Die beschränkt-rekursiven Funktionen und die Ackermannsche Majorisierungsmethode.

Dem Andenken meines Freundes Tibor Szele gewidmet, der mit seinem hingebenden und fruchtbaren mathematischen Wirken und mit seiner opfervollen Menschlichkeit immer unser Vorbild bleibt.

Von RÓZSA PÉTER in Budapest.

Einleitung.

1. Die allgemeinen Kenntnisse über rekursive Funktionen sind in meinem Buch[1]) zu finden, zur Einleitung werde ich aber auch hier alles aufzählen, was ich in dieser Arbeit benutzen werde.

Unter rekursiven Funktionen werden solche zahlentheoretische (d. h. für nicht-negative ganze Argumenten definierte und nicht-negative ganze Werte annehmende) Funktionen verstanden, welche von gewissen Ausgangsfunktionen ausgehend durch eine endliche Kette von Substitutionen und Rekursionen aufgebaut werden. Der Begriff der Rekursion kann dabei verschieden abgegränzt werden, so erhält man verschiedene Funktionenklassen, die in der mathematischen Grundlagenforschung eine wichtige Rolle spielen.

2. Zur Klasse der *primitiv-rekursiven Funktionen* gelangt man von den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ ausgehend, wenn unter *primitiver Rekursion,* die eine Funktion $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ mit Hilfe der bereits bekannten Funktionen $\alpha(a_1, \ldots, a_r)$ und $\beta(n, a_1, \ldots, a_r, b)$ angibt, die folgende, aus zwei Funktionalgleichungen bestehende Definition verstanden wird:

$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r)$$
$$\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \beta(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)).$$

Dabei ist n die Rekursionsvariable; die erste Funktionalgleichung definiert den Wert von φ für $n=0$, und die zweite zeigt, wie der für $n+1$ angenommene Wert aus dem für n angenommenen zu gewinnen ist.

Eine Beziehung $\mathrm{B}(a_1, \ldots, a_r)$ zwischen $a_1, \ldots, a_r$ wird primitiv-rekursiv genannt, wenn zu ihr eine „charakteristische" Funktion $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$ zu fin-

[1]) R. PÉTER, Rekursive Funktionen, *Budapest,* 1951.

den ist, so daß $B(a_1, \ldots, a_r)$ zwischen solche und nur solche $a_1, \ldots, a_r$ besteht, für welche $\varphi(a_1, \ldots, a_r) = 0$ gilt.

Die in der elementaren Zahlentheorie gebräuchlichsten Funktionen und Beziehungen sind primitiv-rekursiv, z. B. jede Zahl (als Konstante), n, $m+n$, $m \cdot n$, m^n, $|m-n|$, und die Beziehungen $m < n$, $m = n$, $m \neq n$; die weniger allgemeinbekannten, die ich benutzen werde, zähle ich hier auf:

1. $\mathrm{sg}\,(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n \neq 0, \end{cases}$
2. $m \dot{-} n = \begin{cases} m-n, & \text{falls } m \geqq n \\ 0, & \text{falls } m < n, \end{cases}$
3. $p_n =$ die $n+1$-te Primzahl,
4. $\exp_n(a) =$ der Exponent von p_n in der Primfaktorenzerlegung von a,
5. samt $\alpha(a_1, \ldots, a_r, n)$ auch
$$\sum_{i=0}^{n} \alpha(a_1, \ldots, a_r, i) \text{ und } \prod_{i=0}^{n} \alpha(a_1, \ldots, a_r, i),$$
6. samt $\alpha(a_1, \ldots, a_r, n)$ auch
$$\mu_i[i \leqq n \text{ und } \alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0]$$

dessen Wert das kleinste i bis n ist, für welches $\alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0$ gilt, falls ein solches i existiert; und 0, falls bis n kein solches i vorhanden ist,

7. samt den Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und den einander gegenseitig ausschließenden Beziehungen $B_1, \ldots, B_{k-1}$ auch die durch die „zusammengeflickte" Rekursion definierte Funktion:
$$\varphi(a_1, \ldots, a_r) = \begin{cases} \alpha_1(a_1, \ldots, a_r) & \text{falls } B_1(a_1, \ldots, a_r) \text{ gilt,} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{k-1}(a_1, \ldots, a_r) & \text{„} \quad B_{k-1}(a_1, \ldots, a_r) \quad \text{„} \quad , \\ \alpha_k(a_1, \ldots, a_r) & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Die in der Rekursion nicht teilnehmenden Variablen, die „Parameter" sind auf den beiden Seiten der Funktionalgleichungen der primitiven Rekursion identisch. Ich habe bewiesen[2]), daß falls auf der rechten Seite der zweiten Funktionalgleichung für die Parameter bekannte primitiv-rekursive Funktionen eingesetzt werden, oder sogar Werte der zu definierenden Funktion für solche Argumente, wobei für die Rekursionsvariable eine um 1 kleinere Zahl steht als auf der linken Seite (z. B. wenn die zweite Funktionalgleichung
$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \varphi(n, \varphi(n, a^2))))$$
lautet), sogar die verwickeltesten *„eingeschachtelten Rekursionen"* dieser Art nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführen.

---

[2]) R. Péter (Politzer), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Ann.* **110** (1934), 612—632. — A rekurziv függvények elméletéhez, *Mat. Fiz. Lapok*, **42** (1935), 25—49.

4. Werden dagegen solche Rekursionen zugelassen, die zugleich nach mehrerem Variablen verlaufen, so gelangt man zu neuen Funktionenklassen. Die „k-fache Rekursion" verläuft zugleich nach k Variablen; die rekursiven Funktionen, welche durch Verwendung von höchstens k-fachen Rekursionen definiert werden, werden „*k-rekursive Funktionen*" genannt. ACKERMANN[3]) hat bewiesen, daß die 2-fache Rekursion von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt. Ich habe sein Beispiel für eine 2-rekursive, aber nicht primitiv-rekursive Funktion auf eine einfachere Form gebracht;[4]) die Definition des einfacheren Beispiels lautet:

$$\psi(0, n) = n + 1$$
$$\psi(m + 1, 0) = \psi(m, 1)$$
$$\psi(m + 1, n + 1) = \psi(m, \psi(m + 1, n)).$$

Auf der rechten Seite der dritten Definitionsgleichung treten ψ-Werte zweimal auf, ineinandergeschachtelt; im ersten ist das erste Argument kleiner als auf der linken Seite, im zweiten das zweite Argument.

