Групповые алгебры счетных абелевых p-групп

С. Д. БЕРМАН

Введение

В настоящей статье изучаются групповые алгебры GK счетных периодических абелевых групп G над произвольным полем K. Основные результаты статьи дают необходимые и достаточные условия изоморфизма групповых алгебр GK и G_1K, где G и G_1-счетные абелевы p-группы (p-простое).

Оказывается, групповая алгебра GK счетной абелевой p-группы G над полем K характеристики p определяет группу G с точностью до изоморфизма (этот результат для конечных p-групп получен Дескинсом [1]). Если $\operatorname{char} K \neq p$, то в общем случае групповая алгебра GK определяется некоторыми свойствами подгруппы P элементов бесконечной высоты в G и факторгруппы G/P.

В работе найдены также необходимые и достаточные условия изоморфизма групповых алгебр GD и G_1D счетных периодических абелевых групп G и G_1 над полем вещественных чисел D и изучена мультипликативная группа алгебры GK, где $G-p$-группа, а K-поле характеристики p.

В заключительной части статьи дается описание всех неприводимых представлений произвольной (не обязательно счетной) периодической абелевой группы G над произвольным полем K характеристики нуль.

Результаты этой статьи доложены автором на Международном математическом конгрессе в Москве.

Формулировки некоторых теорем статьи опубликованы в [5], [6].

§ 1. Модулярные групповые алгебры счетных примарных абелевых групп

1. Дескинс [1] показал, что из изоморфизма групповых алгебр GK и G_1K конечных абелевых p-групп G и G_1 над полем K характеристики p вытекает изоморфизм групп G и G_1.

В этом параграфе изучаются групповые алгебры счетных абелевых p-групп над полем характеристики p.

Теорема 1. 1. *Групповые алгебры GK и G_1K двух счетных абелевых p-групп G и G_1 над полем K характеристики p изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны группы G и G_1.*

Доказательство теоремы 1. 1 основано на ряде вспомогательных предложений, не участвующих в доказательстве Дескинса.

Следующая лемма часто применяется при исследовании групповых алгебр:

Лемма 1. 1. Пусть G-произвольная группа, H-нормальный делитель группы G, T-любое поле, а V-двусторонний идеал алгебры GT, порожденный элементами $h-1$, где $h\in H$. Тогда

$$GT/V \cong \tilde{G}T, \quad \text{где} \quad \tilde{G} = G/H.$$

Доказательство. Если $x=\sum\lambda_i h_i\in HT\,(\lambda_i\in T,\, h_i\in H)$, то положим $n(x)=\sum\lambda_i$. Пусть $\{g_j\}$ система представителей смежных классов группы G по нормальному делителю H. Произвольный элемент $y\in GT$ можно записать в виде $y=\sum\limits_j y_j g_j$, где $y_j\in HT$. Тогда отображение $y\to\sum\limits_j n(y_j)(g_jH)$ определяет гомоморфизм алгебры GT на алгебру $\tilde{G}T$, ядром которого является идеал V.

Следствие. Пусть алгебра R над полем T обладает двумя групповыми базисами: $R=GT=G_1T$, Если H и H_1-такие нормальные делители соответственно G и G_1, что $HT=H_1T$, то $\tilde{G}T\cong\tilde{G}_1T$, где $\tilde{G}=G/H$, $G_1=\tilde{G}_1/H_1$.

В дальнейшем будут рассматриваться только абелевы p-группы и их групповые алгебры над полем K характеристики p. Для абелевых p-групп мы будем употреблять терминологию книги [2].

Пусть G-счетная примарная абелева группа. Условимся говорить, что элемент $y\in GK$ имеет бесконечную высоту, если для любого натурального числа n найдется такой элемент $x\in GK$, что $x^{p^n}=y$. Элемент $y\in GK$ будем называть элементом типа p^∞, если существует такая последовательность $x_1=y, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ элементов алгебры GK, что $x_i=x_{i+1}^p$.

Определим в GK следующие подалгебры:

$\bar{A}$-подалгебра, порожденная всеми элементами бесконечной высоты в GK;

$\bar{P}$-подалгебра, порожденная всеми элементами типа p^∞;

$\bar{C}^{(n)}$ $(n=0, 1, \ldots)$-подалгебра, порожденная всеми элементами x^{p^n}, где $x\in GK$;

$\bar{N}$-подалгебра, порожденная всеми элементами $x\in GK$, удовлетворяющими условию $x^p=0$.

