Zur Theorie der Halbgruppen.

Dem Andenken meines Freundes Professor Tibor Szele gewidmet.

Von J. SZÉP in Szeged.

Es ist bekannt, daß jede Gruppe G mit Hilfe jeder Untergruppe $H(\subset G)$ in der Form $G = HC'$ faktorisierbar ist, wo C' ein Komplex aus G ist und $H \cap C' = 1$ gilt. Aus dieser Tatsache folgt: ist G eine Gruppe und ist H eine Untergruppe von G, so existiert ein Komplex C'' in G derart, daß*)

$$G - H = HC'' \qquad (H \cap C'' \text{ ist leer})$$

gilt.

Es sei F eine Halbgruppe und A eine beliebige Teilhalbgruppe von F. Es entsteht die Frage, ob Halbgruppen F (keine Gruppen) existieren, bei denen zu jeder Teilhalbgruppe A von F eine Faktorisation

$$F - A = AC \qquad (A \cap C \text{ ist leer}) \tag{1}$$

gehört, wo C ein Komplex aus F ist. Mit solchen Fragen werden wir uns im folgenden beschäftigen.

Zuerst schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus:

a) Sind H und K zwei Untergruppen von F, so ist $H \cap K$ entweder leer oder eine Gruppe.

Dazu genügt es zu zeigen, daß es für jedes $a(\in F)$ höchtens eine durch a erzeugte Untergruppe $\{a\}$ von F gibt. Es seien $\{a\}$ und $\{a\}'$ zwei solche zykliche Gruppen in F mit dem Einselement e bzw. e' und mit dem inversen Element $\bar{a}$ bzw. $\bar{a}'$ von a. Es genügt zu zeigen, daß $e = e'$ und $\bar{a} = \bar{a}'$ ist. Aus $ee' = e(a\bar{a}') = (ea)\bar{a}' = a\bar{a}' = e'$ und aus $ee' = (\bar{a}a)e' = \bar{a}(ae') = \bar{a}a = e$ folgt $e' = e$. Es gilt ferner $\bar{a} = \bar{a}(a\bar{a}') = (\bar{a}a)\bar{a}' = \bar{a}'$.

b) Sind H und K zwei Untergruppen von F und ist $H \cap K$ nicht leer, so ist die durch H und K erzeugte Halbgruppe eine Gruppe. Diese Bemerkung folgt einfach aus *a)*.

Es bezeichne $[a]$ $(a \in F)$ die Halbgruppe $a, a^2, \dots$ und $\{a\}$ die von a erzeugte unendliche zyklische Gruppe in F, falls diese existiert. Es bezeichne ferner $x = \sqrt{a}$ eine beliebige Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

---

*) Das Zeichen — und später das Zeichen + bedeutet die mengentheoretische Differenz bzw. Vereinigung.

Es sei in F

$$F_a = \begin{cases} \{a\}, \text{ wenn dieses existiert und alle } \sqrt{a} \text{ mit dem Einselement} \\ \qquad \text{von } \{a\} \text{ vertauschbar sind.} \\ [a] \text{ in anderen Fällen.} \end{cases}$$

Satz. *Es sei $F(\neq 0)$ eine Halbgruppe. Hat $F-A$ für jedes $A=F_a$ eine Faktorisation* (1), *so hat F eine Zerlegung*

$$F = G_1 + G_2 + \cdots, \tag{2}$$

wo die G_i $(i=1,2,\ldots)$ paarweise fremde Untergruppen von F sind und für ihre Einselemente $e_1, e_2, \ldots$ die Relationen $e_i e_k = e_k$ $(i,k=1,2,\ldots)$ gelten. Umgekehrt, hat die Halbgruppe F eine Zerlegung (2) *mit den gesagten Eigenschaften, so hat $F-A$ für jedes $A=F_a$ eine Faktorisation* (1).

Beweis. Es ist evident, daß $0 \notin F$ ist, weil F für $A=F_0$ keine Faktorisation (1) hat.

Für jedes $a(\in F)$ gelten die folgenden Faktorisationen:

$$F - F_a = F_a B, \tag{3}$$

$$F - F_{a^2} = F_{a^2} B'. \tag{4}$$

Wir werden beweisen, daß jedes Element a von F eine (zyklische) Untergruppe in F erzeugt.

