Über die Frage der Einführung der komplexen Zahlen.

Dem Andenken des Gelehrten und Pädagogen Tibor Szele mit Dankbarkeit gewidmet.

Von ERVIN FRIED und TAMÁS VARGA in Budapest.

T. SZELE hat sich mit der Frage beschäftigt[1]), wie die bei der Einführung der komplexen Zahlen erfahrungsgemäß auftretenden didaktischen Schwierigkeiten überwunden werden können. Diese Schwierigkeiten sind im allgemeinen je nach der Einführungsweise zweierlei:

a) Bildet man formell die Zahlen $a+b\sqrt{-1}$ und rechnet mit ihnen nach den im Reellen geltenden Identitäten, so erfährt man leicht, wie die Operationen definiert werden müssen, um mit den genannten Identitäten im Einklang zu bleiben; die Schwierigkeit liegt in diesem Falle in der willkürlichen Einführung neuer Zahlen ohne Zuhilfenahme einer Veranschaulichung.

b) Veranschaulicht man hingegen die komplexen Zahlen schon von Anfang an durch die Gesamtheit der freien Vektoren der Ebene, so entstehen die Schwierigkeiten aus den willkürlich scheinenden Definitionen der Operationen, insbesondere der Multiplikation; zumindest bei den bisher angewandten Einführungsweisen.

Es war eben T. SZELE, der in der zitierten Arbeit gezeigt hat, daß die Willkür der Definitionen auch bei der unter *b*) angeführten Behandlungsart wesentlich herabgedrückt werden kann. Er hat nämlich mit Hilfe eines elementargeometrischen Gedankenganges folgendes bewiesen:

(1) Definiert man die Addition der komplexen Zahlen als die bekannte Addition von Vektoren („Parallelogrammgesetz");

(2) definiert man ferner die Multiplikation (von beliebiger Seite) einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl λ als die $|\lambda|$-fache Streckung des zugehörigen[2]) Vektors (im Falle $\lambda < 0$ mit Richtungswechsel);[3])

[1]) T. SZELE, On a vector-algebraic introduction of the complex numbers (ungarisch, mit einer russischen und englischen Zusammenfassung), *Mat. Lapok* 1 (1950), 349—362. Siehe auch: SZELE TIBOR, Bevezetés az algebrába (*Budapest*, 1953), 28—34.

[2]) Um einfacher sprechen zu können, machen wir im folgenden keinen Unterschied zwischen den komplexen Zahlen und den zugehörigen Vektoren.

[3]) Für rationales λ folgt (2) unmittelbar aus (1).

(3) setzt man für den Betrag des Produktes zweier beliebigen komplexen Zahlen u und v voraus, daß $|uv| = |u||v|$ gelte;

(4) setzt man weiter voraus, daß die Multiplikation komplexer Zahlen distributiv bezüglich der Addition (d. h. auch der Subtraktion) sein soll[4]);

(5) identifiziert man endlich die sich an eine ausgezeichnete Gerade der komplexen Zahlenebene anpassenden Vektoren mit den reellen Zahlen;

so kann die Multiplikation komplexer Zahlen nur wie üblich definiert werden.[5])

Hervorzuheben ist, daß die obigen Bedingungen einfach die gewohnten Eigenschaften der reellen Zahlen (sich an dieselbe Gerade anpassenden Vektoren) auf die komplexen Zahlen (Vektoren der Ebene) übertragen; was in den Operationen noch willkürlich bleibt, nämlich, daß für die von der positiven Richtung der reellen Achse gemessenen Winkel die Relation

$$\text{arc } uv = \text{arc } u + \text{arc } v \pmod{2\pi} \tag{6}$$

gilt, folgt schon notwendigerweise aus den Bedingungen (1)—(5).

Der Zweck dieser Arbeit ist zu beweisen, daß man aus den Bedingungen (1)—(5), unmittelbar zu der geometrischen Definition der Multiplikation[6]) (d. h. zu ihrem noch fehlenden Teil (6)) gelangen kann. Wir beweisen nämlich den folgenden

Satz. *Erfüllen zwei Operationen (Addition und Multiplikation) komplexer Zahlen die Bedingungen* (1)—(5), *so muß für das Argument des Produktes* (6) *gelten.*[7])

---

[4]) Die unter [1]) zitierte Arbeit setzt einfachkeitshalber voraus, daß alle Grundidentitäten ihre Gültigkeit bewahren, macht aber von der Kommutativität und Assoziativität keinen Gebrauch.

[5]) Von den genannten Bedingungen ausgehend gelangt T. Szele vorerst zu der Definition der Multiplikation in der Form $(a+bi)(a'+b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$ (nennen wir sie algebraische Form), indem er zeigt, daß das Quadrat der Einheitsvektoren, die senkrecht auf die reellen Einheitsvektoren stehen, nur -1 sein kann. Weitergehend kommt er, mit Hilfe eines von Richárd Rieger stammenden Gedankenganges zu der geometrischen Form der Multiplikation (Multiplizieren der Beträge, Addieren der Argumente). — Wie. L. Fuchs und T. Szele in einer gemeinsamen Arbeit bewiesen haben (L. Fuchs and T. Szele, Introduction of complex numbers as vectors of the plane, *Amer. Math. Monthly* **54** (1952), 628—631), (3) kann durch die Nullteilerfreiheit (3*) ersetzt werden; ein Vektorsystem, das den Bedingungen (1), (2), (3*), (4) und der Assoziativität der Multiplikation genüge leistet, wird, abgesehen von einer Affinität, mit dem Vektorsystem der komplexen Zahlenebene isomorf sein.