Обозначим соответственно через A, P, $C^{(n)}$, N подгруппу элементов бесконечной высоты в G, максимальную полную подгруппу в G, подгруппу, порожденную p^n-степенями элементов группы, и нижний слой группы G.

Лемма 1. 2. $\bar{A}=AK$; $\bar{P}=PK$; $\bar{C}^{(n)}=C^{(n)}K$. Подалгебра $\bar{N}$ совпадает с идеалом V алгебры GK, порожденным элементами $h-1$, где h пробегает подгруппу N.

Доказательство. В алгебре GK имеет место упрощенная формула бинома Ньютона: $(a+b)^{p^n}=a^{p^n}+b^{p^n}$ Очевидно, $AK\subseteqq\bar{A}$. Пусть $x=\sum\limits_i\alpha_i g_i$ ($\{g_i\}$-различные элементы группы G; $\alpha_i\in K$; $\alpha_i\neq 0$)-элемент бесконечной высоты в GK. Тогда при любом натуральном n существует такой элемент $\sum\limits_j\alpha_j g_j\in GK$, что

$x=\sum\limits_i \alpha_i g_i=(\sum\limits_j \alpha_j g_j)^{p^n}=\sum\limits_j \alpha_j^{p^n} g_j^{p^n}$. Следовательно, для каждого элемента g_i найдется такой элемент $g_j \in G$, что $g_i=g_j^{p^n}$, т. е. g_i-элемент бесконечной высоты в G. Таким образом, $\bar{A} \subseteqq AK$ и $\bar{A}=AK$. Аналогично доказываются равенства $\bar{P}=PK$; $\bar{C}^{(n)}=C^{(n)}K$.

Пусть $g_1', \ldots, g_s', \ldots$-система представителей смежных классов группы G по нижнему слою N этой группы. Произвольный элемент $x \in GK$ можно записать в виде:

$x=y_{i_1}g'_{i_1}+\ldots+y_{i_r}g'_{i_r}$, *где* $y_{i_j} \in NK$. Тогда $x^p=y_{i_1}^p g_{i_1}'^p+\ldots+y_{i_r}^p g_{i_r}'^p=$ $=\lambda_1 g_{i_1}'^p+\ldots+\lambda_r g_{i_r}'^p$ $(\lambda_i \in K)$, ибо $y^p=\lambda \cdot 1$ $(\lambda \in K)$ для любого элемента $y \in NK$. Элементы $g_{i_1}'^p, \ldots, g_{i_r}'^p$ попарно различны, так как из равенства $g_{i_j}'^p=g_{i_t}'^p$ вытекает, что элементы g'_{i_j} и g'_{i_t} принадлежат одному смежному классу группы G по подгруппе N. Если $x^p=0$, то отсюда следует, что $\lambda_1=\ldots=\lambda_r=0$ т. е. $y_{i_1}'^p=0, \ldots, y_{i_r}^p=0$. Но тогда $y_{i_j}=\sum\limits_s \gamma_{js}h_s$ $(\gamma_{js} \in K, h_s \in N)$, где $\sum\limits_s \gamma_{js}=0$, и, следовательно, $x \in V$. Таким образом, $\bar{N} \subseteqq V$. Обратное включение $V \subseteqq \bar{N}$ очевидно. Лемма доказана.

Лемма 1. 3. Пусть G-абелева p-группа, а H-подгруппа группы G, разлагающаяся в прямое произведение t циклических групп порядка p, где t-натуральное число или счетная мощность. Пусть V-идеал алгебры GK, порожденный элементами $h-1$, где $h \in H$. Идеал V нильпотентен тогда и только тогда, когда t-конечное число, причем в этом случае, индекс нильпотентности идеала V равен $t(p-1)+1$.

Доказательство. Пусть $H=(a_1)\times\ldots\times(a_t)$ $(a_i^p=1;\ i=1, \ldots, t)$. Тогда произведение $(a_1-1)^{p-1}\ldots(a_t-1)^{p-1}\neq 0$. С другой стороны, произведение любых $t(p-1)+1$ элементов идеала V равно нулю.