Nehmen wir zuerst an, daß F_{a^2} keine Gruppe ist. Gilt $a \in F_{a^2}$ (also $a=a^{2r}$), so ist F_a und auch F_{a^2} eine endliche Gruppe, was ein Widerspruch ist. Gilt $a \in F_{a^2}b'$ (das heißt $a=a^{2k}b'$, $b' \in B'$), so ist $b' \in F_a$. Ist nämlich z. B. $b' \in F_a b$ $(b \in B)$, so folgt $a \in F_a b$, was nach (1) ein Widerspruch ist. Wegen $b' \in F_a$ gilt $a=a^{2k}a^t=a^{2k+t}$ $(a^t=b', 2k+t>1)$, also ist F_a wieder eine (endliche) Gruppe.

Nehmen wir nun an, daß F_{a^2} eine Gruppe ist. Es existiert in diesem Fall ein Element $\bar{a}$ derart, daß $a^2\bar{a}=\bar{a}a^2=e_{a^2}$ (e_{a^2} ist das Einselement von F_{a^2}) gilt. Ist F_{a^2} eine endliche Gruppe der Ordnung n, so ist $\bar{a}=a^{2(n-1)}$ und es gilt $ae_{a^2}=e_{a^2}a$. Ist F_{a^2} eine unendliche Gruppe, so gilt $ae_{a^2}=e_{a^2}a$ nach der Definition von F_{a^2}. Multiplizieren wir die Gleichung $a(a^2\bar{a})=(a^2\bar{a})a$ von links mit $\bar{a}$, so ergibt sich $e_{a^2}a\bar{a}=e_{a^2}\bar{a}a$. Man sieht leicht aus der Faktorisation (4), daß das Einselement e_{a^2} von F_{a^2} ein Linkseinselement von F ist, also gilt $a\bar{a}=\bar{a}a$. Wegen $a\bar{a}=\bar{a}a$ ist $(\bar{a}a)a=a(\bar{a}a)=e_{a^2}$. Also erzeugt a eine (zyklische) Gruppe in F. Nach *b)* gehört zu jedem idempotenten Element eine maximale Untergruppe in F, in der dieses Element das Einselement ist. So bekommt man nach *a)* die Zerlegung (2).

Da nach den gesagten ist F_a immer eine Gruppe, so sieht man leicht aus (3), daß das Einselement von F_a ein Linkseinselement von F ist.

Hat F eine Zerlegung (2) mit den gesagten Eigenschaften, so ist jedes F_a eine Gruppe. Gilt z. B. $a \in G_1$, so existiert ein Komplex C in F derart, daß $G_1 = F_a C$ gilt. Somit ist $F-F_a=F_a\,((C-e_a)+G_2+G_3+\cdots)$ eine Zerlegung (1). Damit haben wir den Satz bewiesen.

Korollar. *Hat die Halbgruppe $F(\neq 0)$ für jedes $A = F_a$ eine Faktorisation* (1) *und sind die idempotenten Elemente von F miteinander vertauschbar, so ist F eine Gruppe.*

BEWEIS. Wir haben oben gesehen, daß für jedes a ($a \in F$) das zugehörige Einselement ein Linkseinselement von F ist. Sind e_a und e_b zwei Linkseinselemente von F, so ist $e_a = e_b$ wegen $e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_a$. F hat also ein einziges idempotentes Element, welches Einselement ist.

BEMERKUNG 1. Hat $F - A$ für alle $A = [a]$ eine Faktorisation (1), so hat F eine Zerlegung

$$F = G_1 + G_2 + \cdots$$

wo die G_i ($i = 1, 2, \ldots$) paarweise fremde Untergruppen von F mit lauter Elementen endlicher Ordnung sind und für ihre Einselemente $e_1, e_2, \ldots$ die Relationen $e_i e_k = e_k$ ($i, k = 1, 2, \ldots$) gelten. Auch in diesem Fall gilt die Umkehrung.

Den Beweis dieser Bemerkung erhalten wir ebenso, wie den Satz.

BEMERKUNG 2. Fordern wir statt (1) die Faktorisation

$$F - A = CA \tag{1'}$$

für jedes $A = F_a$, so gilt der bewiesene Satz mit der folgenden Änderung für die Einselemente e_i von G_i ($i = 1, 2, \ldots$): $e_i e_k = e_i$ ($i, k = 1, 2, \ldots$).

Man kann leicht einsehen, daß F eine Gruppe ist, wenn für jedes F_a (1) und auch (1′) gilt.

(Eingegangen am 1 Oktober, 1955.)