Auflösung eines homogenen linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen.

Dem Andenken von Professor Tibor Szele gewidmet.

Von E. EGERVÁRY in Budapest.

Betrachten wir eine homogene lineare diophantische Gleichung in n Variabeln

$$\mathbf{a}^*\mathbf{x} \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0. \tag{1}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß der größte gemeinsame Teiler $\Delta(\mathbf{a}^*)$ der ganzzahligen Komponenten von $\mathbf{a}^*$ gleich 1 ist. Dann kann man nach BETTI und GIUDICE die allgemeine Lösung von (1) in der Form darstellen [1] [2]

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\,\mathbf{a}$$

wo $\mathbf{Q}$ eine beliebige schiefsymmetrische Matrix n-ter Ordnung mit ganzzahligen Elementen bedeutet, welche also eine überzählige Anzahl $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ von willkürlichen Parametern enthält. In ihrer Arbeit „On equal sums of squares" haben BARNETT und MENDEL die folgende einfachere Lösungsformel angegeben [3]

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} - \mathbf{b}(\mathbf{a}^*\mathbf{t}), \quad \mathbf{a}^*\mathbf{b} = 1,^{1)} \tag{2}$$

welche nur n willkürliche Parameter enthält, nämlich die ganzzahlige Komponenten des Vektors $\mathbf{t}^* = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$.

In einer unlängst erschienenen Arbeit [4] habe ich für die Lösung eines allgemeinen homogenen linearen Gleichungssystems ein endliches Iterationsverfahren entwickelt, welches auf fortgesetzter Rangerniedrigung beruht, überflüssige (d. h. von den früheren linear abhängige) Gleichungen automatisch

1) Die BARNETT—MENDELSCHE Lösung läßt sich übrigens auch aus der BETTISCHEN Formel ableiten, wenn man $\mathbf{Q}$ als eine schiefsymmetrische Matrix 2-ten Ranges ansetzt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{t}\mathbf{b}^* - \mathbf{b}\mathbf{t}^*.$$

Hier bedeutet $\mathbf{b}$ einen der Gleichung $\mathbf{b}^*\mathbf{a} = 1$ genügenden festen Vektor und $\mathbf{t}$ ist der willkürliche Parametervektor.

ausscheidet und (in homogener Form) die nötige Anzahl von willkürlichen Parametern enthält.

In dieser Note will ich zeigen, daß die von mir geschaffene allgemeine Methode [4] auch zur Auflösung eines beliebigen homogenen diophantischen Gleichungssystems geeignet ist und im Falle einer einzigen diophantischen Gleichung gerade die BARNETT-MENDELsche Lösungsformel liefert.

Gegeben sei das homogene lineare diophantische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^*\mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{a}_2^*\mathbf{x} &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ \mathbf{a}_m^*\mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathbf{b}_1$ sei ein ganzzahliger Vektor, welcher der Gleichung $\mathbf{a}_1^*\mathbf{b}_1 = \Delta(\mathbf{a}_1^*)$ genügt, sonst aber beliebig ist. Man bilde — dem in [4] angegebenen Algoritmus entsprechend — den Projektor $n-1$-ten Ranges

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^*\mathbf{b}_1} = \mathbf{E} - \mathbf{b}_1\frac{\mathbf{a}_1^*}{\Delta(\mathbf{a}_1^*)}\,. \tag{4}$$

Die auf diese Weise gebildete Matrix (4) ist offenbar ganzzahlig und genügt der Gleichung

$$\mathbf{a}_1^*\mathbf{X}_1 = \mathbf{a}_1^* - (\mathbf{a}_1^*\mathbf{b}_1)\frac{\mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^*\mathbf{b}_1} = 0. \tag{5}$$

Die $n-1$ linear unabhängigen Spaltenvektoren von (4) bilden also ein vollständiges Lösungssystem der Gleichung $\mathbf{a}_1^*\mathbf{x} = 0$ und ihre allgemeine Lösung läßt sich mit Hilfe eines willkürlichen ganzzahligen Parametervektors $\mathbf{t}$ in folgender Form darstellen

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_1\mathbf{t} = \mathbf{t} - \mathbf{b}_1\frac{\mathbf{a}_1^*\mathbf{t}}{\Delta(\mathbf{a}_1^*)}\,,$$

welche — bei der Voraussetzung $\Delta(\mathbf{a}_1^*) = 1$ — mit der BARNETT—MENDELschen Formel vollkommen übereinstimmt.

