О ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ.

Посвящена памяти Профессора Тибор Селе.

Л. Я. КУЛИКОВ в Москве.

В работе „Обобщенные примарные группы" (Труды Московского математического общества, **2** (1953), 85—167) автором была доказана следующая теорема (теорема 12. 12), обобщающая теорему Ульма:

Пусть A и G — нормальные обобщенные примарные[1]) группы (с одним и тем же кольцом операторов), каждая из которых имеет счетную систему образующих[2]) и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы циклических[2]) подгрупп. Для того, чтобы группы A и G были операторно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: (a) ульмовский тип $\tau(A)$ группы A равен ульмовскому типу $\tau(G)$ группы G; (b) соответствующие ульмовские факторы групп A и G изоморфны, т. е. $A^i/A^{i+1} \cong G^i/G^{i+1}$ при $i < \tau(A)$; (c) группы $A^{\tau(A)}$ и $G^{\tau(G)}$ операторно изоморфны.

Было установлено, что теорема неверна, если отказаться либо от условия о нормальности групп A и G, либо от условия о счетности систем, образующих групп A и G.

В работе был поставлен вопрос о том, будет ли верна приведенная выше теорема, если отказаться от условия о разложимости ульмовских факторов групп A и G в прямые суммы циклических[2]) подгрупп.

По предложению Тибора Селе ответ на этот вопрос отрицательный; однако его попытка доказать это застряла на доказательстве того, что обобшенная примарная группа H (с кольцом операторов Z_p), заданная

---

[1]) Абелева группа с кольцом операторов Z_p или K_p, где Z_p — кольцо целых p-адических чисел и K_p — кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с данным простым числом p, называется обобщенной примарной группой. Обобщенная примарная группа G называется нормальной, если для всякой ее допустимой подгруппы E, имеющей конечное число образующих,[2]) множество порядковых чисел, для которых $E \cap G^i \neq E \cap G^{i+1}$, является конечным.

[2]) Относительно кольца операторов группы.

образующими $b_1, b_2, \ldots$ и определяющими соотношениями $p^2(b_1=pb_2)= = p^4(b_2-pb_3)=\cdots=c\neq 0$, не разлагается в прямую сумму двух смешанных подгрупп.[3])

Целью настоящей заметки является доказательство неразложимости группы H в прямую сумму двух смешанных подгрупп.

Неразложимость группы H в прямую сумму двух смешанных подгрупп вытекает из следующего свойства этой группы: в любом прямом разложении группы H в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой. Ниже приводится доказательство этого интересного свойства группы H.

Рассмотрим Z_p-группу (или K_p-группу) G, заданную счетной системой образующих $a_1, a_2, \ldots$,

$$G=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

и определяющими соотношениями

(1) $$p^2(a_1-pa_2)=p^4(a_2-pa_3)=\cdots=p^{2k}(a_k-pa_{k+1})=\cdots=0.$$

Обозначим $d_1, d_2, \ldots$ элементы группы G, определяемые равенствами

(2) $$d_1=a_1-pa_2, d_2=a_2-pa_3, \ldots, d_k=a_k-pa_{k+1}, \ldots,$$

и через F — подруппу группы G, порожденную этими элементами,

$$F=\{d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots\}.$$

Докажем, что группа F есть максимальная периодическая подгруппа группы G. Действительно, из (1) и (2) следует равенства

(3) $$p^{2k}d_k=0,\ k=1,2,\ldots,$$

показывающие, что F есть p-группа. Кроме того, факторгруппа $\overline{G}=G/F$ является Z_p-группой со счетной системой образующих,

$$\overline{G}=\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \ldots\},\quad \text{где}\quad \bar{a}_k=a_k+F,$$

и с определяющими соотношениями

(4) $$\bar{a}_1=p\bar{a}_2, \bar{a}_2=p\bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_k=p\bar{a}_{k+1}, \ldots,$$

т. е. $\overline{G}$ изоморфна аддитивной группе поля p-адических чисел. Отсюда следует, что F есть максимальная периодическая подгруппа группы G и свободный ранг группы G равен единице.

Докажем, что во всяком разложении

(5) $$G=A+B$$

группы G в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой. Поскольку F есть группа с образующими $d_1, d_2, \ldots$ и определяющими соотношениями (3), то F разла-

---

[3]) Глубокоуважаемый Тибор Селе любезно сообщил мне об этом в письме, которое было получено мною в январе 1955 г.

