# Eine Charakterisierung der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse mittels eines Satzes über derivierte Matrizen.

Dem Andenken meines Freundes und Kollegen T. Szele.

Von O. VARGA in Debrecen.

Im euklidischen und etwas allgemeiner im Riemannschen Raum bestimmt die Längenmessung die Flächenmessung eindeutig und umgekehrt. Ist nämlich $G$ die aus den Tensorkomponenten der Längenmessung gebildete Matrix, dann bestimmt ihre $p$-te Derivierte $G^{(p)}$ die Messung von $p$-dimensionalen Inhalten. Die Elemente von $G^{(p)}$ sind nämlich, wie wohlbekannt, die Komponenten des Maßtensors $2p$-ter Stufe für einfache $p$-Vektoren.

A. KAWAGUCHI hat nun die Theorie derjenigen Räume begründet, in denen als metrischer Fundamentalbegriff das Oberflächenelement einer $p$-dimensionalen Fläche in gewissem Grade willkürlich vorgegeben wird.

Nachdem schon A. KAWAGUCHI, HOKARI,[1]) sowie E. T. DAVIES[2]) Spezialfälle untersuchten, in denen es zur Inhaltsmetrik eine Längenmetrik gibt, die sich zu einander so verhalten, wie es für den Riemannschen Raum auseinandergesetzt wurde, hat R. DEBEVER[3]) eine Definition gegeben, die genau den oben beschriebenen Zusammenhang zwischen $G$ und $G^{(p)}$ ausdrückt und diese Räume als solche von metrischer Klasse bezeichnet. Da nun das Flächenelement durch Angabe einer Grundfunktion $L$ (siehe § 1. (1, 2)) bestimmt ist, kommt eine rein analytische Definition auf die Angabe von Bedingungen für die Funktion $L$ heraus, durch die entschieden werden kann, ob es zu der durch $L$ bestimmten Matrix $G^{(p)}$ (siehe § 1. (1, 4) und ($m$)) eine Matrix $G$ von der Art gibt, daß $G^{(p)}$ ihre $p$-te Derivierte ist. R. DEBEVER hat solche Bedingungen für den Fall $n=4$, $p=2$ angegeben. F. BRICKELL[4]) hat die Frage bei beliebigem $n$ für $p=2$ gelöst. In der vorliegenden Arbeit

---

[1]) Siehe im Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit A. KAWAGUCHI [1], [2] und gemeinsam S. HOKARI [3], [4].

[2]) Siehe E. T. DAVIES [1].

[3]) Siehe R. DEBEVER [1]

[4]) Siehe F. BRICKELL [1], insbes. S. 289—291.

lösen wir das Problem in seiner vollen Allgemeinheit für beliebiges $n$ und $p$. Die Frage ist rein algebraischer Natur und kommt auf die Angabe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür hinaus, daß eine quadratische reguläre Matrix $\binom{n}{p}$-ter Ordnung die $p$-te Derivierte einer gegebenen Matrix ist. D. E. RUTHERFORD[5]) hat in einer Arbeit gerade dieses Problem behandelt und zwar allgemeiner auch für nicht reguläre Matrizen. Leider ist es aber dem Verfasser nicht gelungen die Relationen, die die Elemente von $G^{(p)}$ befriedigen müssen, damit das Problem eine Lösung hat, tatsächlich anzugeben. Ob die diesbezüglichen gemachten Bemerkungen zum Ziel führen, steht nicht fest. Wir haben deswegen die Frage in dem hier vorliegenden Spezialfall von regulären Matrizen auf eine ganz andere Weise gelöst. Es ergaben sich so in § 2. vier Gruppen von Relationen $(B_1)$—$(B_4)$ als notwendige und hinreichende Bedingungen. Der leichteren Lesbarkeit wegen haben wir in § 1. das Wichtigste über Kawaguchische Räume metrischer Klasse zusammengestellt und dabei die DEBEVERsche Definition etwas modifiziert. Vielleicht schließt sich diese Definition etwas enger an Gedankengänge der euklidischen Geometrie an.

## § 1. Definition der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse.

Wir betrachten einen Kawaguchischen Raum, der dadurch festgelegt ist, daß das Oberflächenelement einer $p$-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1, 1}$$

durch

$$do = L(x^1, \ldots, x^n; [dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}]) \tag{1, 2}$$

bestimmt ist. Auf der rechten Seite von (1, 2) stehen nach dem Semikolon die $\binom{n}{p}$ Komponenten des einfachen $p$-Vektors, den man durch alternierende Multiplikation der $p$ infinitesimalen Vektoren

$$\partial_{u^1} x^i du^1, \partial_{u^2} x^i du^2, \ldots, \partial_{u^p} x^i du^p$$

erhält. Wir haben also in (1, 2) die abkürzende Bezeichnung

$$[dx^{i_1} \cdots dx^{i_p}] = \partial_{u^1} x^{[i_1} \cdots \partial_{u^p} x^{i_p]} du^1 \cdots du^p \tag{1, 3}$$

[5]) Siehe D. E. RUTHERFORD [1].