Daß die so erhaltene Formel alle Lösungen von $\mathbf{a}_1^*\mathbf{x} = 0$ enthält, erkennt man am einfachsten dadurch, daß man den Parametervektor $\mathbf{t}$ mit irgend einem Lösungsvektor zusammenfallen läßt.

Um auch die zweite Gleichung $\mathbf{a}_2^*\mathbf{x} = 0$ zu befriedigen, iteriere ich die durch (4) angegebene Projektorbildung folgendermassen:

Ist $\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1 = 0$, so ist $\mathbf{a}_2^* = \text{const.}\,\mathbf{a}_1^*$ (weil $\mathbf{X}_1$ den Rang $n-1$ hat), die zweite Gleichung (3) ist also eine Folge der ersten und kann somit weggelassen werden.

Ist aber $\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1 \neq 0$, so gibt es einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{b}_2$, welche der Gleichung $\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1\mathbf{b}_2 = \Delta(\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1)$ genügt. Man bilde nun mit diesem Vektor in Analogie zu (4) den ganzzahligen Projektor $n-2$-ten Ranges

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \frac{\mathbf{X}_1\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1}{\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1\mathbf{b}_2} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1\mathbf{b}_2\frac{\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1}{\Delta(\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1)}\,. \tag{6}$$

Wegen (5) (6) genügt $\mathbf{X}_2$ der Gleichung $\mathbf{a}_1^*\mathbf{X}_2=0$. Aus

$$\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_2=\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1-\frac{\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1\mathbf{b}_2}{\Delta(\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1)}\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_1=0$$

sieht man aber, daß $\mathbf{X}_2$ auch der Gleichung $\mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_2=0$ genügt.

Die allgemeine Lösung der beiden simultanen Gleichungen $\mathbf{a}_1^*\mathbf{x}=0$, $\mathbf{a}_2^*\mathbf{x}=0$ läßt sich also folgendermaßen darstellen

$$\mathbf{x}=\mathbf{X}_2\mathbf{t},$$

wo $\mathbf{t}$ einen willkürlichen ganzzahligen Parametervektor bedeutet.

Das Verfahren kann man offenbar analog fortsetzen:

Ist bei dem k-ten Schritt $\mathbf{a}_{k+1}^*\mathbf{X}_k=0$, so ist $\mathbf{a}_{k+1}^*\mathbf{x}=0$ eine Folge der ersten k Gleichungen und wird dementsprechend weggelassen.

Ist aber $\mathbf{a}_{k+1}^*\mathbf{X}_k\neq 0$, so berechnet man einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{b}_{k+1}$, welcher der Gleichung

$$\mathbf{a}_{k+1}^*\mathbf{X}_k\mathbf{b}_{k+1}=\Delta(\mathbf{a}_{k+1}^*\mathbf{X}_k)$$

genügt, und mit dessen Hilfe den ganzzahligen Projektor

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{X}_k-\frac{\mathbf{X}_k\mathbf{b}_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}^*\mathbf{X}_k}{\mathbf{a}_{k+1}^*\mathbf{X}_k\mathbf{b}_{k+1}}\qquad (k=0,1,\ldots,r-1).$$

Hat das Gleichugssystem (3) den Rang r, so hat der auf diese Weise gebildete ganzzahlige Projektor $\mathbf{X}_r$. den Rang $n-r$, und befriedigt sämtliche Gleichungen

$$\mathbf{a}_1^*\mathbf{X}_r=0,\ \mathbf{a}_2^*\mathbf{X}_r=0,\ldots,\ \mathbf{a}_m^*\mathbf{X}_r=0.$$

Die $n-r$ linear unabhängigen Spaltenvektoren von $\mathbf{X}_r$ bilden also ein vollständiges Lösungssystem des diophantischen Systems (3) und die allgemeine Lösung läßt sich mit Hilfe eines ganzzahligen Parametervektors $\mathbf{t}$ folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{x}=\mathbf{X}_r\mathbf{t}.$$

Man erkennt durch eine ähnliche Überlegung, wie oben, daß durch diese Formel sämtliche ganzzahlige Lösungen des gegebenen Systems (3) erfaßt werden.

Literatur.

[1] J. Bertrand—G. E. Betti, Traité élémentaire d'algèbre, 1850.

[2] N. Giudice, Giornale di Mat. **36** (1898) 226.

[3] I. A. Barnett—C. W. Mendel, On equal sums of squares, *Amer, Math. Monthly* **49** (1942) 157—170.

[4] E. Egerváry, Rank-diminishing operations and the solution of linear equations by finite iteration, Erscheint demnächst in *Acta Sci. Math. Szeged.*

(Eingegangen am 21. November, 1955.)