В самом деле, элементы $(h-1)$ $(h \in H; h\neq 1)$ образуют базис идеала V_1 алгебры HK размерности p^t-1 над K. Другой базис идеала V_1 образует элементы $(a_1-1)^{\alpha_1}\ldots(a_t-1)^{\alpha_t}(0\leqq\alpha_i\leqq p-1; (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)\neq(0, \ldots, 0))$. Отсюда вытекает, что произведение любых $t(p-1)+1$ элементов идеала V_1 равно нулю $((a_i-1)^p=0)$. Произвольный элемент $x \in V$ записывается в виде $x=$ $=\sum\limits_{h \in H} \Lambda_h(h-1)$, где $\Lambda_h \in GK$. Следовательно, произведение любых $t(p-1)+1$ элементов идеала V также равно нулю. Если $H=(a_1)\times\ldots\times(a_m)\times\ldots$, то для любого натурального n произведение $(a_1-1)\ldots(a_n-1)\neq 0$, и, значит, идеал V не нильпотентен. Лемма доказана.

Следствие. Если в условиях леммы 1. 3 идеал V нильпотентен, то индекс нильпотентности s этого идеала однозначно определяет число t прямых множителей в разложении группы H.

Доказательство. В силу леммы 1. 3, $s=t(p-1)+1$, откуда $t=\dfrac{s-1}{p-1}$.

Лемма 1. 4. Пусть G и G_1-счетные полные примарные абелевы группы. Если $GK\cong G_1K$, то $G\cong G_1$.

Доказательство. Пусть $R=GK=G_1K$, где G и G_1-счетные полные абелевы p-группы. Пусть $N(N_1)$-нижний слой группы $G(G_1)$ и $\bar{N}=\{x \in R, x^p=0\}$. Согласно лемме 1. 2, идеал $\bar{N}$ порождается элементами $h-1(h_1-1)$, где $h \in N$

$(h_1 \in N_1)$. Применяя лемму 1. 3 и следствие из этой леммы, получим, что группы N и N_1 разлагаются в произведение одного и того числа циклических групп простого порядка, а это число равно числу групп типа p^∞ в прямых разложениях полных групп G и G_1. Лемма доказана.

Лемма 1. 5. Пусть G и G_1-счетные примарные абелевы группы, причем $G = P \times F$, $G_1 = P_1 \times F_1$, где P и P_1-полные, а F и F_1-редуцированные группы. Если $GK = G_1K$, то $P \cong P_1$ и $FK \cong F_1K$.

Доказательство. В силу леммы 1. 2, имеет место равенство $\overline{P} = PK = P_1K$, и, на основании леммы 1. 4, $P \cong P_1$. Ввиду следствия из леммы 1. 1, получим, что $\tilde{G}K \cong \tilde{G}_1K$, где $\tilde{G} = G/P$, $\tilde{G}_1 = G_1/P_1$, т. е. $FK \cong F_1K$.

Лемма 1. 6. Пусть F и F_1-счетные редуцированные примарные группы, а

$$F \supset F^{(1)} \supset \ldots, \tag{1.1}$$

$$F_1 \supset F_1^{(1)} \supset \ldots \tag{1.2}$$

— ряды Ульма для групп F и F_1. Если $FK \cong F_1K$, то ряды (1. 1) и (1. 2) имеют один и тот же порядковый тип, и, при этом, $\tilde{F}^{(i)}K \cong \tilde{F}_1^{(i)}K$, где $\tilde{F}^{(i)} = F^{(i)}/F^{(i+1)}$; $\tilde{F}_1^{(i)} = F_1^{(i)}/F_1^{(i+1)}$.