verwendet.[6]) Von der Funktion $L$ die für alle reellen Zahlen $n$-tupel $x^i$ und für nicht sämtlich verschwindende $\binom{n}{p}$ reelle Zahlen — an Stelle der $p$-Vektor Komponenten — definiert sei, werde vorausgesetzt, 1. daß die Ableitungen soweit sie im Folgenden auftreten, existieren und stetig sind;[7]) 2. sie durchweg positive Werte annimt; 3. in den nach dem Semikolon stehenden Argumenten positiv homogen von erster Dimension ist. Zu der einschneidensten vierten Voraussetzungen kommen wir folgendermaßen. Falls wir für die $N=\binom{n}{p}$ Kombinationen der Zahlen von 1 bis $n$ eine feste Reihenfolge festlegen und $i_1, \ldots, i_p$ der Reihe nach Wertesysteme dieser Kombinationen sind, wobei $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, dann soll die quadratische Form in den $N$ Hilfsveränderlichen $x^{i_1 \cdots i_p}$

$$(1,4) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\substack{(i_1 \ldots i_p)\\(j_1 \ldots j_p)}} \frac{1}{2}\, \partial_{q^{i_1 \ldots i_p}} \partial_{q^{j_1 \ldots j_p}} L^2(x; q^{i_1 \cdots i_p})\, x^{i_1 \cdots i_p} x^{j_1 \cdots j_p} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{(i_1 \ldots i_p)\\(j_1 \ldots j_p)}} g_{i_1 \ldots i_p; j_1 \ldots j_p}\, x^{i_1 \cdots i_p} x^{j_1 \cdots j_p} \end{aligned}$$

(Summation über alle Kombinationen der Zahlen von 1 bis $n$) positiv definit sein. In $L(x; q^{i_1 \cdots i_p})$ bedeuten die $N$ Veränderlichen $q^{i_1 \cdots i_p}$ nich unbedingt die Komponenten eines einfachen $p$-Vektors, hingegen stets die Komponenten eines $p$-Vektors. Es gilt daher

$$(1,5) \qquad q^{k_1 \cdots k_p} = \pm\, q^{i_1 \cdots i_p}$$

und folglich ist

$$(1,6) \qquad \partial_{q^{k_1 \ldots k_p}} L = \pm\, \partial_{q^{i_1 \ldots i_p}} L.$$

Je nachdem ob die aus den gleichen Zahlen bestehenden Folgen $k_1, \ldots, k_p$ und $i_1, \ldots, i_p$ Permutationen derselben oder verschiedener Klassen sind, soll das positive bezw. negative Vorzeichen stehen.

Wir wollen nun festsetzen, daß nicht nur die infinitesimalen $p$-Vektoren (1, 3) einen durch (1, 2) bestimmten Inhalt besitzen, sondern, daß jeder ein-

---

[6]) $[dx^{i_1} \cdots dx^{i_p}]$ ist also nicht das alternierende Differential entsprechend der Cartanschen Symbolik, da sonst schon der Fall der euklidischen Geometrie für die ja, bei Verwendung von rechtwinckeligen cartesischen Koordinaten

$$do^2 = \sum_{i_1, \ldots i_p} [dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}]\,[dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}],$$

(Summation über alle Kombinationen $p$-ter Klasse der Zahlen 1 bis $n$) ausgeschlossen würde.

[7]) In unserem Betrachtungen sind dies bloß die zweiten Ableitungen nach den $p$-Vektor Komponenten. In der Krümmungstheorie treten aber auch noch weitere Ableitungen auf.

fache $p$-Vektor $q^{i_1 \cdots i_p}$ eines Punktes einen durch

$$I = L(x^1 \cdots x^n ; q^{i_1 \cdots i_p}) \tag{1, 7}$$

bestimmten Inhalt besitze.

R. DEBEVER[8]) hat eine besondere Klasse dieser Räume, die sogenannten metrischen definiert. Wir geben hier eine Definition dieser Räume, die im Vergleich zur DEBEVERschen etwas modifiziert ist, sich aber im Wesentlichen gleichfalls auf die schon bei ihm zu findende Einführung zweier Indikatrizen[8]) stützt. Um uns leichter ausdrücken zu können, führen wir noch folgende Definitionen ein.

**Definition 1.** *Eine p-Stellung heiße euklidisch eingespannt, falls man ihr einen n-dimensionalen euklideschen Vektorraum zuordnet.*

Die $q^{i_1 \cdots i_p}$ seien $N$ Veränderliche wie sie in (1, 4) vorkommen.

**Definition 2.** *Die Gleichung*

$$L(x ; q^{i_1 \cdots i_p}) = 1 \tag{1. 8}$$

*definiere bei festem $x^i$, die zu diesem Punkte gehörige Indikatrix der Inhaltsmaßbestimmung des Kawaguchischen Raumes.*

In einem affinen Raum $E_N$ ist die Indikatrix wegen (1, 5) eine konvexe Fläche. Im $E_N$ soll jeder (1, 8) genügende Vektor ein Einheitsvektor sein. Unter ihnen befinden sich dann auch die zum Punkte $x^i$ gehörenden einfachen $p$-Vektoren des Kawaguchischen Raumes von Einheitsinhalt.

