Zur Holomorphentheorie der Ringe.

Dem Andenken meines verehrten Freundes, Prof. T. Szele gewidmet.

Von J. SZENDREI in Szeged.

1. Die Grundzüge der Holomorphentheorie für Ringe wurden durch Prof. L. RÉDEI in seiner Arbeit [1] [1]) ausgebaut. Er hat die ringtheoretischen Analoga der charakteristischen Untergruppen und des mit diesen eng zusammenhängenden Holomorphes einer Gruppe eingeführt und verschiedene Analoga bekannter gruppentheoretischen Sätze untersucht. In der Holomorphentheorie für Ringe entstehen natürlich neben den gruppentheoretischen Analogien neuere Probleme, die aus der eigentümlichen Struktur der Ringe erwachsen. Die Holomorphentheorie der Ringe nimmt eine neue Farbe z. B. dadurch an, daß ein Ring — im Gegensatz zur Einzigheit des Holomorphes einer Gruppe — im allgemeinen mehrere Holomorphe hat. Die Bestimmung sämtlicher Ringe, die nur ein Holomorph haben, ist folglich eine würdige und schwierige Aufgabe. L. RÉDEI hat in der schon zitierten Arbeit bewiesen, daß die Ringe mit Einselement, die sich sonst zu den vollständigen Gruppen analog verhalten, nur ein Holomorph besitzen.

In dieser Arbeit wird es sich um eine weitere wichtige Klasse der Ringe handeln, die ebenfalls nur ein Holomorph haben. Wir werden nämlich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür geben, daß ein Ring nur ein Holomorph habe, das zugleich kommutativ ist. Es wird gezeigt, daß die kommutativen nullteilerfreien Ringe zu dieser Klasse der Ringe gehören. Neben diesen Resultaten beschäftigen wir uns mit einigen ringtheoretischen Analoga der bekannten gruppentheoretischen Sätze, nach denen das Zentrum eine charakteristische Untergruppe ist und die volle innere Automorphismengruppe in der vollen Automorphismengruppe einer Gruppe als Normalteiler enthalten ist.

2. Bezüglich der Begriffe der Holomorphentheorie für Ringe halten wir uns stets an L. RÉDEI [1], doch werden wir die benützten grundlegenden Begriffe und Resultate hier kurz zusammenfassen. P bezeichnet einen Ring, $0, \alpha, \beta, \ldots$ sind die Elemente von P. Für eine Doppelabbildung a von P in

[1]) Mit [ ] verweisen wir auf die Arbeiten am Ende dieses Artikels.

sich bezeichnet man mit $a\alpha, \alpha a$ die entsprechenden zwei Bilde von α, so daß dann a aus den zwei Abbildungen

$$\alpha \to a\alpha,\ \alpha \to \alpha a \qquad (\alpha \in \mathsf{P}) \tag{1}$$

besteht (in dieser Reihenfolge). Insbesondere bezeichnen e und $\underline{0}$ die identische bzw. die triviale Doppelabbildung von P; unter der letzteren versteht man diejenige Doppelabbildung von P in sich, bei der alle Bildelemente gleich 0 sind. In der Menge dieser Doppelabbildungen definiert man die Summe $a+b$ und das Produkt ab als diejenigen Elemente der Menge, für die

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \qquad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \tag{2}$$

$$ab\alpha = a(b\alpha), \qquad \alpha ab = (\alpha a)b \tag{3}$$

besteht. Ein *Doppelhomothetismus* von P bedeutet eine Doppelabbildung a von P in sich mit den Eigenschaften:

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta, \qquad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a, \tag{4}$$

$$a\alpha\beta = (a\alpha)\beta, \qquad \alpha\beta a = \alpha(\beta a), \tag{5}$$