Доказательство. Очевидно, можно предполагать, что имеет место равенство $FK = F_1K$. Предположим, что для всех $i < w$ уже доказано равенство $F^{(i)}K = F_1^{(i)}K$. Если w-трансфинитное число первого рода, то имеет место равенство $F^{(w-1)}K = F_1^{(w-1)}K$. Так как $F^{(w)}$ и $F_1^{(w)}$-подгруппы элементов бесконечной высоты соответственно в группах $F^{(w-1)}$ и $F_1^{(w-1)}$, то тогда, на основании леммы 1. 2, $F^{(w)}K = F_1^{(w)}K$. Если w-трансфинитное число второго рода, то $F^{(w)}K = \bigcap_{i<w} F^{(i)}K$, $F_1^{(w)}K = \bigcap_{i<w} F_1^{(i)}K$, и снова $F^{(w)}K = F_1^{(w)}K$. Утверждение леммы следует теперь из следствия из леммы 1. 2.

Лемма 1. 7. Пусть G и G_1-счетные примарные абелевы группы без элементов бесконечной высоты. Если $GK \cong G_1K$, то $G \cong G_1$.

Доказательство. Пусть $GK = G_1K$. Тогда на основании леммы 1. 2 имеет место равенство

$$G^{p^n}K = G_1^{p^n}K = R.$$

Пусть $\overline{N} = \{x \in R,\ x^p = 0\}$. Образуем подалгебру $G^{p^{n+1}}K = G_1^{p^{n+1}}K = \tilde{R}$. Пусть $\tilde{N} = \{x \in \tilde{R},\ x^p = 0\}$, а V-идеал алгебры R, порожденный идеалом $\tilde{N}$ алгебры $\tilde{R}$. Очевидно, $V \subseteq \overline{N}$.

Пусть

$$G^{p^n} = (b_1) \times \ldots \times (b_r) \times \ldots \times (a_1) \times \ldots \times (a_s) \times \ldots, \tag{1.3}$$

где b_i-элементы порядка p, а каждый из элементов a_i имеет порядок p^{β_i}, где $\beta_i \geqq 2$. Тогда нижний слой N группы G^{p^n} представляется в виде произведения

$$N = (b_1) \times \ldots \times (b_r) \times \ldots \times (a_1^{p^{\beta_1 - 1}}) \times \ldots \times (a_s^{p^{\beta_s - 1}}) \times \ldots,$$

а нижний слой N' группы $G^{p^{n+1}}$ в виде произведения

$$N' = (a_1^{p^{\beta_1 - 1}}) \times \ldots \times (a_s^{p^{\beta_s - 1}}) \times \ldots$$

Ввиду леммы 1. 2, идеал $\tilde{N}$ алгебры R порождается всеми элементами $h-1\,(h \in N)$, а идеал V-всеми элементами $h'-1$ $(h' \in N')$. Элементы вида $(b_{i_1}-1)^{\alpha_1} \ldots (b_{i_r}-1)^{\alpha_r}$ $(0 < \alpha_j < p)$ принадлежат идеалу $\overline{N}$ и не принадлежат идеалу V. Если число подгрупп (b_i) в разложении (1. 3) бесконечно, то фактор-кольцо $\overline{N}/V$ не является нильпотентным. В самом деле, в этом случае для любого натурального m в $\overline{N}$ существует произведение

$$(b_1-1) \ldots (b_m-1) \overline{\in} V.$$

Пусть число множителей (b_i) в (1. 3) конечно и равно t.

Тогда фактор-кольцо $\overline{N}/V$-нильпотентное кольцо с показателем нильпотентности $t(p-1)+1$.

Действительно, $(b_1-1)^{p-1} \ldots (b_t-1)^{p-1} \overline{\in} V$, но всякое произведение из $t(p-1)+1$ множителей идеала $\overline{N}$ уже принадлежит идеалу V.

Для фиксированного простого p число $t(p-1)+1$ однозначно определяет число t. Таким образом, групповая алгебра $GK = G_1K$ вполне определяет число прямых множителей порядка p в прямом разложении групп G^{p^n} и $G_1^{p^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Следовательно, $G \cong G_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. 1. Счетная абелева p-группа G записывается в виде прямого произведения $G = P \times F$, где P-полная группа, а F-редуцированная группа. Группа F с точностью до изоморфизма определяется своими ульмовскими факторами. Поэтому теорема 1. 1 вытекает из сопоставления леммы 1. 5, 1. 6 и 1. 7.