Ist $\underset{0}{x}{}^{i_1 \cdots i_p}$ irgend ein Vektor des $E_N$, dann heisse die Fläche zweiter Ordnung, die den Ursprung des Koordinatensystems zum Mittelpunkt hat, und die Indikatrix im Endpunkt des Einheitsvektors

$$\xi^{i_1 \cdots i_p} = \frac{\underset{0}{x}{}^{i_1 \cdots i_p}}{L(x ; \underset{0}{x}{}^{i_1 \cdots i_p})} \tag{1, 9}$$

oskuliert, die zur Richtung $\underset{0}{x}{}^{i_1 \cdots i_p}$ gehörige oskulierende Indikatrix. Ihre Gleichung ist in den laufenden Koordinaten $x^{i_1 \cdots i_p}$ wegen der Abkürzung in (1, 4),

$$g_{i_1 \cdots i_p ; j_1 \cdots j_p} (x ; \underset{0}{x}{}^{i_1 \cdots i_p})\, x^{i_1 \cdots i_p} x^{j_1 \cdots j_p} = 1. \tag{1, 10'}$$

Wegen der Homogenitätsvoraussetzung 3., hängt die Indikatrix nur von der Richtung des Vektors $\underset{0}{x}{}^{i_1 \cdots i_p}$ ab. Da für irgend eine $p$-Stellung des Kawaguchischen Raumes zwei beliebige einfache $p$-Vektoren (deren Orientierung natürlich mit der der $p$-Stellung übereinstimmt) sicht nur um einen positiven konstanten Faktor unterscheiden, ist folgende Definition sinnvoll

[8]) Siehe R. DEBEVER [1] S. 30—31. und S. 70—81.

**Definition 3.** *Ist $q^{i_1 \cdots i_p}$ irgendein einfacher p-Vektor einer p-Stellung, dann soll*

$$g_{i_1 \ldots i_p ; j_1 \ldots j_p}(x ; q^{i_1 \cdots i_p})\, x^{i_1 \cdots i_p} x^{j_1 \cdots j_p} = 1 \tag{1, 10}$$

*die zu dieser p-Stellung gehörige oskulierende Inhaltsindikatrix heißen. Der Tensor 2p-ter Stufe $g_{i_1 \ldots i_p ; j_1 \ldots j_p}$ ist der Maßtensor der Inhaltsbestimmung.*

Ist somit $t^{i_1 \cdots i_p}$ ein belibieger einfacher $p$-Vektor des Punktes $x^i$, so ist sein quadrierter Inhalt bezüglich der oskulierenden Maßbestimmung durch

$$I^2 = g_{i_1 \ldots i_p ; j_1 \ldots j_p}(x ; q^{i_1 \cdots i_p})\, t^{i_1 \cdots i_p} t^{j_1 \cdots j_p} \tag{1, 11}$$

gegeben.

Wir kommen nun zur Definition der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse.

**Definition.** *Ein Kawaguchischer Raum heißt metrisch, falls sich jede, zu einem beliebigen Punkte gehörige p-Stellung derartig euklidisch einspannen läßt, daß die Inhaltsmessung der diesem euklidischen Vektorraum angehörigen einfachen p-Vektoren gleich der zur p-Stellung gehörigen oskulierenden Inhaltsmessung ist.*

Sind $\mathfrak{e}_i(x ; q^{i_1 \cdots i_p})$ die Basisvektoren der euklidischen Einspannung die zu der durch $q^{i_1 \cdots i_p}$ bestimmten $p$-Stellung gehören und gilt für dieselben

$$\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k = g_{ik}(x ; q^{i_1 \cdots i_p}) \tag{1, 12}$$

dann ist die Inhaltsmessung für einfache $p$-Vektoren bekanntlich durch den Tensor $2p$-ter Stufe

$$p!\, g_{[i_1 [j_1} g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_p] j_p]}$$

bestimmt. Hieraus und aus unsrer Definition folgt somit, daß ein Kawaguchischer Raum dann und nur dann von metrischer Klasse ist, falls

$$g_{i_1 \ldots i_p ; j_1 \ldots j_p} = p!\, g_{[i_1 [j_1} g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_p] j_p]} \tag{1, 13}$$

gilt.

Wir können aus den Tensorkomponenten $g_{i_1 \ldots i_p ; j_1 \ldots j_p}$ dadurch eine Matrix $N = \binom{n}{p}$-ter Ordnung bilden, daß wir als Element der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte dasjenige wählen, für welches $i_1 \ldots i_p$ und $j_1 \ldots j_p$ gerade die $i$-te bezw. $j$-te Kombination in der schon früher festgelegten Reihenfolge ist. Aus (1, 13) folgt dann der Satz von R. DEBEVER.[9])

Ein Kawaguchischer Raum ist dann und nur dann von metrischer Klasse, falls die Matrix

$$\| g_{i_1 \ldots i_p ; j_1 \ldots j_p} \| \tag{m}$$

eine $p$-te Derivierte ist.

---

[9]) Siehe R. DEBEVER [1] Formel [17, 11) auf S. 81.