гается в прямую сумму циклических подгрупп четных порядков

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k, \tag{6}$$

где $F_k = \{d_k\}$ — циклическая подгруппа порядка p^{2k}. Из равенства (2) следуют соотношения $a_k = d_k + pa_{k+1}$ и

$$p^{2k-1} a_k = p^{2k-1} d_k + p^{2k} a_{k+1}, \ k = 1, 2, .. \tag{7}$$

Далее, на основании (1) заключаем, что

$$p^k a_1 = p^{2k-1} a_k, \ k = 2, 3, \dots . \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), получим

$$p^k a_1 = p^{2k-1} d_k + p^{2k} a_{k+1}, \ k = 2, 3, \dots . \tag{9}$$

Обозначим через $h(x, G)$ высоту элемента x в группе G. На основании (6) заключаем, что $h(p^{2k-1} d_k, F) = 2k-1$. Отсюда, поскольку F — сервантная подгруппа группы G, следует, что

$$h(p^{2k-1} d_k, G) = 2k-1, \ k = 1, 2, \dots . \tag{10}$$

Далее, на основании (9) и (10) заключаем, что

$$h(p^k a_1, G) = 2k-1, \ k = 2, 3, \dots . \tag{11}$$

Поскольку свободный ранг группы G равен единице, то в разложении (5) одно из слагаемых является периодической группой; предположим, что A является периодической групой, а B — смешанная группа или группа без кручения. Так как прямое слагаемое A в разложении (5) есть периодическая группа и элемент a_1 имеет бесконечный порядок, то найдутся числа целые k такие, что

$$p^k a_1 \in B;$$

наименьшее из этих чисел обозначим через m, тогда

$$p^m a_1 \in B, \quad p^{m-1} a_1 \notin B. \tag{12}$$

Из (11) и (5) следует, что

$$h(p^{k+1} a_1, B) = 2k+1, \qquad k = 1, 2, 3, \dots,$$

следовательно, существует элемент $g_k \in B$, удовлетворяющий условиям:

$$pg_k = p^{k+1} a_1, \quad h(g_k, B) = 2k. \tag{13}$$

На основании (13) заключаем, чте элемент $s_k = g_k - p^k a_1$ имеет порядок p и высоту $2k-1$ в группе B,

$$ps_k = 0, \quad h(s_k, B) = 2k-1, \qquad k = m, m+1, \dots .$$

Таким образом, доказано, что в B существует бесконечная последовательность элементов,

$$s_m, s_{m+1}, \dots, s_n, \dots$$

каждый из которых имеет порядок p и высоту

$$h(s_k, B) = 2k-1.$$

Известно, что всякий элемент s_k можно включить в циклическое прямое слагаемое группы B порядка $2k$. Отсюда следует, что любое разложение максимальной периодической подгруппы $F(B)$ группы B в прямую сумму циклических подгрупп содержит циклические слагаемые любых чётных порядков, больших или равных $2m$. Но группа F является прямой суммой циклических подгрупп, порядки которых суть четные и различные числа; кроме того, ввиду (5)

$$F = A + F(B).$$

Отсюда следует, что в любом разложении группы A в прямую сумму циклических подгрупп порядки циклических слагаемых меньше $2m$; кроме того, всякое такое разложение не содержит прямых слагаемых одного и того же порядка. Следовательно. группа A является конечной.

Рассмотрим теперь группу H с кольцом операторов Z_p (или K_p), заданную счетной системой образующих $b_1, b_2, \ldots,$ $H = \{b_1, b_2, \ldots\}$, и определяющими соотношениями

$$p^2(b_1 - pb_2) = p^4(b_2 - pb_3) = \cdots = p^{2k}(l_k - pl_{k+1}) = \cdots = c \neq 0. \tag{14}$$

Докажем, что в любом прямом разложении группы H в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой.

Пусть

$$H = D + E \tag{15}$$

— какое-либо разложение H в прямую сумму двух слагаемых. Соотношения (14) показывают, что элемент c имеет бесконечную высоту в H, и что факторгруппа $\bar{H} = H/\{c\}$ изоморфна группе G,

$$\bar{H} \cong G; \tag{16}$$

отсюда, поскольку группа G не имеет элементов бесконечной высоты, следует, что все элементы бесконечной высоты группы H содержатся в группе $C = \{c\}$. Обозначим через D_1, подгруппу группы D, образованную элементами, имеющими бесконечную высоту в D, через E_1 — подгруппу, образованную элементами, имеющими бесконечную высоту в E. На основании (15) заключаем, что

$$C = D_1 + E_1. \tag{17}$$

Поскольку C — циклическая группа, одно из двух слагаемых в разложении (17) является нулевым; предположим, что $D_1 = \{0\}$. Тогда $E_1 = C$, и, следовательно,

$$H/C \cong D + E/C. \tag{18}$$

На основании (16 и (18) заключаем, что

$$G \cong D + E/C.$$

Выше было доказано, что во ввсяком разложении группы G в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых есть конечная группа. Следовательно, либо D либо E/C является конечной группой. Но элемент c имеет бесконечную высоту в E и, потому, факторгруппа E/C не может быть конечной группой. Следовательно, группа D является конечной.

Из доказанного предложения следует, что группа H неразложима в прямую сумму двух смешанных подгрупп.

(Поступила в редакцию 15-го декабря 1955 г.)