[6]) Daß diese Multiplikation assoziativ und kommutativ wird, ist eine unmittelbare Folge der Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

[7]) Dasselbe Ergebnis wurde früher, mit Hilfe von Funktionalgleichungen, von J. Aczél erhalten. S. den diesbezüglichen Hinweis in der Arbeit: J. Aczél, Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **3** (1952), 309—316. (Fußnote, S. 314.)

Für den Beweis sind folgende Bemerkungen von Wichtigkeit:

a) Nach (1) bilden zwei beliebige komplexe Zahlen (die aus demselben Punkte ausgehend gedacht werden können) und ihre Differenz

$$u, \qquad v, \qquad u-v,$$

ein Dreieck bezeichnen wir es mit (u, v).[8])

b) Multipliziert man jede dieser drei Zahlen von derselben Seite mit einer vierten Zahl z, so werden auch die Produkte

$$uz, \qquad vz, \qquad (u-v)z$$

ein Dreieck, bilden, da laut (4) $(u-v)z = uz - vz$ ist.

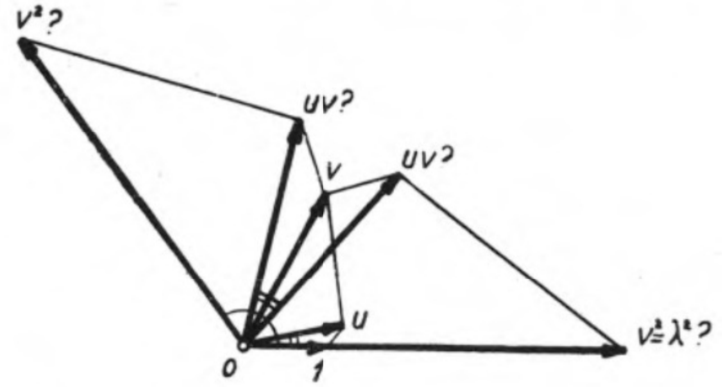
c) Dieses Dreieck ist nach (3) ähnlich dem vorigen Dreiecke, da doch jede Seite auf das $|z|$-fache gestreckt wurde. Über den Richtungssinn der Dreiecke wissen wir noch nichts.

d) Der gemeinsame Ausgangspunkt und die Endpunkte von drei komplexen Zahlen bilden ein Viereck (entartet oder nicht), das (wie jedes Viereck) durch die Seiten und die Diagonalen bestimmt ist. (Sogar überbestimmt, was aber für uns belanglos ist.) Multipliziert man also die drei Zahlen mit einer vierten, so bekommt man nach dem obigen ein zweites Viereck, das dem ersten ähnlich ist. Der Richtungssinn ist noch immer fraglich.

Um das Argument des Produktes uv zu bestimmen, betrachten wir die drei komplexen Zahlen:

$$1, \qquad u, \qquad v.$$

Diese bestimmen ein Viereck; bezeichnen wir es mit $(1, u, a)$.



Multipliziert man diese Zahlen von rechts mit v:

$$v, \qquad uv, \qquad v^2,$$

so erhält man ein Viereck, das dem Vierecke $(1, u, v)$ ähnlich ist. Diese Vierecke haben dabei eine Seite, nämlich v, gemeinsam. v kann als nicht reell

[8]) Diese und die folgenden Erwägungen gelten auch für entartete Dreiecke.

angenommen werden, da ja die Multiplikation mit einer reellen Zahl durch (2) schon definiert wurde.

Wir beweisen, daß der Richtungssinn der beiden Vierecke der gleiche ist. Im entgegengesetzten Falle würde sich nämlich der Vektor v, wenn wir ihn mit sich selbst multiplizieren, um seinen eigenen Winkel zurückdrehen, v^2 würde also eine reelle, sogar positive Zahl, λ^2 sein:

$$v^2 = \lambda^2.$$

Daraus folgt aber, (da laut (2) $\lambda v = v \lambda$ ist)

$$(v - \lambda)(v + \lambda) = 0,$$

und daraus nach (3)

$$v = \lambda \quad \text{oder} \quad v = -\lambda,$$

obwohl wir angenommen haben, daß v nicht reell ist. Der Richtungssinn des Vierecks $(1, u, v)$ — und damit auch des Dreiecks $(1, u)$ — bleibt also unverändert. Das heißt aber, daß das Argument von uv, für nicht reelle v, gleich der Summe der Argumente der Vektoren u und v (mod 2π) ist.

Wegen (2) und (5) gilt dasselbe für reelle v. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dieser geometrischen Definition der Multiplikation gelangt man leicht zu der algebraischen. Für einen der beiden auf die reellen Einheitsvektoren senkrecht stehenden Einheitsvektoren, i, gilt nämlich einerseits

$$|i^2| = 1 \cdot 1 = 1,$$

andererseits

$$\operatorname{arc} i^2 = 2 \operatorname{arc} i = \pi,$$

d. h.

$$i^2 = -1.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

(Eingegangen am 1. Dezember, 1955.)