Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen.

Dem Andenken von Professor Dr. Tibor Szele gewidmet.

Von NOBORU ITÔ in Nagoya.

Genauere Untersuchungen über das Produkt von zwei endlichen zyklischen Gruppen stammen von WIELANDT [3] und sind in HUPPERT [1] fortgesetzt worden. Letzterer bewies insbesondere das folgende Resultat: Für ungerade Primzahlen p enthält ein Produkt von zwei zyklischen p-Gruppen einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe. In dieser Note werden einige Sätze über di Struktur der Kommutatorgruppe eines Produktes von zwei zyklischen 2-Gruppen bewiesen werden. Der Verfasser dankt Herrn BERTRAM HUPPERT in Tübingen für seine wertvollen Ratschläge.

Satz 1. *Sei $\mathfrak{G}$ das Produkt von zwei endlichen zyklischen Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und sei die Ordnung von $\mathfrak{A}$ nicht kleiner als die von $\mathfrak{B}$. Dann enthält $\mathfrak{A}$ einen eigentlichen Normalteiler von $\mathfrak{G}$.*

BEWEIS. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{A}$ keinen eigentlichen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthält und stellen $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der rechtsseitigen Nebenklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$. Wegen der Annahme über $\mathfrak{A}$ ist diese Darstelung treu. Nun setzen wir $\mathfrak{A}=\{A\}$ und $\mathfrak{B}=\{B\}$. Wir betrachten die Permutation $\begin{pmatrix}\mathfrak{A} & \mathfrak{A}B & \mathfrak{A}B^2 & \dots \\ \mathfrak{A}A & \mathfrak{A}BA & \mathfrak{A}B^2A & \dots\end{pmatrix}$ und den in ihr enthaltenen Zyklus $(\mathfrak{A}B, \mathfrak{A}BA, \mathfrak{A}BA^2, \dots)$ Da die Ordnung von $\mathfrak{A}$ nicht kleiner als die von $\mathfrak{B}$ ist, gibt es eine natürliche Zahl r derart, daß A^r von E verschieden ist und BA^rB^{-1} zu $\mathfrak{A}$ gehört. Da eine endliche zyklische Gruppe höchstens eine Untergruppe von gegebener Ordung enthält, erzeugt BA^rB^{-1} die Untergruppe $\{A^r\}$ von $\mathfrak{A}$. Daraus folgt, daß der Normalisator dieser Untergruppe das Element B umfaßt. Aber da er auch das Element A umfaßt, muß er mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmen. Das widerspricht unserer Annahme über $\mathfrak{A}$.

BEMERKUNG. Satz 1 ist eine Verschärfung der Hauptsatzes III von HUPPERT [1].

Von nun ab gebrauchen wir die folgende Bezeichnung: Sei $\mathfrak{X}=\{X\}$ eine zyklische 2-Gruppe von der Ordnung 2^e. Ist f eine positive ganze Zahl mit

$f \leqq e$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}_f = \{X_f\}$ die einzige Untergruppe der Ordnung 2^f von $\mathfrak{X}$. Insbesondere ist $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_e$.

Satz 2. *Sei $\mathfrak{G}$ das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ohne Durchschnitt: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$. Seien 2^a und 2^b die Ordnungen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Dabei sei $a \geqq b$. Für $c < b$ ist dann das Produkt $\mathfrak{A}_c\mathfrak{B}_c$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.*

BEWEIS. Es genügt zu beweisen: Unter der Annahme $b > 1$ ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir dürfen $a > b$ annehmen. Denn für $a = b$ sind nach Satz 1 $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Insbesondere sei also $a > 2$. Nach Satz 1 ist jedenfalls $\mathfrak{A}_2$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Wir betrachten den Zentralisator $K(\mathfrak{A}_2)$ von $\mathfrak{A}_2$ in $\mathfrak{G}$. Falls $K(\mathfrak{A}_2)$ nicht $\mathfrak{B}_1$ umfaßt, ist $K(\mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Daher ist

$$B_1 A B_1^{-1} = A^m \quad \text{und} \quad B_2 A B_2^{-1} = A^n$$

mit $m^2 \equiv 1 \bmod 2^a$ und $n^2 \equiv m \bmod 2^a$. Aus der zweiten Kongruenz folgt $m \equiv 1 \bmod 4$ und wegen $a > 2$ dann aus der ersten Kongruenz $m \equiv 1 \bmod 2^{a-1}$. Damit haben wir $A B_1 A^{-1} = B_1 A_1$, und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Weiterhin können wir daher $K(\mathfrak{A}_2) \supseteqq \mathfrak{B}_1$ annehmen. Dann ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$, und nach Induktionsannahme ist $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Daraus folgt leicht die Behauptung.