## § 2. Notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Kawaguchischer Raum von metrischer Klasse ist.

Die Aufstellung der im Titel dieses Paragraphen angeführten Bedingungen ist auf Grund der Ergebniße des § 1. identisch mit der Angabe von notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür, daß eine symmetrische und reguläre Matrix, deren zugehörige quadratische Form positiv definit ist, die $p$-te Derivierte einer gegebenen Matrix ist. Die Bedingungen, die wir aufstellen werden, lösen, wie am Ende der Arbeit näher ausgeführt, auch die Frage für Matrizen bei denen nur Regularität vorausgesetzt ist.

Der einfacheren Schreibweise wegen setzen wir

$$(2,1) \qquad a^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_p} \overset{\text{def}}{=} g_{k_1 \dots k_p;\, j_1 \dots j_p}\,.$$

Wegen (2, 1), (1, 4) und (1, 6) gilt jetzt

$$(2,2) \qquad a^{k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_p} = a^{j_1 \dots j_p}_{k_1 \dots p}$$

und diese Größen sind sowohl in den unteren und oberen Indizes alternierend.

Die Matrix $N$-ter Ordnung

$$(2,3) \qquad G^{(p)} = \| \, a^{1 \dots p}_{j_1 \dots j_p}, \dots, a^{n-p+1, \dots n}_{j_1, \dots j_p} \|$$

können wir dann als eine solche auffassen, deren Spalten von den $p$-Vektoren

$$(p) \qquad a^{1 \dots p}_{j_1 \dots j_p}, \dots, a^{n-p+1, \dots, n}_{j_1 \dots j_p}$$

gebildet wird. Die oberen Indizes dienen jetzt nur zur Unterscheidung der $p$-Vektoren. Wegen der Voraussetzung (1, 4) ist

$$(2,4) \qquad | G^{(p)} | \neq 0.$$

Wir setzen zunächst voraus, daß $G^{(p)}$ die $p$-te Derivierte einer Matrix $G$ sei. Diese Matrix $G$ muß dann nach bekannten Sätzen über derivierte Matrizen regulär und symmetrisch sein. Außerdem muß eine zu $G$ gehörige quadratische Form positiv definit sein. Dies erkennt man, wenn man $G$ mit Hilfe einer regulären Matrix auf die Diagonalform bringt. Aus unsrer Voraussetzung ergibt sich, daß die $N$ $p$-Vektoren der Reihe ($p$) lauter einfache $p$-Vektoren sind. Es gelten somit die Relationen [10]

$$(B_1) \qquad a^{k_1 \dots k_p}_{[j_1 \dots j_p}\, a^{k_1 \dots k_p}_{s_1] \dots s_p} = 0.$$

(In ($B_1$) ist nach den gleichen oberen Indizes nicht zu summieren).

Es sei

$$p + 2 \leqq n$$

und $k_1 \dots k_p$, $s_1 \dots s_p$ seien zwei Serien von Indizes die in $p-2$ Zahlen

---

[10]) Siehe J. A. Schouten [1] S. 22—23., in diesem Buche finden sich auch sämtliche, im Text über $p$-Vektoren verwendete Tatsachen, sowie die von uns verwendete Symbolik der Alternation.

übereinstimmen, während je zwei Zahlenpaare von einander verschieden sind. Nehmen wir an, daß diese Paare $k_i, k_l$ bezw. $s_j, s_k$ sind. Vertauschen wir nun einen von den Indizes $k_i, k_l$ mit einem der Indizes $s_j, s_k$ dann sollen die so aus $k_1 \dots k_k$ und $s_1 \dots s_p$ enstandenen Indexserien mit $k'_1 \dots k'_p$ und $s'_1 \dots s'_p$ bezeichnet werden. Als weitere notwendige Bedingung folgt dann für

$$n \geqq p+2$$

$$(B_2) \qquad a^{k_1 \dots k_p}_{[i_1 \dots i_p} a^{s_1 \dots s_p}_{j_1 j_2] \dots j_p} = - a^{k'_1 \dots k'_1}_{[i_1 \dots i_p} a^{s'_1 \dots s'_p}_{j_1 j_2] \dots j_p},$$

und der aus den beiden einfachen $p$-Vektoren, durch die in $(B_2)$ angegebene Multiplikation, entstandene Tensor ist bei Festhaltung der Indizes $j_3 \dots j_p$ ein einfacher $(p+2)$-Vektor, bei Festhaltung der Indizes $i_1 \dots i_p j_1 j_2$ ein einfacher $(p-2)$-Vektor.