Für den Satz von ACKERMANN habe ich noch einen Beweis gegeben mit Verwendung des CANTORschen Diagonalverfahrens. Mit dieser Methode habe ich auch allgemein bewiesen,[5]) daß die $k+1$-fache Rekursion von der Klasse der k-rekursiven Funktionen hinausführt. Zugleich habe ich gezeigt, daß jede k-fache Rekursion auf eine solche „primitive" Form gebracht werden kann, worin höchstens zweifache Einschachtelungen vorkommen und daß die uneingeschachtelte mehrfache Rekursion noch nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

5. Es wurden noch mehrere spezielle rekursive Funktionenklassen untersucht.

Die Gedanken von HERBRAND[6]) und GÖDEL[7]) benutzend hat KLEENE[8]) den Begriff der *allgemein-rekursiven Funktion* eingeführt, d. h. einer solchen Funktion, deren Werte (nach Präzisierung der Begriffe „Funktionalgleichungssystem" und „Berechnung") aus einem Funktionalgleichungssystem eindeutig berechnet werden können. KLEENE[9]) hat ferner gezeigt, daß man von den Funktionen $m + n$, $m \cdot n$ und von der charakteristischen Funktion der Bezie-

[3]) W. ACKERMANN, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Math. Ann.* **99** (1928), 118—133.

[4]) R. PÉTER, Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, *Math. Ann.* **111** (1935), 42—60.

[5]) R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, *Math. Ann.* **113** (1936), 489—527.

[6]) J. HERBRAND †, Sur la non-contradiction de l'arithmetique, *J. Reine. Angew. Math.* **166** (1932) 1—8.

[7]) K. GÖDEL, On undecidable propositions of formal mathematical systems, *Notes of lectures at the Inst. for Advanced Study*, 1934.

[8]) S. C. KLEENE, General recursive functions of natural numbers, *Math. Ann.* **112** (1936), 727—742.

[9]) S. C. KLEENE, A note on recursive functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* (1936), 544—546.

hung $m \neq n$ ausgehend jede allgemein-rekursive Funktion durch endlich viele Substitutionen und μ-Operationen erhalten kann, wobei die letztere Operation folgende Bedeutung hat: ist $\alpha(a_1, \ldots, a_r, n)$ eine solche primitiv-rekursive Funktion, daß es zu jedem $a_1, \ldots, a_r$ ein i mit $\alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0$ gibt, so wird unter der aus ihr durch μ-Operation gebildeten Funktion

$$\mu_i[\alpha(a_1, \ldots, a_r, i) = 0]$$

das kleinste so beschaffene i verstanden.

I.

1. ACKERMANN hat die Nicht-Primitiv-Rekursivität einer 2-rekursiven Funktion so bewiesen, daß er gezeigt hat: für genügend große Werte der Variablen majorisiert die betreffende Funktion jede primitiv-rekursive Funktion. Man könnte zunächst glauben, daß eine Majoranteneigenschaft nicht zum Wesen eines solchen Beispiels gehört. Ich verfolge hier einen Gedankengang von SKOLEM.[10]) Wie man leicht sieht, sind ja die primitiv-rekursiven einstelligen Funktionen abzählbar; werden sie in eine Folge

$$\varphi_1(n), \varphi_2(n), \ldots, \varphi_m(n), \ldots \qquad (*)$$

geordnet, so erhält man in den sg-Funktionen dieser Funktionen:

$$\mathrm{sg}\,(\varphi_1(n)),\ \mathrm{sg}\,(\varphi_2(n)), \ldots,\ \mathrm{sg}\,(\varphi_m(n)), \ldots$$

(mehrfach, das ist aber unwesentlich) sämtliche einstellige primitiv-rekursive Funktionen, welche keinen größeren Wert als 1 annehmen (ist $\varphi_i(n)$ eine solche Funktion, so ist ja $\mathrm{sg}\,(\varphi_i(n)) = \varphi_i(n)$); nun kann aber das Diagonalverfahren auch auf diese Folge angewandt werden:

$$\psi(n) = |1 - \mathrm{sg}\,(\varphi_n(n))|$$

ist ebenfalls eine Funktion, die keinen größeren Wert als 1 annimmt, kann aber nicht primitiv-rekursiv sein. Denn sonst wäre sie für irgendein k mit $\mathrm{sg}\,(\varphi_k(n))$ identisch; aus

$$\psi(n) = \mathrm{sg}\,(\varphi_k(n))$$

würde sich aber für $n = k$

$$\psi(k) = \mathrm{sg}\,(\varphi_k(k))$$

ergeben, in Widerspruch mit der Definition von $\psi(n)$. Wie ich gezeigt habe,[4]) kann die Abzählung (*) so geschehen, daß $\varphi_n(n)$ 2-rekursiv ausfällt; dann ist aber zugleich auch $\psi(n)$ 2-rekursiv.

Somit haben wir ein Beispiel für eine 2-rekursive, aber nicht primitiv-rekursive Funktion, welche keineswegs die genannte Majoranteneigenschaft

---

[10]) TH. SKOLEM, Some remarks on recursive arithmetic, *Norske Vid. Selsk. Forhandlinger*, 17 (1944), 103—106.

besitzt: sie nimmt ja keinen größeren Wert als 1 an (und bereits die primitiv-rekursive Grundfunktion $n+1$ wächst über alle Grenzen).

Das ist aber kein Beweis dafür, daß im Aufbau eines solchen Beispiels eine Funktion mit Majoranteneigenschaft entbährt werden könnte. Auch hier mußte zur Definition der beschränkten Funktion $\mathrm{sg}(\varphi_n(n))$ erst $\varphi_m(n)$ definiert werden, und diese Funktion wird bei geeignetem m größer als eine beliebige einstellige primitiv-rekursive Funktion $\alpha(n)$ (denn samt $\alpha(n)$ ist auch $\alpha(n)+1$ primitiv-rekursiv, also für ein geeignetes m mit $\varphi_m(n)$ identisch; woraus $\varphi_m(n)>\alpha(n)$ folgt). Die Untersuchung der von GRZEGORCZYK[11]) eingeführten *„beschränkt-rekursiven Funktionen"* zeigt, daß eine solche Majoranteneigenschaft in der Konstruktion einer nicht primitiv-rekursiven Funktion tatsächlich entscheidend ist.