Satz 3. *Sei $\mathfrak{G}$ das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ohne Durchschnitt: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$. Die Ordnung von $\mathfrak{A}$ sei nicht kleiner als diejenige von $\mathfrak{B}$. Dann kann die Kommutatorgruppe $D(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ nicht abelsch vom Typ $(2^d, 2^d)$ sein, wenn d eine beliebige natürliche Zahl ist.*

BEWEIS. Wir führen eine Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$ und dem Parameter d.

Zunächst dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{A}_1 \subseteqq D(\mathfrak{G})$. Denn andernfalls betrachten wir die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}$ ($\mathfrak{A}_1$ ist nach Satz 1 invariant in $\mathfrak{G}$). Nach dem zweiten Isomorphiesatz ist dann die Kommutatorgruppe $D(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1) = D(\mathfrak{G})\mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ zu $D(\mathfrak{G})$ isomorph. Nun liefert uns die Induktionsannahme die Behauptung.

Weiter können wir annehmen, daß die Ordnung von $\mathfrak{B}$ größer als 2 ist. Denn andernfalls wäre $\mathfrak{A}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und dann $D(\mathfrak{G})$ wegen $D(\mathfrak{G}) \subseteqq \mathfrak{A}$ zyklisch.

Nun betrachten wir den Fall $d = 1$, setzen also voraus, daß $D(\mathfrak{G})$ abelsch vom Typ $(2, 2)$ ist. Dann ist $D(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}_1 \times \{A^a B^b\}$, wobei $A^a B^b$ ein geeignetes, von A_1 verschiedenes Element der Ordnung 2 von $\mathfrak{G}$ ist. Da $D(\mathfrak{G})/\mathfrak{A}_1$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$ enthalten ist, gilt $1 = (A^a B^b)^2 = A^{2a} B^{2b} \bmod \mathfrak{A}_1$, woraus $B^b = B_1$ folgt. Ist nun $AB_1 = B_1 A$, so ist A^a in A_1 enthalten. Ist aber

$AB_1 \neq B_1A$, so folgt aus Satz 2, da die Ordnung von $\mathfrak{B}$ größer als 2 ist, $AB_1 = B_1A_1A$ und dann $A^2B_1 = B_1A^2$. Da a offenbar gerade ist, gilt nun $1 = (A^aB^b)^2 = A^{2a}B^{2b}$, also $A^a = A_1$. In jedem Falle haben wir damit $D(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ erhalten.

Wir können nun annehmen, daß $AB = A_1B_1BA$. Daraus folgt $AB^2 = B^2A$. Da die Ordnung von $\mathfrak{B}$ größer als 2 ist, liegt dann $D(\mathfrak{G})$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$. Daraus folgt dann $D(\mathfrak{G}) = \{A_1B_1\}$, was ein Widerspruch gegen unsere Annahme ist.

Nun sei $d > 1$. Es genügt der Nachweis von $D(\mathfrak{G}) \supseteqq \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$. Denn dann folgt $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 \; \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E}$. Ferner ist offenbar $D(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = D(\mathfrak{G})/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ vom Typ $(2^{d-1}, 2^{d-1})$, entgegen unserer Induktionsannahme. Die Beziehung $D(\mathfrak{G}) \supseteqq \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ läßt sich aber wie im Falle $d = 1$ beweisen.