2. Исследуем теперь мультипликативную группу $M(G)$ групповой алгебры GK примарной абелевой p-группы над полем K характеристики p. Группа $M(G)$ состоит из тех и только тех конечных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ $(\alpha_g \in K)$, для которых $\sum_g \alpha_g \neq 0$. Легко видеть, что имеет место прямое разложение $M(G) = K^* \times S(G)$, где K^*-мультипликативная группа поля K, а $S(G)$-силовская p-подгруппа группы $M(G)$:

$$S(G) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\}.$$

Лемма 1. 2′. Пусть P-максимальная полная подгруппа группы G, а G'-подгруппа элементов бесконечной высоты этой группы. Тогда $S(P)$ и $S(G')$-соответственно максимальная полная подгруппа и подгруппа элементов бесконечной высоты группы $S(G)$. Кроме того, $S^{p^n}(G) = S(G^{p^n})$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Ряды Ульма для групп G/P и $S(G)/S(P)$ имеют один и тот же порядковый тип. *Лемма доказывается* такими же рассуждениями, как и лемма 1. 2.

Теорема 1. 2. *Пусть $K = GF(q)$-конечное поле. Конечные абелевы p-группы G и G_1 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны группы $S(G)$ и $S(G_1)$.*

Доказательство. Пусть G-конечная абелева группа, а N-нижний слой группы G. Обозначим через $\tilde{N}$ нижний слой группы $S(G)$. Каждый элемент $x \in \tilde{N}$ можно записать в виде:

$$x = \sum_j b_j \sum_{a \in N} \alpha_{ja} a \qquad (\alpha_{ja} \in K),$$

где $\{b_j\}$ $(b_1 = 1)$-система представителей смежных классов группы G по подгруппе N. Имеем

$$x^p = \sum_j b_j^p \sum_{a \in N} \alpha_{ja}^p = 1,$$

откуда

$$\sum_{a \in N} \alpha_{1a} = 1; \qquad \sum_{a \in N} \alpha_{ja} = 0 \qquad (j \neq 1). \tag{1. 4}$$

Пусть p^t-порядок нижнего слоя группы G. Тогда каждое из уравнений системы (1. 4), имеет точно $q^{(p^t-1)}$ решений, а число r решений системы равно

$$r = q^{(p^t-1)l}, \tag{1. 5}$$

где $l = (G:N)$.

Из формулы (1. 5) вытекает, что в случае конечного поля K порядок нижнего слоя $\tilde{N}$ группы $S(G)$ однозначно определяет порядок нижнего слоя группы G, так как числа l и q являются степенями фиксированного простого числа p.

Далее, имеет место формула

$$S^{p^i}(G) = S(G^{p^i}). \tag{1. 6}$$

Из формул (1. 5) и (1. 6) теперь следует, что группа $S^{p^i}(G)$ однозначно определяет порядок нижнего слоя группы G^{p^i}. Таким образом, группа $S(G)$ однозначно определяет порядок нижнего слоя N_i группы G^{p^i} $(i = 0, 1, \dots)$. Так как порядки групп N_i $(i = 0, 1, \dots)$ определяют группу G с точностью до изоморфизма, то, тем самым, теорема 1. 2 доказана.

Пусть G-произвольная счетная примарная абелева группа, а G'-подгруппа элементов бесконечной высоты в G. Тогда, в силу леммы 1. 2, $S(G')$-подгруппа элементов бесконечной высоты в $S(G)$. Образуем фактор-группу $B = S(G)/S(G')$. Эта группа не содержит элементов бесконечной высоты и, следовательно, разлагается в прямое произведение циклических p-групп.

Обозначим через $\hat{N}_i$ нижний слой группы B^{p^i} $(i = 0, 1, \dots)$.

Лемма 1. 8. Если $G' \neq 1$, то фактор-группа $\hat{N}_i/\hat{N}_{i+1}$ для любого $i = 0, 1, \dots$ имеет бесконечный порядок.