2. In der Begriffsbildung von GRZEGORCZYK wird unter einer beschränkten Rekursion allgemein die rekursive Definition einer Funktion $\varphi(n_1,\ldots,n_r)$ verstanden, worin zu den üblichen Definitionsgleichungen eine Ungleichung

$$\varphi(n_1,\ldots,n_r)\leqq\gamma(n_1,\ldots,n_r)$$

mit bereits zugelassenem $\gamma(n_1,\ldots,n_r)$ hinzutritt. Es erhebt sich die Frage, ob auch die beschränkte mehrfache Rekursion von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

Es ist mir gelungen zu entscheiden: sie führt von hier nicht hinaus. Will man also ein Beispiel für eine nicht-primitiv-rekursive Funktion erhalten, so darf man die mit mehrfachen Rekursionen definierten Funktionen durch keine früher definierte Funktion beschränken. Es ist wesentlich, daß im Aufbau des Beispiels auch eine solche mehrfach-rekursive Funktion auftritt, die sämtliche früher definierten Funktionen majorisiert.

II.

Den Gedankengang des Beweises zeige ich erst an einem einfachen Beispiel.

Es soll folgende beschränkte zweifache Rekursion betrachtet werden:

$$\begin{gathered}\varphi(m,n)=0,\qquad \text{falls } m\cdot n=0\\ \varphi(m+1,n+1)=\alpha(m,n,\varphi(m,\beta(m,n,\varphi(m+1,n))))\\ \varphi(m,n)\leqq\gamma(m,n),\end{gathered}$$

wo α,β und γ bereits primitiv-rekursiv sind. Ich zeige, daß dann wegen der beschränkenden Definitionsungleichung auch $\varphi(m,n)$ primitiv-rekursiv ist.

---

11) A. GRZEGORCZYK, Some classes of recursive functions, *Inst. Mat. Polskiej Akademii Nauk, Warszawa* 1953.

Zu diesem Zweck führe ich die „Wertverlaufsfunktion“

$$\psi(m, n) = \prod_{i=0}^{n} p_i^{\varphi(m, i)}$$

ein. Man sieht, daß bei jedem $u \geqq n$

$$\varphi(m, n) = \exp_n(\psi(m, u))$$

gilt. So ist der in der zweiten Definitionsgleichung vorkommende Ausdruck $\varphi(m, \beta(m, n, \varphi(m+1, n)))$ mit

$$\exp_{\beta(m, n, \varphi(m+1, n))}(\psi(m, u))$$

identisch, falls

$$u \geqq \beta(m, n, \varphi(m+1, n))$$

besteht. Mit Benutzung der beschränkenden Definitionsungleichung von φ kann hier u von φ unabhängig gewählt werden: da

$$\varphi(m+1, n) \leqq \gamma(m+1, n)$$

ist, muß $\beta(m, n, \varphi(m+1, n))$ unter den Werten $\beta(m, n, i)$ vorkommen, wenn i die Zahlen von 0 bis $\gamma(m+1, n)$ durchläuft. Wird also

$$\delta(m, n) = \sum_{i=0}^{\gamma(m+1, n)} \beta(m, n, i)$$

gesetzt, so ist $\delta(m, n)$ primitiv-rekursiv und

$$\beta(m, n, \varphi(m+1, n)) \leqq \delta(m, n).$$

Daher gilt

$$\varphi(m, \beta(m, n, \varphi(m+1, n))) = \exp_{\beta(m, n, \varphi(m+1, n))}(\psi(m, \delta(m, n))).$$

Ferner ist hier

$$\varphi(m+1, n) = \exp_n(\psi(m+1, n)),$$

also, wenn

$$\bar{\alpha}(m, n, a, b) = \alpha(m, n, \exp_{\beta(m, n, \exp_n(b))}(a))$$

gesetzt wird, so ergibt sich aus der zweiten Definitionsgleichung von φ:

$$\varphi(m+1, n+1) = \bar{\alpha}(m, n, \psi(m, \delta(m, n)), \psi(m+1, n)).$$

Nach der Definition des Produktes ist

$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\varphi(m+1, n+1)}.$$

demnach ist, wenn noch

$$\alpha^*(m, n, a, b) = b \cdot p_{n+1}^{\bar{\alpha}(m, n, a, b)}$$

gesetzt wird,

$$\psi(m+1, n+1) = \alpha^*(m, n, \psi(m, \delta(m, n)), \psi(m+1, n)).$$

Dies ergibt aber, wenn noch für $m \cdot n = 0$

$$\psi(m, n) = \prod_{i=0}^{n} p_i^{\varphi(m, i)} = \prod_{i=0}^{n} p_i^0 = 1$$

hinzugenommen wird, eine uneingeschachtelte zweifache Rekursion für $\psi(m,n)$; diese führt aber — wie ich in der Einleitung erwähnt habe — nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus. Da nun

$$\varphi(m,n)=\exp_n(\psi(m,n))$$

ist, so ist samt $\psi(m,n)$ auch $\varphi(m,n)$ primitiv-rekursiv.

III.

1. Die allgemeine beschränkte mehrfache Rekursion besteht aus den Definitionsgleichungen (siehe[5])):

$$\begin{aligned}&\varphi(n_1+1,\ldots,n_l+1,0,n_{l+2},\ldots,n_k)=\\&=F^{(l)}_{x_1\ldots x_{k-1}}(n_1,\ldots,n_l,n_{l+2},\ldots,n_k,\varphi(n_1,x_1,\ldots,x_{k-1}),\varphi(n_1+1,n_2,x_1,\ldots,x_{k-2}),\ldots\\&\qquad\ldots,\varphi(n_1+1,\ldots,n_{l-1}+1,n_l,x_1,\ldots,x_{k-l}))\end{aligned}$$

für $l=0,1,2,\ldots,k$ (für $l=0$ ist die rechte Seite als $F^{(0)}(n_2,\ldots,n_k)$ zu lesen), samt der Definitionsungleichung:

$$\varphi(n_1,\ldots,n_k)\leqq\gamma(n_1,\ldots,n_k).$$

Dabei werden die „Substitutionsterme"
$F^{(l)}_{x_1\ldots x_{k-1}}(n_1,\ldots,n_l,n_{l+2},\ldots,n_k,\xi_1(x_1,\ldots,x_{k-1}),\xi_2(x_1,\ldots,x_{k-2}),\ldots,\xi_l(x_1,\ldots,x_{k-l}))$ aus $n_1,\ldots,n_l,n_{l+2},\ldots,n_k,\xi_1(x_1,\ldots,x_{k-1}),\xi_2(x_1,\ldots,x_{k-2}),\ldots,\xi_l(x_1,\ldots,x_{k-l})$ und aus früher definierten Funktionen durch endlich viele Substitutionen aufgebaut; der Index $x_1\ldots x_{k-1}$ weist darauf hin, daß $F^{(l)}$ von den Funktionen $\xi_1(x_1,\ldots,x_{k-1}),\xi_2(x_1,\ldots,x_{k-2}),\ldots,\xi_l(x_1,\ldots,x_{k-l})$ selbst und nicht von $x_1,\ldots,x_{k-1}$ abhängt. (Dabei dürfen auch fiktive Variablen zugelassen werden; so kann z. B. auch vorkommen, daß die rechte Seite von $\varphi(n_1+1,\ldots,n_k+1)$ nicht tatsächlich von $\varphi(n_1+1,\ldots,n_{k-1}+1,n_k)$ abhängt; dann spielt n_k bloß die Rolle eines Parameters. Man sieht leicht, daß bei Zulassung fiktiver Variablen die Parameter immer auch als Rekursionsvariablen betrachtet werden können.)

Nehmen wir an, daß die in der Rekursion verwendeten früher definierten Funktionen (auch γ) bereits primitiv-rekursiv sind. Es ist zu beweisen, daß dann auch $\varphi(n_1,\ldots,n_k)$ primitiv-rekursiv ist.

Der Beweis wird etwas einfacher, wenn man die Anfangswerte normiert, wie das im **§ 1** der in Fußnote[5]) zitierten Arbeit geschehen ist. Dort wurde gezeigt, daß

$$\varphi(n_1,\ldots,n_k)=\psi(n_1+1,\ldots,n_k+1)$$

ist, falls $\psi(n_1,\ldots,n_k)$ durch

$$\begin{aligned}\psi(n_1,\ldots,n_k)&=\alpha(n_1,\ldots,n_k)\qquad\text{falls } n_1\cdot n_2\ldots n_k=0\\\psi(n_1+1,\ldots,n_k+1)&=G_{x_1\ldots x_{k-1}}(n_1,\ldots,n_k,\psi(n_1,x_1,\ldots,x_{k-1}),\\&\quad,\psi(n_1+1,n_2,x_1,\ldots,x_{k-2}),\ldots,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-1}+1,n_k))\end{aligned}$$

definiert wird, wobei $\alpha(n_1, \ldots, n_k)$ beliebig gewählt werden kann, und

$$G_{x_1 \ldots x_{k-1}}(n_1, \ldots, n_k, \xi_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), \xi_2(x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots, \xi_{k-1}(x_1), \xi_k) =$$
$$= \sum_{l=0}^{k} \mathrm{sg}\,(n_1 \cdot n_2 \ldots n_l) \cdot (1 \dot{-} n_{l+1}) \cdot F^{(l)}_{x_1 \ldots x_{k-1}}(n_1 \dot{-} 1, \ldots, n_l \dot{-} 1, n_{l+2}, \ldots, n_k,$$
$$, \xi_1(x_1+1, \ldots, x_{k-1}+1), \xi_2(x_1+1, \ldots, x_{k-2}+1), \ldots, \xi_l(x_1+1, \ldots, x_{k-l}+1))$$

ist, und für $n_1 \cdot n_2 \ldots n_k \neq 0$ ist

$$\psi(n_1, \ldots, n_k) = \varphi(n_1 \dot{-} 1, \ldots, n_k \dot{-} 1),$$

daher ist für alle Argumente

$$\psi(n_1, \ldots, n_k) \leqq \alpha(n_1, \ldots, n_k) + \gamma(n_1 \dot{-} 1, \ldots, n_k \dot{-} 1).$$

Es werden hier außer $\alpha(n_1, \ldots, n_k)$ und außer den in der Definition von φ verwendeten früher definierten Funktionen die Funktionen $n+1$, $\mathrm{sg}\,(n)$, $m+n$, $m - n$, $m \cdot n$ in Substitutionen verwendet; all diese sind primitiv-rekursiv. Daher kann man sich auf Rekursionen der Form

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k) = \alpha(n_1, \ldots, n_k), \qquad \text{falls } n_1 \cdot n_2 \ldots n_k = 0$$
$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1) = F_{x_1 \ldots x_{k-1}}(n_1, \ldots, n_k, \varphi(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1}),$$
$$, \varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots, \varphi(n_1+1 \ldots, n_{k-1}+1, n_k))$$
$$\varphi(n_1, \ldots, n_k) \leqq \gamma(n_1, \ldots, n_k)$$

beschränken, wobei α, γ und die im Substitutionsterm teilnehmenden Funktionen β (die ich mit verschiedenen Indizes voneinander unterscheiden werde) bereits primitiv-rekursiv sind. Ich werde nun beweisen, daß auch φ primitiv-rekursiv ist.

Es würde natürlich eine große technische Vereinfachung mit sich bringen, wenn man auch diese Definition auf eine primitive Form zurückführen könnte, wie das bei der unbeschränkten mehrfachen Rekursion im **§ 2** der in Fußnote[5]) zitierten Arbeit geschehen ist. In dieser Zurückführung wird aber auch eine unbeschränkte mehrfache Rekursion verwendet.

2. Der Beweis ist darum nicht so einfach, wie im vorausgeschickten Spezialfall, weil der Aufbau des Substitutionsterms sehr verwickelt sein kann. Zur besseren Übersicht führe ich folgende Bezeichnungen ein: Unter „Term 0-ter Ordnung" werde ich eine primitiv-rekursive Funktion von $n_1, \ldots, n_k$ verstehen; unter „Term $i+1$-ter Ordnung" eine primitiv-rekursive Funktion von $n_1, \ldots, n_k$ und von endlich vielen Ausdrücken der Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})$, $\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)$ wobei für $x_1, \ldots, x_{k-1}$ Terme von höchstens i-ter Ordnung eingesetzt sind, aber mindestens einer von diesen genau von i-ter Ordnung ist. Die für $x_1, \ldots, x_{k-1}$ stehenden Terme sind die „unmittelbaren Bausteine" des betrachteten Terms; ihre Bausteine gelten auch als „Bausteine" des ursprünglichen Terms. Die in F ineinandergeschachtelt auftretenden Ausdrücke sind also Terme irgendeiner Ordnung.