$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta), \tag{6}$$

$$(a\alpha)a = a(\alpha a). \tag{7}$$

Ein beliebiger Ring D von *befreundeten Doppelhomothetismen* von P ist ein Ring, bestehend aus Doppelabbildungen von P in sich mit den Eigenschaften (2)—(6) und

$$(a\alpha)b = a(\alpha b) \tag{8}$$

für alle $a, b \in D$ und $\alpha, \beta \in \mathsf{P}$[2]). Es ist nach (2)—(6) und (8) klar, daß die sämtlichen Doppelabbildungen der Form

$$\alpha \to \varrho\alpha,\ \alpha \to \alpha\varrho \qquad (\varrho \in \mathsf{P})$$

einen Ring D_0 von befreundeten Doppelhomothetismen von P bilden, der kurz den *vollen inneren Doppelhomothetismenring* von P genannt wird. — Nach RÉDEI ist jeder Ring D von befreundeten Doppelhomothetismen von P in mindestens einem solchen maximalen Ring D^* enthalten. Für jeden dieser Ringe D^* definieren wir in der Menge aller Paare

$$(a, \alpha) \qquad (a \in D^*, \alpha \in \mathsf{P})$$

die Addition und Multiplikation durch

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta), \tag{9}$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta). \tag{10}$$

So entsteht eine faktorenfreie (also zerfallende) Schreiersche Erweiterung von P mit D^*, die man nach RÉDEI die D^* zugehörige zerfallende Erweite-

---

[2]) Es ist klar, daß (7) in (8) enthalten ist.

rung von P nennt und mit $D^* \cdot P$ bezeichnet. Diese sind die *Holomorphe* des Ringes P [3]).

3. Es ist wohl bekannt, daß die volle Automorphismengruppe einer Gruppe die volle innere Automorphismengruppe als Normalteiler enthält. Das ringtheoretische Analogon dieses Satzes ist der folgende

Satz 1. *Der volle innere Doppelhomothetismenring D_0 ist ein Ideal in jedem maximalen Ring D^* von befreundeten Doppelhomothetismen von* P.

Da D_0 in allen D^* enthalten sein muss, folgt die Behauptung, d. h. $a\varrho, \varrho a \in D_0$, wo a und ϱ je ein beliebiges Element von D^* bzw. D_0 sind, trivial erweise aus der Definition von a.

Das Annullatorideal A von P, unter dem wir das Ideal derjenigen $\nu(\in P)$ verstehen, für die $\nu P = P\nu = 0$ gilt, spielt in mehreren Fällen eine ähnliche Rolle in der Ringtheorie wie das Zentrum einer Gruppe in der Gruppentheorie (s. L. Rédei [1], J. Szendrei [2]). Es ist auch bekannt, daß das Zentrum einer Gruppe eine charakteristische Untergruppe ist. Ein ähnliches Resultat ist der folgende

Satz 2. *Das Annullatorideal* A *von* P *ist charakteristisch.*

Nach Rédei nennt man einen Unterring P′ des Ringes P charakteristisch, wenn P′ in allen Schreierschen Erweiterungen von P ein Ideal ist. Um die Behauptung von Satz 2 zu beweisen, betrachten wir eine beliebige Schreiersche Erweiterung Σ von P und ein Element σ in Σ und ein α in A. Da $\sigma\alpha \in P$, haben wir

$$(\sigma\alpha)\xi = \sigma(\alpha\xi) = \sigma 0 = 0, \tag{11}$$

und es gilt auch

$$\xi(\sigma\alpha) = (\xi\sigma)\alpha = 0 \tag{12}$$

wegen $\xi\sigma \in P$ für alle ξ in P. Die duale Behauptung für $\alpha\sigma$ kann in ähnlicher Weise gewonnen werden. Aus (11), (12) folgt, dass $\sigma\alpha$ und $\alpha\sigma$ in A sind, d. h. A in Σ als Ideal enthalten ist, womit der Satz bewiesen ist.