*Bedingung* $(B_3)$. Wir wählen $M$ der einfachen $p$-Vektoren aus der Reihe $(p)$ und bilden nach folgender Vorschrift ihr alternierendes Produkt. Treten bei einem $p$-Vektor etwa $h$ obere Indizes auf, die in der angeschriebenen Reihenfolge der $p$-Vektoren als obere Indizes schon vorkamen, dann sollen bei diesem $p$-Vektor $h$ der unteren Indizes bei der Bildung der Alternation ausgeschlossen werden. (Dies soll in der Schreibweise durch Anbringung von Absolutzeichen an entsprechenden Stellen angedeutet werden.) Dieses Verfahren wird bei jedem weiteren $p$-Vektor wiederholt. Sind unter den oberen Indizes der $M$ $p$-Vektoren gerade $m \leqq n$ verschiedene Indizes vorhanden, dann stellt das alternierende Produkt bei Festhaltung der ausgeschlossenen Indizes einen einfachen $m$-Vektor dar. Bildet man auf dieselbe Art aus einer anderen Reihe von einfachen $p$-Vektoren $(p)$ das alternierende Produkt, wobei jetzt auch die Anzahl der $p$-Vektoren nicht mit derjenigen der früheren übereinstimmen muß, hingegen ebenfalls genau $m$ verschiedene obere Indizes vorhanden sind, dann stimmen die beiden einfachen $m$-Vektoren bis auf einen Faktor überein, falls die beiden Reihen von $m$ verschiedenen Indizes, in beiden Produkten, abgesehen von einer Permutation, identisch sind. Die Bedingungen $(B_2)$ und $(B_3)$ folgen auf Grund der Definition der Alternation mit Hilfe des LAPLACEschen Entwicklungssatzes. Ist

$$(2,5) \qquad G = \| \overset{1}{a}_i, \overset{2}{a}_i, \dots, \overset{n}{a}_i \|$$

so ist der in $(B_3)$ vorkommende einfache $m$-Vektor, falls die verschiedenen oberen Indizes $k_1, k_2, \dots, k_m$ sind, bis auf einen Faktor durch

$$a^{k_1}_{[i_1} \cdots a^{k_m}_{i_m]}$$

bestimmt.

Wir illustrieren Bedingung $(B_3)$ an folgendem Beispiel

$$a^{1\,2\,3 \dots p}_{[j_1 \dots j_p} a^{1\,2\,4 \dots p+1}_{k_1 | k_2 \dots k_p |} a^{3\,4 \dots p+1\; p+2\; p+3}_{s_1 s_2] s_3 \dots, s_p} =$$

$$(2,6) \qquad C \cdot a^{1\,3\,5 \dots p+2}_{[j_1 \dots j_p} a^{1\,2\,3\,5 \dots p+1}_{k_1 | k_2 \dots k_p |} a^{2\,3\,4 \dots p+1}_{s_1 | m_2 \dots m_p |} \cdot a^{2\,3\,5 \dots p+1\; p+2\; p+3}_{s_2] l_2 \dots l_p}.$$

Die Indizes $k_2 \dots k_s, s_3 \dots s_p, m_2 \dots m_p, l_2 \dots l_p$ sind fest zu halten.

*Bedingung* ($B_4$). Bilden wir nach Bedingung ($B_3$) dadurch $n$ verschiedene einfache ($n-1$)-Vektoren, daß in der Reihe der verschiedenen oberen Indizes sämtliche der Zahlen von 1 bis $n$, mit Ausnahme von stets je einer, vorkommen, dann ist die aus diesen ($n-1$)-Vektoren als Spalten oder Zeilen gebildete Matrix regulär.

Die betrachtete Matrix ist wegen ($B_3$) bis auf einen Faktor die ($n-1$)-te Derivierte der regulären Matrix $G$.

Wir weisen nun nach, daß die Bedingungen ($B_1$)—($B_4$) auch hinreichend sind.

Zunächst ergibt sich aus der in ($B_1$) vorausgesetzten Einfachheit der $p$-Vektoren ($p$), daß die in Bedingung ($B_3$) auftretenden $m$-Vektoren und daher auch die in ($B_4$) auftretenden ($n-1$)-Vektoren einfach sind.

Wir bilden nun aus den in Bedingung $B_4$ auftretenden, mit $A^{k_1 \dots k_{n-1}}_{i_1 \dots i_{n-1}}$ bezeichneten einfachen ($n-1$)-Vektoren $n$, aus je $n-1$ homogenen Gleichungen bestehende Gleichungssysteme. Das $i$-te Gleichungssystem

$$A^{k_1 \dots k_{i-1}\, i\, k_{i+1} \dots k_{n-1}}_{[i_1 \dots i_{n-1}} x_{i_n]} = 0 \tag{2, 7}$$

sei dadurch festgelegt, daß die Zahl $i$ als oberer Index in sämtlichen $n-1$ Gleichungen auftritt, während $k_1 \dots k_{i-1} k_{i+1} \dots k_{n-1}$ aus den ($n-1$) Kombinationen der Zahlen $1, 2 \dots i-1, i+1 \dots n$ besteht. Die $n$ Gleichungssysteme sind somit:

$$\begin{aligned} A^{1 k_1 \dots k_{n-1}}_{[i_1 \quad i_{n-1}} x_{i_n]} &= 0 \\ A^{k_1\, 2\, k_3 \dots k_{n-1}}_{[i_1 \dots \quad i_{n-1}} x_{i_n]} &= 0 \\ &\vdots \\ A^{k_1 k_2 \dots k_{n-2}\, n}_{[i_1 \dots i_{n-1}} x_{i_n]} &= 0. \end{aligned} \tag{2, 8}$$

Aus der Bedingung ($B_4$) folgt, daß der Rang jedes einzelnen Gleichungssystems $n-1$ ist, und daß keines der Gleichungssysteme eine Folge der anderen ist. Die Lösungsvektoren $\overset{1}{x}_i, \overset{2}{x}_i, \dots, \overset{n}{\phantom{x}}$ sind somit bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmt und voneinander linear unabhängig. Ist $n = p + 1$ dann ist bekanntlich jeder $p$-Vektor einfach, die Bedingung ($B_1$) ist also von selbst erfüllt, Bedingung ($B_2$) fällt hier weg und die Bedingung ($B_4$) ist mit der Voraussetzung (2, 4) identisch. Das Gleichungssystem (2, 8) wird in diesem Falle mit den gegebenen $p$-Vektoren gebildet, und man kommt so zu $p+1$ linear unabhängigen Vektoren ohne sich auf irgendwelche Voraussetzungen zu stützen.