Доказательство. Фактор-группа $D = G/G'$ разлагается в прямое произведение циклических групп. Так как $G' \neq 1$ то порядки прямых множителей в этом разложении не ограничены. Значит, группы D^{p^i} и $D^{p^{i+1}}$ также разлагаются в прямое произведение счетного числа циклических групп:

$$D^{p^i} = (b_1 G') \times \dots \times (b_r G') \times \dots;$$

$$D^{p^{i+1}} = (b_{j_1}^p G') \times \dots \times (b_{j_r}^p G') \times \dots.$$

Обозначим через N' нижний слой группы G'. Введем в рассмотрение следующие элементы группы B^{p^i}:

$$\eta_r = (1+b_{j_r} \sum_i \alpha_i g_i) S(G'),$$

где $\sum_i \alpha_i = 0$ и $g_i \in N'$. Очевидно, $\eta_r \in \hat{N}_i$

Покажем, что элементы η_r и η_m принадлежат различным смежным классам группы $\hat{N}_i$ по подгруппе $\hat{N}_{i+1}$. Действительно, произвольный элемент группы $S^{p^{i+1}}(G) = S(G^{p^{i+1}})$ записывается в виде:

$$\sum b_{j_{i_1}}^{p\alpha_{i_1}} \dots b_{j_{i_t}}^{p\alpha_{i_t}} A_{i_1,\dots,i_t},$$

где $A_{i_1,\dots,i_t} \in G'K$. Если η_r и η_m $(m \neq r)$ принадлежат одному смежному классу группы $\hat{N}_i$ по подгруппе $\hat{N}_{i+1}$, то

$$(1+b_{j_r} \sum_i \alpha_i g_i) = (1+b_{j_m} \sum_i \alpha'_i g_i)(\sum b_{j_{i_1}}^{p\alpha_{i_1}} \dots b_{j_{i_t}}^{p\alpha_{i_t}} A_{i_1,\dots,i_t}) C, \tag{1.7}$$

где

$$C \in S(G'), \quad A_{i_1,\dots,i_t} \in G'K \quad (\alpha_i, \alpha'_i \in K).$$

Равенство (1. 7) невозможно, ибо элемент в левой части содержит элементы группы G из смежного класса $b_{j_r} G'$, не встречающиеся в правой части.

Так как число элементов η_r бесконечно, то, тем самым, мы показали, что индекс $(\hat{N}_i : \hat{N}_{i+1})$ бесконечен. Лемма доказана.

Следствие. В условиях леммы 1. 8, фактор-группа $S(G)/S(G')$ разлагается в прямое произведение циклических групп таким образом, что каждая циклическая группа порядка p^i $(i = 1, 2, \dots)$ входит в это разложение бесконечное число раз.

В самом деле, число множителей порядка p^i в прямом разложении группы $S(G)/S(G')$ определяется индексом $(\hat{N}_{i-1} : \hat{N}_i)$ $(i = 1, 2, \dots)$.

Лемма 1. 9. Пусть группа G разлагается в прямое произведение счетного числа циклических групп:

$$G = (a_1) \times \dots \times (a_s) \times \dots, \tag{1.8}$$

а K-конечное поле. Тогда в прямом разложении группы $S(G)$ встречается бесконечно много циклических множителей порядка p.

Доказательство. Если разложение (1. 8) содержит только конечное число множителей порядка p^i, где $i \geqq 2$, то утверждение леммы очевидно.

В самом деле, если бы в этом случае в разложении группы $S(G)$ встречалось только конечное число множителей порядка p, то подгруппа $S^p(G)$ была бы бесконечной. С другой стороны, $S^p(G) = S(G^p)$, а подгруппа G^p-конечна, что ведет к противоречию.

Предположим, что в прямом разложении (1. 8) встречается бесконечно много множителей с порядком, бо̀льшим, чем p.

Положим $H = (b_1) \times (b_2) \times \dots$, где (b_i)-такие прямые множители в разложении (1. 8), что $b_i^p \neq 1$. Образуем элементы

$$1 + b_i \sum_j \alpha_j g_j, \tag{1.9}$$

где $\{g_j\}$-элементы нижнего слоя группы G и $\sum_j \alpha_j = 0$.

Так же, как и в предыдущей лемме, устаналиваем, что элементы (1. 9) принадлежат различным смежным классам нижнего слоя $\tilde{N}$ группы $S(G)$ по нижнему слою N' группы $S^p(G)=S(G^p)$. Значит, $(\tilde{N}\colon N')=\infty$, что и доказывает утверждение леммы.