Satz 4. *Sei $\mathfrak{G}$ das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ohne Durchschnitt: $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$. Die Ordnung von $\mathfrak{A}$ sei nicht kleiner als die von $\mathfrak{B}$. Ist das Zentrum $Z(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ zyklisch, so auch die Kommutatorgruppe $D(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir führen eine Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$. Wir können annehmen, daß die Ordnung von $\mathfrak{B}$ größer als zwei ist. Denn andernfalls ist $\mathfrak{A}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und umfaßt $D(\mathfrak{G})$, und wir sind fertig. Nach Satz 2 ist dann $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir betrachten die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 \; \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E}$. Ist das Zentrum $Z(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ nicht zyklisch, so ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Daraus folgt die Invarianz von $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{G}$, entgegen unserer Annahme, daß $Z(\mathfrak{G})$ zyklisch ist. Also muß $Z(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)$ zyklisch sein. Nach unserer Induktionsannahme ist dann auch $D(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = D(\mathfrak{G})\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zyklisch. Nach dem zweiten Isomorphiesatz ist $D(\mathfrak{G})\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zu $D(\mathfrak{G})/D(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ isomorph. Da $D(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ im Zentrum von $D(\mathfrak{G})$ enthalten ist, ist $D(\mathfrak{G})$ abelsch. Unter Benutzung von Huppert [1] Satz 17 sehen wir nun, daß $D(\mathfrak{G})$ den Typ $(2^d, 2)$ (mit geeignetem d) hat sofern $D(\mathfrak{G})$ nicht zyklisch ist. Nach Satz 3 ist $d > 1$. Also hat $A^{-1}B^{-1}AB = [A, B]$ die Ordnung 2^d. Da $\{[A, B]^{2^{d-1}}\}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, haben wir $[A, B]^{2^{d-1}} = A_1$. Wie im Beweis von Satz 3 erhalten wir $D(\mathfrak{G}) \supseteqq \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$. Daher ist $D(\mathfrak{G}) = \{[A, B]\} \times \mathfrak{B}_1$. Ist $\{[A, B]\}$ invariant in $\mathfrak{G}$, so ist $D(\mathfrak{G}) = \{[A, B]\}$ und wird sind fertig. Sei daher $\{[A, B]\}$ nicht invariant in $\mathfrak{G}$.

Zunächst nehmen wir an, daß mit geeignetem a gilt $A^{-1}[A, B]A = [A, B]^aB_1$. Dann ist $B^{-1}[A, B]B = [AB]^b$ mit geeignetem b; denn[1]) andernfalls wäre $B^{-1}[A, B]B = [A, B]^bB_1$. Da $D(\mathfrak{G})$ abelsch ist, folgt dann $B^{-1}A^{-1}[A, B]AB =$

[1]) Der folgende Schluß geht auf eine briefliche Mitteilung von Herrn B. Huppert vom 5. 3. 1953 zurück.

$= A^{-1}B^{-1}[A,B]BA$ und daraus $B^{-1}A^{-1}[A,B]AB = B^{-1}[A,B]^{a}B_1B = [A,B]^{ab}B_1^{b+1} = A^{-1}B^{-1}[A,B]BA = A^{-1}[A,B]^{b}B_1A = [A,B]^{ab}B_1^{b+1}A_1$. Aus dieser Gleichung ergibt sich jedoch der Widerspruch $A_1 = 1$.

Nun betrachten wir die Untergruppe $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\{B^2\}$. Auch $Z(\mathfrak{M})$ ist zyklisch. Nach unserer Induktionsannahme ist daher die Kommutatorgruppe $D(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ zyklisch, woraus $D(\mathfrak{M}) = \{[A,B^2]\}$ folgt. Wegen $[A,B^2] = [A,B]B^{-1}[A,B]B = [A,B]^{b+1}$ ist $\{[A,B]\}$ in $\mathfrak{M}$ invariant. Das steht jedoch im Widerspruch zu der Gleichung $A^{-1}[A,B]A = [A,B]^{a}B_1$. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

Sei nun $A^{-1}[A,B]A = [A,B]^{a}$. Dann ist notwendig $B^{-1}[A,B]B = [A,B]^{b}B_1$. Da in diesen Fall $\{[A,B]\}$ offenbar in $\mathfrak{M}$ invariant ist, ist $D(\mathfrak{M}) = \{[A,B^2]\}$ in $\{[A,B]\}$ enthalten. Die Gleichung $[A,B^2] = [A,B]B^{-1}[A,B]B = [A,B]^{b+1}B_1$ liefert nun einem Widerspruch, da B_1 nicht in $\{[A,B]\}$ liegt. Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkung: Aus Satz 4 folgt leicht der folgende Satz: *Jedes Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen ist zweistufig metabelsch.* Dies ergänzt Hauptsatz III aus Huppert [1] und zeigt, daß jedes Produkt von zwei zyklischen Gruppen zweistufig metabelsch ist. Dieses Ergebnis ist ein sehr spezieller Fall von Itô [2].

Literatur.

[1] B. Huppert, Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen, *Math. Z.* **58** (1953) 243—264.

[2] N. Itô, Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen, *Math. Z.* **63** (1955), 400—401.

[3] H. Wieland, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Z.* **55** (1951), 1—7.

(Eingegangen am 5. Februar, 1956.)