Betrachten wir nun die $p$ Lösungsvektoren $\overset{s_1}{x}_i, \dots, \overset{s_p}{x}_i$. In den $p$ Gleichungssystemen von (2, 8) für die diese Vektoren der Reihe nach Lösungen sind, gibt es nun, wie man unschwer feststellt, je $n-p$ Gleichungen die sämtliche gleichzeitig von allen diesen Vektoren befriedigt werden. Anderseits bestimmt jedes System dieser $n-p$ Gleichungen ein $p$-dimensionales Vektorgebilde das bis auf einen Faktor durch einen einfachen $p$-Vektor dargestellt wird. Daraus ergibt sich, daß für diesen einfachen $p$-Vektor $p_{i_1 \dots i_p}^{s_1 \dots s_p}$ die Darstellung

$$(2, 9) \qquad p_{i_1 \dots i_p}^{s_1 \dots s_p} = \overset{(s_1 \dots s_p)}{k} \overset{s_1}{x}_{[i_1} \dots \overset{s_p}{x}_{i_p]}$$

gilt. Da nun in den Systemen von je $(n-p)$ Gleichungen bei den $A$ als obere Indizes $s_1 \dots s_p$ stets auftreten müssen, kann auf Grund der Bedingung $(B_3)$ erreicht werden, daß in diesen Gleichungen der einfache $p$-Vektor $a_{i_1 \dots i_p}^{s_1 \dots s_p}$ auftritt. Dann folgt aber aus der Definition des alternierenden Produktes, daß für sämtliche dieser Gleichungen

$$(2, 10) \qquad A_{[i_1 \dots \quad i_{n-1}}^{s_1 \dots s_p k_{p+1} \dots k_{n-1}} a_{i_n] j_1 \dots j_{p-1}}^{s_1 \dots s_p} = 0$$

gilt. Aus (2, 9) und (2, 10) folgt hiernach

$$(2, 11) \qquad a_{i_1 \dots i_p}^{s_1 \dots s_p} = \overset{(s_1 \dots s_p)}{C} \overset{s_1}{x}_{[i_1} \dots \overset{s_p}{x}_{i_p]}.$$

Wir zeigen jetzt, daß es $n$ von Null verschiedene Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ gibt, so daß

$$(2, 12) \qquad \overset{(s_1 \dots s_p)}{C} = \varrho_{s_1} \dots \varrho_{s_p}$$

wird.

Wir betrachten zunächst den Fall $n = p+1$ und machen den Ansatz

$$(2, 13) \qquad a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} = \varrho_{k_1} \overset{k_1}{x}_{[i_1} \varrho_{|k_2|} \overset{k_2}{x}_{i_2} \cdots \varrho_{|k_p|} \overset{k_p}{x}_{i_p]}.$$

Falls wir für $i_1 \dots i_p$ ein solches Wertesystem wählen für das $a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{1 2 \dots p}$ von Null verschieden ist und für diese Komponente die unteren Indizes nicht anschreiben, und die entsprechende Komponente des alternierenden Produktes der $\overset{s}{x}_i$ mit $x^{1 2 \dots p}$ bezeichnen, so erhalten wir gemäß (2, 13)

$$(2, 14) \qquad \varrho_1 = \frac{a^{1 2 \dots p}}{\varrho_2 \dots \varrho_p x^{1 2 \dots p}}.$$

Aus dem $p$-Vektor der den oberen Index $p$ nicht enthält, ergibt sich wegen (2, 13) und (2, 14)

$$(2, 15') \qquad \varrho_p = \varrho_{p+1} \frac{a^{1 2 \dots p}}{a^{1 2 \dots p-1\, p+1}} \frac{x^{1 2 \dots p-1\, p+1}}{x^{1 2 \dots p}}$$

und allgemein

$$(2, 15) \qquad \varrho_{p-s} = \varrho_{p+1} \frac{a^{1 2 \dots p}}{a^{1 2 \dots p-s-1,\, p-s+1 \dots p}} \cdot \frac{x^{1 2 \dots p-s-1,\, p-s+1 \dots p}}{x^{1 2 \dots p}}.$$