4. Nach den im vorigen entwickelten Analogien werden wir nun diejenigen Ringe charakterisieren, die nur ein Holomorph haben, und dieses Holomorph kommutativ ist. Wir beweisen den folgenden merkwürdigen

---

3) Verf. hat in [3] eine begrifflich einfache, aber weniger explizite Definition der Holomorphe der Ringe gegeben. Man kann diese Definition explizit zu machen, aber jetzt treten die Doppelhomothetismen von P nicht auf, nur die Ringe von befreundeten Doppelhomothetismen von P. Wir werden aber auch die Doppelhomothetismen von P brauchen, deshalb benutzen wir die von Rédei herrührende Definition.

Satz 3. *Ein Ring* P *hat dann und nur dann nur ein und zwar kommutatives Holomorph, wenn die Bedingung*

$$(12) \qquad ab\alpha = \alpha ab \qquad (\alpha \in \mathrm{P})$$

für alle Doppelhomothetismen a, b *von* P *erfüllt ist.*

Den Beweis fangen wir mit dem Teil „dann" an. Mit $b = e$ folgt aus (12)

$$(13) \qquad a\alpha = \alpha a.$$

Jeder Doppelhomothetismus von P besteht somit aus zwei gleichen Endomorphismen von P^+. Nach (13) ist es klar, daß P selbst ein kommutativer Ring ist. Um die Einzigkeit des Holomorphes von P zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß zwei beliebige Doppelhomothetismen a, b von P paarweise befreundet sind. Aus (13), (3) und (12) folgt

$$(a\alpha)b = b(a\alpha) = ba\alpha = \alpha ba = (\alpha b)a = a(\alpha b),$$

d. h. (8) ist erfüllt. Aus der Behauptung haben wir noch die Kommutativität des Holomorphes von P zu beweisen. Da der Ring P kommutativ ist und (13) gilt, genügt es die Kommutativität der Multiplikation der Doppelhomothetismen von P zu zeigen. Diese wird aber aus (3), (13), (8) einfach gewonnen, nämlich

$$ab\alpha = a(b\alpha) = a(\alpha b) = (a\alpha)b = b(a\alpha) = ba\alpha,$$

d. h.

$$ab = ba.$$

Hieraus folgt wegen (13)

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta) = (ba, b\alpha + \beta a + \beta\alpha) = (b, \beta)(a, \alpha),$$

d. h. die Multiplikation des Holomorphes von P ist in der Tat kommutativ, womit wir den Teil „dann" bewiesen haben.

Die Behauptung „nur dann" folgt sofort aus der Multiplikationsregel (10) des Holomorphes von P. Damit haben wir den Beweis des Satzes 3 beendet.

L. Rédei hat in seiner Arbeit bewiesen, daß alle Holomorphe eines kommutativen nullteilerfreien Ringes kommutativ sind. (Vgl. L. Rédei [1], Satz 5.) Wir werden hier auf Grund von Satz 3 eine Verschärfung dieses Resultats geben, nämlich wir beweisen den folgenden

Satz 4. *Ein kommutativer nullteilerfreier Ring hat nur ein Holomorph, und dieses ist kommutativ.*

Bezeichne jetzt P einen kommutativen nullteilerfreien Ring. Mit Berücksichtigung des Satzes 3 genügt es zu zeigen, daß (12) für alle Doppelhomothetismen a, b von P und für alle $\alpha \in \mathrm{P}$ erfüllt ist. Für jeden Doppelhomothetismus a, b von P gilt nach (3) und (6)

$$\alpha(ab\alpha) = \alpha(a(b\alpha)) = (\alpha a)(b\alpha) = ((\alpha a)b)\alpha = (\alpha ab)\alpha,$$

woraus nach der Annahme zuerst $(ab\alpha - \alpha ab)\alpha = 0$, dann $ab\alpha - \alpha ab = 0$, d. h. (12) folgt; somit haben wir den Satz 4 bewiesen.

Literatur.

[1] L. Rédei, Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 169—195.

[2] J. Szendrei, On rings admitting only direct extensions, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953), 180—182.

[3] J. Szendrei, Eine neue Definition des Holomorphes der Gruppe und der Holomorphe des Ringes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 197—201.

(Eingegangen am 3. November, 1955.)