Nun sollen sämtliche Bausteine der „äußersten" Terme von der Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})$, $\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots,$ oder $\varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)$, also die Terme dieser Form, die ohne weiter eingeschachtelt zu werden, in F auftreten, nach wachsender Ordnungszahl des sie unmittelbar enthaltenden Termes der Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_{k-1})$, $\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots$, oder $\varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, x_1)$ aufgezählt werden (diejenigen mit gleicher Ordnungszahl dieses Termes beliebig). Ich werde für $o \geqq 1$ mit

$$\mathfrak{g}[o; l; i, j]$$

denjenigen Term bezeichnen, der in dieser Folge an der Stelle von x_j im i-ten Term von der Form $\varphi(n_1+1, \ldots, n_{l-1}+1, n_l, x_1, \ldots, x_{k-l})$ steht, wobei der letztere Term von o-ter Ordnung ist. Die höchste vorkommende Ordnung für ein bestimmtes l werde ich mit o_l bezeichnen. Die Bausteine eines beliebigen $\mathfrak{g}$, darunter auch die unmittelbaren, stehen in unserer Folge vor $\mathfrak{g}$, und zwar mit kleinerem Ordnungsindex. Daher kann jedes $\mathfrak{g}[o; l; i, j]$ mit geeignetem primitiv-rekursivem $\beta[o; l; i, j]$ in der Form

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}[o; l; i, j] = \beta[o; l; i, j](n_1, \ldots, n_k,\\
&\varphi(n_1, \mathfrak{g}[o_{11}; 1; i_{11}, 1], \ldots, \mathfrak{g}[o_{11}; 1; i_{11}, k-1]), \ldots\\
&\ldots, \varphi(n_1, \mathfrak{g}[o_{1s_1}; 1; i_{1t_1}, 1], \ldots, \mathfrak{g}[o_{1s_1}; 1; i_{1t_1}, k-1]); \ldots\\
&- - - - - - - - - - - - - - - - -\\
&\ldots; \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, \mathfrak{g}[o_{k-1,1}; k-1; i_{k-1,1}, 1]), \ldots\\
&\ldots, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, \mathfrak{g}[o_{k-1, s_{k-1}}; k-1; i_{k-1, t_{k-1}}, 1]),\\
&, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)),
\end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei

$$o_{u1}, \ldots, o_{us_u} \leqq m_{ou} = \min(o_u, o-1)$$

ist; für $o=1$ hängt β von keinem Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ ab, bloß von $n_1, \ldots, n_k$.

Da β auch als Funktion von beliebig vielen hinzugenommenen fiktiven Variablen betrachtet werden kann, können wir annehmen, daß hier als Ordnungsindizes sämtliche Zahlen unter m_{ou} vorkommen, und bei gegebenem Ordnungsindex sämtliche dazu gehörige Terme $\mathfrak{g}$. So läßt sich die Definition von φ folgendermaßen aufschreiben:

$$\text{(D)}\quad \begin{aligned}
&\varphi(n_1, \ldots, n_k) = \alpha(n_1, \ldots, n_k), \qquad \text{falls } n_1 \cdot n_2 \ldots n_k = 0\\
&\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1) = \beta(n_1, \ldots, n_k, \varphi[1; 1; 1], \ldots, \varphi[1; 1; r_{11}]; \varphi[2; 1; 1], \ldots\\
&\quad \ldots, \varphi[2; 1; r_{21}]; \ldots; \varphi[o_1; 1; 1], \ldots, \varphi[o_1; 1; r_{o_1 1}]; \ldots; \ldots; \ldots\\
&\quad \ldots; \varphi[1; k-1; 1], \ldots, \varphi[1; k-1; r_{1,k-1}]; \varphi[2; k-1; 1], \ldots, \varphi[2; k-1; r_{2,k-1}]; \ldots\\
&\quad \ldots; \varphi[o_{k-1}; k-1; 1], \ldots, \varphi[o_{k-1}; k-1; r_{o_{k-1}, k-1}]; \varphi[1; k; 1]),
\end{aligned}$$

wobei für $l = 1, 2, \ldots, k$; $o = 1, 2, \ldots, o_l$; $i = 1, 2, \ldots, r_{ol}$

$$\begin{aligned}
\varphi[o; l; i] = \varphi(n_1+1, \ldots, n_{l-1}+1, n_l, \beta[o; l; i, 1](n_1, \ldots, n_k, \varphi[1; 1; 1], \ldots, \varphi[1; 1; r_{11}];\\
\ldots; \varphi[m_{o,1}; 1; 1], \ldots, \varphi[m_{o,1}; 1; r_{m_{o,1}}]; \ldots; \ldots; \varphi[1; k-1; 1], \ldots, \varphi[1; k-1; r_{1,k-1}]; \ldots\\
\ldots; \varphi[m_{o,k-1}; k-1; 1], \ldots, \varphi[m_{o,k-1}; k-1; r_{m_{o,k-1}, k-1}]; \varphi[1; k; 1]), \ldots\\
\ldots, \beta[o; l; i, k-l](n_1, \ldots, n_k, \varphi[1; 1; 1], \ldots, \varphi[1; 1; r_{11}]; \ldots; \varphi[m_{o1}; 1; 1], \ldots\\
\ldots, \varphi[m_{o1}; 1; r_{m_{o1}1}], \ldots; \ldots; \varphi[1; k-1; 1], \ldots, \varphi[1; k-1; r_{1,k-1}]; \ldots\\
\ldots, \varphi[m_{o,k-1}; k-1; 1], \ldots, \varphi[m_{o,k-1}; k-1; r_{m_{o,k-1}, k-1}]; \varphi[1; k; 1]))
\end{aligned}$$

und

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k) \leqq \gamma(n_1, \ldots, n_k).$$

(Der Einheitlichkeit halber kann in dieser Definition $\varphi[1; k; 1]$ auch als eine Folge

$$\varphi[1; k; 1], \ldots, \varphi[1; k; r_{1k}]; \ldots; \varphi[o_k; k; 1], \ldots, \varphi[o_k; k; r_{o_k k}]$$

aufgefaßt werden, wobei $o_k = 1$ und $r_{1k} = 1$ ist.)