Setzen wir die Werte von (2, 15) und (2, 15') in

$$a^{2 \dots p+1} = \varrho_2 \dots \varrho_{p+1} x^{2 \dots p+1}$$

ein, so kommt

$$(2,16) \qquad (\varrho_{p+1})^p \cdot C = a^{2 \dots p+1}.$$

Gleichung (2, 16) zeigt, daß bei Beschränkung auf reelle Werte, falls $p$ ungerade ist $\varrho_{p+1}$ eindeutig, im Falle $p$ gerade ist, $\varrho_{p+1}$ bis auf das Vorzeichen bestimmt ist. Aus (2, 14), (2, 15') und (2, 15) sind sämtliche $\varrho_s$ bestimmbar. Bei ungeradem $p$ gibt es also genau ein, bei geradem zwei Systeme der gewünschten Art. Setzt man

$$(2,17) \qquad \overset{k}{a}_i = \varrho_k \overset{k}{x}_i \text{ (nicht summieren nach } k\text{!)}$$

so ist im Falle $n = p+1$ die Matrix $G$ ohne irgendwelche Bedingungen eindeutig bestimmbar. Aus der Bedingung, daß $G$ die Matrix einer positiv definiten Form ist, ergibt sich nämlich, die Eindeutigkeit im Falle eines geraden $p$.

Bei der Erledigung des allgemeinen Falles dürfen wir

$$n \geqq p+2$$

voraussetzen. Wir bestimmen zunächst, wie im Falle $n = p+1$ die Zahlen $\varrho_1, \dots \varrho_{p+1}$ aus den $p+1$ einfachen $p$-Vektoren $a^{k_1 \dots k_p}_{i_1 \dots i_p}$ in deren oberen Indizes bloß die Zahlen von 1 bis $p+1$ auftreten. Um $\varrho_{p+2}$ zu bestimmen, gehen wir von einem $p$-Vektor aus, in dem als oberer Index die Zahl $p+2$ und sonst aber lauter kleinere Zahlen vorkommen. Ein solcher ist etwa

$$(p_1) \qquad a^{1\,2 \dots p-2\, p+1\, p+2}_{i_1 \dots \dots \dots i_p}.$$

Wählen wir eine von Null verschiedene Komponente von $(p_1)$ und schreiben deren unteren Indizes nicht an, so ergibt sich

$$(2,18) \qquad \varrho_{p+2} = \frac{a^{1\,2 \dots p-2\, p+1\, p+2}}{\left[\overset{1}{a}\,\overset{2}{a} \cdots \overset{p-2}{a}\;\overset{p+1}{a}\;\overset{p+2}{x}\right]}.$$

Im Nenner der rechten Seite von (2, 18) haben wir die feste Komponente des alternierenden Produktes der $p$ auftretenden Vektoren, durch eine eckige Klammer angedeutet. Man muß jetzt nachweisen, daß jeder $p$-Vektor, dessen obere Indizes der Zahlenreihe von 1 bis $p+2$ entnommen sind, das alternierende Produkt der Vektoren (2, 17) und des Vektors

$$(2,19) \qquad \overset{p+2}{a}_i = \varrho_{p+2} \overset{p+2}{x}_i$$

sein muß. Dies ergibt sich aus der Bedingung $(B_2)$.

*Beweis.* Außer dem $p$-Vektor $p_1$ wählen wir noch den $p$-Vektor

$$(p_2) \qquad a^{1\,2 \dots p-2\, p-1\, p}_{i_1 \dots \dots \dots i_p}$$

Die beiden $p$-Vektoren haben die oberen Indizes 1 bis $p-2$ gemein, während die Paare $p-1$, $p$ von $(p_2)$ und die Paare $p+1$, $p+2$ von $(p_1)$ verschieden sind. Vertauschen wir den Index $p+1$ von $(p_1)$ mit $p-1$ von $(p_2)$ und schreiben für die so erhaltenen $p$-Vektoren die Gleichung der Bedingung $(B_2)$ an, so folgt, daß auch der $p$-Vektor

$$(p_3) \qquad a^{1\,2\,\ldots\,p-2\,p-1\,p+2}_{i_1\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,i_p}$$

das alternierende Produkt der Vektoren (2, 17) und (2, 19) sein muß. Vertauschen wir $p+1$ von $(p_1)$ mit $p$ von $(p_2)$ so erhalten wir auf dieselbe Weise auf Grund der Bedingung $(p_2)$ daß auch der $p$-Vektor

$$(p_4) \qquad a^{1\,2\,\ldots\,p-2\,p\,p+2}_{i_1\,\ldots\ldots\ldots\,i_p}$$

das alternierende Produkt der Vektoren (2, 17) und (2, 19) ist. Um nun allgemein nachzuweisen, daß ein $p$-Vektor in dem $p+2$ der größte Index ist, das alternierende Produkt der Vektoren (2, 17) und (2, 19) sein muß, haben wir nur nachzuweisen, daß auch der $p$-Vektor mit der oberen Indexreihe

$$1, 2, \ldots, p-i-1, p-i+1, \ldots p\; p+2 \qquad (i=2, \ldots p)$$

das äußere Produkt dieser Vektoren ist.

