[f(y)/f(x)]$$

die „Transitivitätsgleichung"

(18) $$(u/w)/(v/w) = u/v.$$

Wir beweisen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind damit (2) sogar eine streng monotone stetige Lösung besitze. Dies wird durch Zurückführung auf den Satz 1. geschehen.

Vorerst folgt aus (17), (18), (16)

(19) $$e/(e/u) = (u/u)/(e/u) = u/e = u$$

und

(20) $$u/w = v/w \quad \text{nur für} \quad u = v,$$

da aus

$$u/w = v/w,$$
$$(u/w)/(e/w) = (v/w)/(e/w),$$
$$u/e = v/e$$

und also

$$u = v$$

sich bewährt. [(18), (16)]

Jezt definieren wir eine Operation

(21) $$u \circ v = u/(e/v)$$

die zusammen mit / stetig ist und dasselbe Definitionsbereich hat. Aus

(22) $$u \circ v = w$$

folgt

(23) $$w/v = u,$$

oder in equivalenter Form

(24) $$(u \circ v)/v = [u/(e/v)]/[e/(e/v)] = u/e = u$$

wegen (21), (19), (18) und (16).

Weiter ist

$$e \circ v = e/(e/v) = v$$

wegen (21) und (19), und falls

$$v^{-1} = e/v$$

definiert wird:

$$v^{-1} \circ v = (e/v)/(e/v) = e.$$

wegen (21) und (17); also hat die Operation (21) Linkseinheits- und Linksinverselemente. Andererseits folgt aus (18) und (24)

$$[(u \circ v) \circ w]/(v \circ w) = \{[(u \circ v) \circ w]/w\}/[(v \circ w)/w] = (u \circ v)/v = u =$$
$$= [u \circ (v \circ w)]/(v \circ w)$$

und daraus wegen (20) die Assoziativität

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w),$$

d. h. es gibt ein offenes Intervall, das unter der Operation (21) eine stetige Gruppe bildet. Der Satz 1. ergibt, daß

$$f(z+y) = f(z) \circ f(y) \tag{25}$$

eine streng monotone stetige Lösung hat, falls die rechtsstehende Operation die in (21) definierte ist und unsere Bedingungen bestehen. Setzen wir in (25) $z = x - y$ ein und beachten wir, daß aus (22) das Bestehen von (23) folgt, so sehen wir, daß jede stetige und streng monotone Funktion, die der Gleichung (25) Genüge leistet, auch

$$f(x) = f(x-y) \circ f(y)$$

und

$$f(x-y) = f(x)/f(y), \tag{15}$$

d. h. (2) erfüllt.

Wir haben also denn

Satz 3. *Hat die Funktionalgleichung* (2) *für alle reelle x eine stetige Lösung, so ist diese, falls nicht konstant, so streng monoton. Für die Existenz einer solchen nicht-konstanten (streng monotonen) stetigen Lösung ist es notwendig und hinreichend, daß es ein offenes Intervall gebe, in der die Operation* (14) *stetig, transitiv* [(18)] *und involutorisch* [(17)] *ist und ein Rechtseinheitselement* [(16)] *besitzt.*

Es sei jetzt wieder $f(x)$ eine stetige und streng monotone Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x-y) = G[f(x), f(y)] \tag{2}$$

und $g(x)$ eine beliebige andere, auf einer Menge von positivem Maße mit einer meßbaren Funktion majorisierbare (minorisierbare) Lösung derselben Gleichung:

$$g(x-y) = G[g(x), g(y)]. \tag{26}$$

Es folgt wieder aus (2)

$$G(u, v) = f[f^{-1}(u) - f^{-1}(v)]$$

und aus (26)

$$g(x-y) = f\{f^{-1}[g(x)] - f^{-1}[g(y)]\}.$$

Also für $h(x) = f^{-1}[g(x)]$, die eine Funktion mit meßbarer Majorante auf einer Menge von positivem Maße bleibt:

$$h(x-y) = h(x) - h(y),$$

d. h. mit $x - y = z$, $x = y + z$:

$$h(y+z) = h(y) + h(z), \qquad h(z) = c\,z,$$

laut dem Satze von A. Ostrowski [7]—H. Kestelman [5]. Dies ergibt endlich den

Satz 4. *Falls* (2) *wenigstens eine nicht-konstante stetige Lösung hat, so ist jede Lösung von* (2) *die auf einer Menge von positivem Maße eine meßbare Majorante (Minorante) besitzt, auch stetig (und wenn nicht konstant, so streng monoton). Es genügt mit jeder Funktion* $f(x)$, *die der Gleichung* (2) *Genüge leistet, auch* $f(cx)$ *derselben Gleichung und unter den Funktionen der betrachteten Art nur diese.*

(Daß diese Funktionen (2) auch tatsächlich erfüllen, ist auch hier evident.)

Literatur.

[1] J. Aczél, Grundriß einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953), 119—132.

[2] R. Caccioppoli, L' equazione funzionale $f(x+y)=F[f(x),f(y)]$, *Giorn. Mat. Battaglini* (3) **66** (1928), 69—74.

[3] É. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l' analysis situs, *Paris*, 1930. (Mémorial des Sciences Mathématiques 42.)

[4] M. Hosszú, On the functional equation of transitivity, *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1954), 203—208.

[5] H. Kestelman, On the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Fund. Math.* **34** (1947), 144—147.

[6] P. Lorenzen, Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen, *J. Reine Angew. Math.* **182** (1940), 50.

[7] A. Ostrovski, Mathematische Miszellen. XIV. Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **38** (1929), 54—62.

[8] O. Perron, Über Additions- und Subtraktionstheoreme, *Arch. der Math. und Phys.* (3) **28** (1920), 97—100.

(*Eingegangen am 29. September, 1955.*)