Ich werde zeigen, daß die Funktion $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ durch Substitutionen aufgebaut werden kann aus primitiv-rekursiven Funktionen und aus einer Funktion, welche ähnlich als $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ definiert wird, doch in ihrer Definition sind diejenigen höchsten Ordnungen $o_1, \ldots, o_k$, die in der obigen Definition größer als 1 waren, um 1 kleiner als dort. Wird dasselbe Verfahren auf diese neue Definition angewandt, dann auf die sich dabei ergebende neue Definition, usf., so gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einer Definition, worin $o_1 = o_2 = \cdots = o_k = 1$ ist; dann ist aber diese Definition eine uneingeschachtelte mehrfache Rekursion, und von einer solchen habe ich bereits bewiesen,[5]) daß sie nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

3. Zu diesem Zweck soll ein beliebiger auftretender Term $\varphi[2; u; v]$ von tatsächlich 2-ter Ordnung[12]) herausgegriffen, und die dazu gehörige Wertverlaufsfunktion

$$\psi(n_1, \ldots, n_k) = \prod_{i=0}^{n_{u+t}} p_i^{\varphi(n_1, \ldots, n_{u+t-1}, i, n_{u+t+1}, \ldots, n_k)}$$

eingeführt werden, wobei t einer der Werte $1, 2, \ldots, k-u$ ist. Dann gilt für jedes $w \geqq n_{u+t}$

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k) = \underset{n_{u+t}}{\exp}\,(\psi(n_1, \ldots, n_{u+t-1}, w, n_{u+t+1}, \ldots, n_k)) \tag{**}$$

Man erhält aus der Definition von $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ für $\psi(n_1, \ldots, n_k)$ die Definitionsbeziehungen:

(1) $$\psi(n_1, \ldots, n_k) = \prod_{i=0}^{n_{u+t}} p_i^{\alpha(n_1, \ldots, n_{u+t-1}, i, n_{u+t+1}, \ldots, n_k)} =$$
$$= \bar{\alpha}(n_1, \ldots, n_k), \text{ falls } n_1 \cdot n_2 \ldots n_k = 0,$$

(3) $$\psi(n_1, \ldots, n_k) \leqq \prod_{i=0}^{n_{u+t}} p_i^{\gamma(n_1, \ldots, n_{u+t-1}, i, n_{u+t+1}, \ldots, n_k)} = \bar{\gamma}(n_1, \ldots, n_k),$$

wobei $\bar{\alpha}$ und $\bar{\gamma}$ primitiv-rekursiv sind, ferner aus der Definition des Produktes

(2*) $$\psi(n_1 + 1, \ldots, n_k + 1) =$$
$$= \psi(n_1 + 1, \ldots, n_{u+t-1} + 1, n_{u+t}, n_{u+t+1} + 1, \ldots, n_k + 1) \cdot p_{n_{u+t}+1}^{\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1)} =$$
$$= \beta^*(n_{u+t}, \psi(n_1 + 1, \ldots, n_{u+t-1} + 1, n_{u+t}, n_{u+t+1} + 1, \ldots, n_k + 1), \varphi(n_1 + 1, \ldots, n_k + 1)),$$

---

[12]) Wegen der Zulassung von fiktiven Variablen kann nämlich ein Term der Form $\varphi[2; u; v]$ auch von 1-ter Ordnung sein.

wobei β^* primitiv-rekursiv ist. Daraus ergibt sich eine beschränkte mehrfache Rekursion für $\psi(n_1, \ldots, n_k)$, falls für $\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1)$ die rechte Seite der zweiten Definitionsgleichung von (D) geschrieben, und darin jeder φ-Ausdruck nach (**) mit Hilfe von ψ ausgedrückt wird. Das geschieht sukzessiv folgendermaßen: für $l=1, 2, \ldots, k$; $i=1, 2, \ldots, r_{1l}$ ist

$$\varphi[1; l; i] = \underset{\lambda[1;l;i]}{\exp}(\psi(n_1+1, \ldots, n_{l-1}, n_l, \beta[1; l; i, 1](n_1, \ldots, n_k), \ldots \\ \ldots, \beta[1; l; i, k-l](n_1, \ldots, n_k))),$$

wobei

$$\lambda[1; l; i] = \begin{cases} n_{u+t}+1, & \text{falls } l > u+t, \\ n_{u+t}, & \text{falls } l = u+t, \\ \beta[1; l; i, u+t-l](n_1, \ldots, n_k), & \text{falls } l < u+t \end{cases}$$

ist.

Sei (um den späteren Bezeichnungen anzupassen) für $l=1, 2, \ldots, k$; $i=1, 2, \ldots, r_{il}$; $j=1, 2, \ldots, k-l$

$$\bar{\beta}[1; l; i, j](n_1, \ldots, n_k) = \beta[1; l; i, j](n_1, \ldots, n_k)$$

und

$$\psi[1; l; i] = \\ = \psi(n_1+1, \ldots, n_{l-1}+1, n_l, \bar{\beta}[1; l; i, 1](n_1, \ldots, n_k), \ldots, \bar{\beta}[1; l; i, k-l](n_1, \ldots, n_k));$$

so ist mit primitiv-rekursivem $\delta[1; l; i]$

$$\varphi[1; l; i] = \delta[1; l; i](n_1, \ldots, n_k, \psi[1; l; i]).$$

Da sich nun aus (**) für einen beliebigen auftretenden Term $\varphi[2; l; i]$ 2-ter Ordnung

$$\varphi[2; l; i] = \underset{\lambda[2;l;i]}{\exp}(\psi(n_1+1, \ldots, n_{l-1}+1, n_l, \beta[2; l; i, 1](n_1, \ldots, n_k, \varphi[1; 1; 1], \ldots \\ \ldots, \varphi[1; k; r_{1k}]), \ldots, \beta[2; l; i, k-l](n_1, \ldots, n_k, \varphi[1; 1; 1], \ldots, \varphi[1; k; r_{1k}])))$$

ergibt, wobei

$$\lambda[2; l; i] = \begin{cases} n_{u+t}+1, & \text{falls } l > u+t, \\ n_{u+t}, & \text{falls } l = u+t, \\ \beta[2; l; i, u+t-l](n_1, \ldots, n_k, \varphi[1; 1; 1], \ldots, \varphi[1; k; r_{1k}]), & \\ & \text{falls } l < u+t \end{cases}$$