Dazu betrachten wir außer dem $p$-Vektor $(p_3)$ noch den $p$-Vektor

$$(p_5) \qquad a^{1,\,\ldots,\,p-i-1,\,p-i+1\,\ldots\,p\,p+1}_{i_1\,\ldots\qquad\qquad\qquad i_p}.$$

Vertauschen wir den Index $p-i$ von $(p_3)$ mit $p$ von $(p_5)$, so ergibt sich aus der Gleichung von Bedingung $(B_2)$ die Richtigkeit der Behauptung. Berechnen wir $\varrho_{p+3}$ aus einer Gleichung

$$a^{k_1\,\ldots\,k_{p-1}\,p+3}_{i_1\qquad\qquad i_p} = \varrho_{k_1}\ldots\varrho_{k_{p-1}}\,\varrho_{p+3}\,\overset{1}{a}_{[i_1}\ldots\overset{k_{p-1}}{a}_{i_{p-1}}\,\overset{p+3}{x}_{i_p]}$$
$$(k_1 < \ldots < k_{p-1} < p+3),$$

so ergibt sich genau so wie vorher, daß sämtliche $p$-Vektoren, deren höchster oberer Index $p+3$ ist, ein äußeres Produkt ist, daß aus Vektoren von (2, 17), (2, 19) und

$$(2, 20) \qquad \overset{p+3}{a}_i = \varrho_{p+3}\,\overset{p+3}{x}_i$$

gebildet ist. Auf diese Weise folgt nach einer endlichen Anzahl von Schritten die Behauptung.

Aus dem Bemerkungen im Falle $n=p+1$ entnimmt man, daß die Bestimmung der $\varrho_k$ bei Beschränkung auf reelle Werte für gerade $p$ zweideutig, für ungerade $p$ eindeutig ist. Da aber, wie wir schon feststellten, die Matrix $G$ diejenige einer positiv definiten Form ist, folgt, daß auch bei geraden $p$ nur ein Wertesystem möglich ist. Unser Ergebnis können wir in folgendem Satze zusammenfassen.

**Satz:** *Genügen die reellen Elemente einer regulären und symmetrischen Matrix der Ordnung* $\binom{n}{p}$ *deren zugehörige quadratische Form positiv definit* *ist, für $n \geqq p+2$ den Bedingungen $(B_1)-(B_4)$, dann gibt es gerade eine reelle Matrix $G$ von $n$-ter Ordnung, deren $p$-te Derivierte die gegebene Matrix ist. Diese Matrix $G$ ist regulär, symmetrisch und die zu ihr gehörige quadratische Form ist positiv definit.*

Aus unserem Satze folgt, daß die Kawaguchischen Räume metrischer Klasse durch eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Grundfunktion $L(x; p^{i_1 \cdots i_p})$ ausgezeichnet sind, die sich ergeben falls man in den Bedingungen $(B_1)-(B_4)$ an Stelle der $a^{k_1 \cdots k_p}_{i_1 \cdots i_p}$ die sich aus (1, 4) und (2, 1) ergebenden Einsetzungen macht.

1. Bemerkung. Erfüllt eine quadratische reguläre Matrix der Ordnung $\binom{n}{p}$ deren Elemente reelle sind die Bedingungen $(B_1)-(B_4)$, dann gibt es falls man sich auf reelle Matrizen beschränkt, eine Matrix, deren $p$-te Derivierte die gegebene ist.

2. Bemerkung. Man kann die $\binom{n}{p}$ einfachen $p$-Vektoren $a^{k_1 \cdots k_p}_{i_1 \cdots i_p}$ auch als (homogene) Grassmannsche Koordinaten von $\binom{n}{p}$ $(p-1)$-dimensionalen linearen Räumen im projektiven Raum von $n-1$-dimensionen auffassen. Die Bedingungen $(B_1)-(B_4)$ sind dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß diese $\binom{n}{p}$ linearen Räume die $(p-1)$ dimensionalen Seiten eines Simplex dieses Raumes sind. Die $n$ Eckpunkte des Simplex haben durch die $\overset{k}{a}_i$ $(k=1, \ldots n)$ bestimmte homogene Koordinaten.

## Literatur.


F. Brickell [1] On metrical geometries based on an integral as fundamental invariant, *Proc. London Math. Soc.* **53** (1951), 280—293.

E. T. Davies [1] The geometry of a multiple integral, *London Math. Soc.* **20** (1945), 163—171.

R. Debever [1] Sur une classe d'espaces a connection euclidienne, Thèse, *Bruxelles*, (1947), 1—39.

A. Kawaguchi [1] Ein metrischer Raum der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist, *Monatsh. Math. Phys.* **43** (1936), 289—297.

[2] Theorie des Raumes mit dem Zusammenhang der von Matrizen abhängig ist, *Monatsh. Math. Phys.* **44** (1936), S. 131—152.

A. Kawaguchi und S. Hokari [3] Die Grundlegung der Geometrie der 5 dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des zweidimensionalen Flächeninhalts, *Proc. Imp. Acad. Jap.* **16** (1940), 313—319.

[4] Die Grundlegung der Geometrie der $n$-dimensionalen metrischen Räume auf

Grund des Begriffs des $K$-dimensionalen Flächeninhalts, *Proc. Imp. Acad. Jap.* **16** (1944), 320—325.

D. E. Rutherford [1] Compound matrices, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **51** (1951), 16—23.

J. A. Schouten [1] Ricci—Calculus, 2. Aufl. *Berlin*, 1954.

*(Eingegangen am 27. Oktober, 1955.)*