Следствие. Если порядки прямих множителей в (1. 8) не ограничены, то в прямом разложении группы $S(G)$ каждая циклическая группа порядка p^i $(i=1, 2, \ldots)$ встречается бесконечное число раз. Если эти порядки ограничены и p^α-наибольший из порядков прямых множителей в (1. 8), $p^\beta(\beta\leqq\alpha)$-наибольший из порядков тех прямых множителей, которые входят в (1. 8) бесконечное число раз, а H-прямое произведение прямых множителей (1. 8), порядки которых не превосходят p^β, то в прямое разложение группы $S(G)$ циклические множители порядков $p, \ldots, p^\beta$ входят бесконечное число раз, а множители порядка p^γ, где $\beta<\gamma\leqq\alpha$ встречаются в этом разложении столько раз, сколько их участвует в разложении конечной группы $S(G/H)$.

Доказательство. Обозначим через N_i порядок нижнего слоя группы $S^{p^i}(G)=S(G^{p^i})$. Если порядки прямых множителей группы G не ограничены, то из леммы 1. 9 следует для каждого i $(i=0, 1, \ldots)$ индекс $(N_i\colon N_{i+1})$ бесконечен. Отсюда вытекает первое утверждение леммы.

Если порядки прямых множителей в (1. 8) ограничены и p^α-наибольший из этих порядков, то, в силу леммы 1. 9, индексы $(N_{i-1}\colon N_i)$ $(i=1, \ldots, \beta)$ не ограничны. Индексы $(N_\beta\colon N_{\beta+1}), \ldots, (N_{\alpha-1}\colon N_\alpha)$ совпадают с соответствующими индексами для группы $S(G/H)$. Отсюда, в силу теоремы 1. 2, следует второе утверждение леммы.

Лемма 1. 10. Пусть $G=(a)$-циклическая группа порядка p^n, а K-счетное поле характеристики p. Тогда в прямое разложение группы $S(G)$ входят только циклические группы порядков $p, \ldots, p^n$, причем каждая подгруппа порядка p^i $(1\leqq i\leqq n)$ встречается в этом разложении счетное число раз.

Доказательство. Рассмотрим группы $S^{p^i}(G)=S(G^{p^i})$ и $S^{p^{i+1}}(G)=S(G^{p^{i+1}})$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Тогда элементы вида

$$1+a^{p^i}(\alpha+\beta a^{p^{n-1}}) \qquad (\alpha+\beta = 0)$$

принадлежат нижнему слою N_i группы $S^{p^i}(G)$. Возьмем элементы

$$1+a^{p^i}(\alpha+\beta a^{p^{n-1}}) \quad \text{и} \quad 1+a^{p^i}(\alpha_1+\beta_1 a^{p^{n-1}}). \tag{1. 10}$$

Если эти элементы принадлежат одному смежному классу группы $S^{p^i}(G)$ по подгруппе $S^{p^{i+1}}(G)$, то

$$(1.11)\qquad 1+a^{p^i}(\alpha+\beta a^{p^{n-1}}) = [1+a^{p^i}(\alpha_1+\beta_1 a^{p^{n-1}})](\sum_j \gamma_j a^{jp^{i+1}}).$$

Если $\sum\limits_j \gamma_j a^{jp^{i+1}}\neq\gamma_1\cdot 1$, то равенство (1. 11) невозможно, а если $\sum\limits_j \gamma_j a^{jp^{i+1}}= =\gamma_1 1$, то $\gamma_1=1$ и $\alpha_1=\alpha$; $\beta_1=\beta$. Таким образом, для различных пар (α, β) и (α_1, β_1) $(\alpha+\beta = 0;\ \alpha_1+\beta_1 = 0)$ элементы (1. 11) принадлежат различным смежным классам группы $S^{p^i}(G)$ по подгруппе $S^{p^{i+1}}(G)$. Так как поле K содержит бесконечно много элементов, то отсюда следует, что индекс $(N_i\colon N_{i+1})$ бесконечен.

Значит, в прямом разложении группы $S(G)$ встречается бесконечно много циклических прямых множителей порядка p^{i+1} ($i = 0, \ldots, n-1$). Так как для любого элемента $x \in S(G)$ $x^{p^n} = 1$, то утверждение леммы доказано.