ist, so erhält man aus den vorhin gewonnenen Ausdrücken für $\varphi[1; l; i]$, wenn für $j=1, 2, \ldots, k-l$

$$\bar{\beta}[2; l; i, j](n_1, \ldots, n_k, b_{11}, \ldots, b_{k\, r_{1k}}) = \\ = \beta[2; l; i, j](n_1, \ldots, n_k, \delta[1; 1; 1](n_1, \ldots, n_k, b_{11}), \ldots, \delta[1; k; r_{1k}](n_1, \ldots, n_k, b_{k\, r_{1k}}))$$

und

$$\psi[2; l; i] = \psi(n_1+1, \ldots, n_{l-1}+1, n_l, \bar{\beta}[2; l; i, 1](n_1, \ldots, n_k, \psi[1; 1; 1], \ldots, \\ \ldots, \psi[1; k; r_{1k}]), \ldots, \bar{\beta}[2; l; i, k-l](n_1, \ldots, n_k, \psi[1; 1; 1], \ldots, \psi[1; k; r_{1k}]))$$

gesetzt wird, mit primitiv-rekursivem $\delta[2; l; i]$

$$\varphi[2; l; i] = \delta[2; l; i](n_1, \ldots, n_k, \psi[1; 1; 1], \ldots, \psi[1; k; r_{1k}], \psi[2; l; i]).$$

4. Das soll für alle Terme $\varphi[2;l;i]$ 2-ter Ordnung eingesetzt werden, außer dem herausgegriffenen Fall $l=u$, $i=v$. In diesem Fall werde ich benutzen, daß in (**) nicht nur $w=n_{u+t}$, sondern ein beliebiges $w \geqq n_{u+t}$ gewählt werden kann. Da nach der Definitionsungleichung von (D) für $l=1,2,\ldots,k$; $i=1,2,\ldots,r_{il}$

$$\varphi[1;l;i] \leqq \gamma(n_1+1,\ldots,n_{l-1}+1,n_l,\beta[1;l;i,1](n_1,\ldots,n_k),\ldots,\\ ,\beta[1;l;i,k-l](n_1,\ldots,n_k)) = \gamma[l;i](n_1,\ldots,n_k)$$

mit primitiv-rekursivem $\gamma[l;i]$ ist, so ist

$$\beta[2;u;v,t](n_1,\ldots,n_k,\varphi[1;1;1],\ldots,\varphi[1;k;r_{1k}]) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i_{11}=0}^{\gamma[1;1](n_1,\ldots,n_k)} \cdots \sum_{i_{kr_k}=0}^{\gamma[k;r_k](n_1,\ldots,n_k)} \beta[2;u;v,t](n_1,\ldots,n_k,i_{11},\ldots,i_{kr_k}) = \delta_t(n_1,\ldots,n_k),$$

mit primitiv-rekursivem $\delta_t(n_1,\ldots,n_k)$. Daher kann für $\psi[2;u;v]$

$$\psi[2;u;v] = \psi(n_1+1,\ldots,n_{u-1}+1,n_u,\bar\beta[2;u;v,1](n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\psi[1;k;r_{1k}]),\ldots\\ \ldots,\bar\beta[2;u;v,t-1](n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\psi[1;k;r_{1k}]),\delta_t(n_1,\ldots,n_k),\\ ,\bar\beta[2;u;v,t+1](n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\psi[1;k;r_{1k}]),\ldots\\ \ldots,\bar\beta[2;u;v,k-u](n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\psi[1;k;r_{1k}]))$$

gesetzt werden, und damit gilt auch

$$\varphi[2;u;v] = \delta[2;u,v](n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\psi[1;k;r_{1k}],\psi[2;u;v])$$

mit primitiv-rekursivem $\delta[2;u;v]$.

5. Werden nun die so erhaltenen Ausdrücke $\varphi[1;l;i]$ und $\varphi[2;l;i]$ in den nach (**) erhaltenen Ausdruck

$$\varphi[3;l;i] = \exp_{\lambda[3;l;i]}(\psi(n_1+1,\ldots,n_{l-1}+1,n_l,\beta[3;l;i,1](n_1,\ldots,n_k,\varphi[1;1;1],\ldots\\ \ldots,\varphi[2;k;r_{2k}]),\ldots,\beta[3;l;i,k-l](n_1,\ldots,n_k,\varphi[1;1;1],\ldots,\varphi[2;k;r_{2k}])))$$

eingesetzt, wobei

$$\lambda[3;l;i] = \begin{cases} n_{u+t}+1, & \text{falls } l > u+t, \\ n_{u+t}, & \text{falls } l = u+t, \\ \beta[3;l;i,u+t-l](n_1,\ldots,n_k,\varphi[1;1;1],\ldots,\varphi[2;k;r_{2k}]), & \text{falls } l < u+t \end{cases}$$

ist, so erhält man ganz ähnlich für $l=1,2,\ldots,k$; $i=1,2,\ldots,r_{3l}$ mit primitiv-rekursivem $\delta[3;l;i]$

$$\varphi[3;l;i] = \delta[3;l;i]\,(n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\psi[2;k;r_{2k}],\psi[3;l;i]),$$

wobei

$$\psi[3;l;i] = \psi(n_1+1,\ldots,n_{l-1}+1,n_l,\bar\beta[3;l;i,1](n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\\ ,\psi[2;k;r_{2k}]),\ldots,\bar\beta[3;l;i,k-l](n_1,\ldots,n_k,\psi[1;1;1],\ldots,\psi[2;k;r_{2k}]))$$

ist, mit primitiv-rekursiven $\bar\beta[3;l;i,j]$ für $j=1,2,\ldots,k-l$.

6. Ganz ähnlich geht man schrittweise weiter bis zu den Ausdrücken $\varphi[o_l; l; i]$, und wenn man die so gewonnenen Ausdrücke in die rechte Seite der zweiten Definitionsgleichung von (D) einsetzt, und den so gewonnenen Ausdruck für $\varphi(n_1+1, \dots, n_k+1)$ in (2*) setzt, so erhält man mit primitiv-rekursivem β

$$(2) \quad \psi(n_1+1, \dots, n_k+1) = \beta(n_1, \dots, n_k, \psi[1; u+t], \psi[1; 1; 1], \dots, \psi[o_k; k; r_{o_k k}]),$$

wobei

$$\psi[1; u+t] = \psi(n_1+1, \dots, n_{u+t-1}+1, n_{u+t}, n_{u+t+1}+1, \dots, n_k+1)$$

von erster Ordnung ist, ferner für $l = 1, 2, \dots, k$; $o = 1, 2, \dots, o_l$; $i = 1, 2, \dots, r_{ol}$ ausgenommen den Fall $o = 2$, $l = u$, $i = v$,

$$\begin{aligned}\psi[o; l; i] = \psi(n_1+1, \dots, n_{l-1}+1, n_l, \bar\beta[o; l; i, 1](n_1, \dots, n_k, \psi[1; 1; 1], \dots,\\ , \psi[o-1; k, r_{o-1,k}]), \dots\\ \dots, \bar\beta[o; l; i, k-l](n_1, \dots, n_k, \psi[1; 1; 1], \dots, \psi[o-1; k; r_{o-1,k}]))\end{aligned}$$

ist, und

$$\begin{aligned}\psi[2; u; v] = \psi(n_1+1, \dots, n_{u-1}+1, n_u, \bar\beta[2; u; v, 1](n_1, \dots, n_k, \psi[1; 1; 1], \dots\\ \dots, \psi[1; k; r_{1k}]), \dots\\ \dots, \bar\beta[2; u; v, t-1](n_1, \dots, n_k, \psi[1; 1; 1], \dots, \psi[1; k; r_{1k}]), \delta_t(n_1, \dots, n_k),\\ , \bar\beta[2; u; v, t+1](n_1, \dots, n_k, \psi[1; 1; 1], \dots, \psi[1; k; r_{1k}]), \dots\\ \dots, \bar\beta[2; u; v, k-u](n_1, \dots, n_k, \psi[1; 1; 1], \dots, \psi[1; k; r_{1k}])).\end{aligned}$$

(1), (2) und (3) ergeben eine beschränkte mehrfache Rekursion für $\psi(n_1, \dots, n_k)$, mit dem unwesentlichen Unterschied zu (D), daß darin uneingeschachtelt ein neuer Term 1-ter Ordnung $\psi[1; u+t]$ auftritt, und mit dem wesentlichen Unterschied, daß in $\psi[2; u; v]$ an der $t-u$-ten Stelle ein Term 0-ter Ordnung steht, obwohl an der $t-u$-ten Stelle von $\varphi[2; u; v]$ ein Term 1-ter Ordnung gestanden ist. Und man gewinnt $\varphi(n_1, \dots, n_k)$ aus $\psi(n_1, \dots, n_k)$ nach (**) durch die Substitution:

$$\varphi(n_1, \dots, n_k) = \exp_{n_{u+t}}(\psi(n_1, \dots, n_k)).$$

7. Wird dasselbe Verfahren auf die Definition von ψ angewandt, mit einem aus der Folge $1, 2, \dots, k-u$ gewählten anderen t als hier, so erhält man eine ähnliche Definition einer Funktion $\xi(n_1, \dots, n_k)$, worin noch ein uneingeschachtelter Term 1-ter Ordnung auftritt, und worin in einem Term 2-ter Ordnung $\xi[2; u; v]$ bereits für zwei solche Argumente ein Term 0-ter Ordnung steht, für welche in $\varphi[2; u; v]$ Terme 1-ter Ordnung gestanden sind; und $\psi(n_1, \dots, n_k)$ ergibt sich aus $\xi(n_1, \dots, n_k)$ und aus $\exp_n(a)$ durch eine Substitution. So gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einer ähnlichen Definition einer Funktion $\zeta(n_1, \dots, n_k)$, in welcher noch weitere uneingeschachtelte Terme 1-ter Ordnung auftreten, und worin in einem Term $\zeta[2; u; v] = \zeta(n_1+1, \dots, n_{u-1}+1, n_u, x_1, \dots, x_{k-u})$ bereits für sämtliche Argumente

$x_1, \ldots, x_{k-u}$ Terme 0-ter Ordnung stehen; so ist dieser Term bereits nicht mehr von 2-ter, sondern von 1-ter Ordnung geworden; und $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ ergibt sich durch Substitution aus $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ und aus primitiv-rekursiven Funktionen.

Nun soll wieder aus der Definition von $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ ein Term herausgegriffen werden, der tatsächlich von 2-ter Ordnung ist, und das ganze Verfahren damit wiederholt werden. Wenn man so weiterfährt, so erhält man nach endlich vielen Schritten eine zu (D) ähnliche Definition einer Funktion $\overline{\varphi}(n_1, \ldots, n_k)$ (mit dem unwesentlichen Unterschied, daß darin noch gewisse weitere uneingeschachtelte Terme 1-ter Ordnung von endlicher Anzahl auftreten), in welcher aber sämtliche Terme $\overline{\varphi}[2; l; i]$ nur noch in der Bezeichnung von 2-ter, tatsächlich von 1-ter Ordnung sind. Dann sind aber die von den Termen $\overline{\varphi}[1; l; i]$ und $\overline{\varphi}[2; l; i]$ abhängigen Terme $\overline{\varphi}[3; l; i]$ nicht von 3-ter, sondern nur von 2-ter Ordnung, usw.; so werden auch diejenigen vorkommenden höchsten Ordnungen $o_1, \ldots, o_k$, welche grösser als 1 waren, um 1 kleiner. Unsere Funktion $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ ergibt sich aus primitiv-rekursiven Funktionen und aus $\overline{\varphi}(n_1, \ldots, n_k)$ durch Substitution.

Daraus folgt aber nach dem vorausgeschickten Gedankengang, daß $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ primitiv-rekursiv ist.

Die beschränkte mehrfache Rekursion führt also tatsächlich nicht hinaus von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen.

IV.

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, wenn statt mehrfachen Rekursionen μ-Operationen zugelassen werden, so erhält man von einigen einfachen Grundfunktionen ausgehend sämtliche allgemein-rekursive Funktionen. Hier ist es trivial, daß man nebst Beschränkung nicht von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinauskommt; eine μ-Funktion, welche durch eine primitiv-rekursive Funktion beschränkt wird, entsteht ja nach Definition 6. von Nr. 2 der Einleitung aus einer primitiv-rekursiven Funktion durch Einsetzen der primitiv-rekursiven Schranke für die Variable n.

(Eingegangen am 13. Oktober, 1955.)