Лемма 1. 11. Пусть группа G разлагается в прямое произведение циклических p-групп:

$$G = G_1 \times \ldots \times G_s \times \ldots \quad (G_i = (a_i)),$$

а K-произвольное поле характеристики p. Тогда подруппа $S(G_i)$ является сервантной подгруппой группы $S(G)$.

Доказательство. Имеет место прямое разложение: $G = G_i \times H$, где $H = \prod_{j \neq i} \times G_j$.

Пусть теперь $x \in S(G_i)$ и $x = z^{p^n}$, где $z \in S(G)$. Элемент z можно записать в виде:

$$z = \sum_j A_j h_j, \quad \text{где} \quad A_j \in G_i K, \quad h_j \in H.$$

Тогда

$$x = z^{p^n} = \sum_j A_j^{p^n} h_j^{p^n}.$$

Значит,

$$x = A_{i_1}^{p^n} + \ldots + A_{i_r}^{p^n},$$

где $i_1, \ldots, i_r$- такие индексы, что $h_{i_1}^{p^n} = \ldots = h_{i_r}^{p^n} = 1$ и $h_t^{p^n} \neq 1$, если $t = i_j$ ($j = 1, \ldots, r$). Лемма доказана

Следствие. Пусть группа G разлагается в прямое произведение конечного или счетного числа циклических p-групп с ограниченными в совокупности порядками, а K-счетное поле. Если p^n-наибольший порядок циклических прямых множителей в разложении группы G, то в разложении группы $S(G)$ каждая из подгрупп порядка p^i ($i = 1, \ldots, n$) встречается счетное число раз и каждая из циклических подгрупп в этом разложении имеет порядок p^i, где $i \leqq n$.

Доказательство. Пусть $G = \Pi \times G_i$, где $G_i = (a_i)$.

В силу леммы 1. 11 $S(G_i)$-сервантная подгруппа группы $S(G)$. Так как порядки элементов группы $S(G_i)$ ограничены, то $S(G_i)$ выделяется прямым множителем в группе $S(G)$ (см. [2]). Для завершения доказательства теперь остается сослаться на лемму 1. 10.

Лемма 1. 12. Пусть G-счетная полная группа, а K-счетное или конечное поле характеристики p. Тогда группа $S = S(G)$ разлагается в произведение счетного числа групп типа p^∞.

Доказательство. В силу леммы 1. 2, $S(G)$-полная группа. Для доказательства леммы достаточно установить, что нижний слой N группы S-бесконечная группа.

Рассмотрим разложение группы G в прямое произведение групп типа $p^\infty: G = \prod_i \times G_i$.

Пусть (a_1)-нижний слой группы G_1, а $\bar{N} = \{x, x \in GK, x^p = 0\}$. Ввиду леммы 1. 2, $\bar{N}$-бесконечномерная подалгебра алгебры GK. Следовательно, элементы

a_1+n $(n \in N)$ образуют бесконечное подмножество группы N и N-бесконечная группа. Лемма доказана.

Лемма 1. 13. Пусть $G = P \times G_1$, где $P \neq 1$-полная группа, а G_1-прямое произведение циклических групп. Пусть K-счетное или конечное поле. Тогда $S=S(G)=S(P)\times S_1$, где S_1-редуцированная компонента группы S. Если порядки элементов группы G_1 не ограничены, то в прямом разложении группы S_1 каждая из циклических подгрупп порядков p^i $(i=1, 2, \ldots)$ встречается бесконечное число раз. Если показатель группы G_1 равен p^α, то группа S_1 разлагается в прямое произведение циклических групп порядков $p, \ldots, p^\alpha$, причем каждая из циклических подгрупп порядка p^i $(1 \leqq i \leqq \alpha)$ встречается в этом разложении с бесконечной кратностью.

Доказательство. Легко проверить, что порядки элементов групп G_1 и S_1 одновременно ограничены или неограничены, причем в последнем случае показатели групп G_1 и S_1 совпадают. Пусть $G_1^{p^i} \neq 1$ $(i \geqq 0)$ и пусть $a \in G_1^{p^i}$ и $a \bar{\in} G_1^{p^{i+1}}$. Положим $\bar{P}=\{x \in PK, x^p=0\}$. Ввиду леммы 1. 2, $\bar{P}$-бесконечномерная подалгебра алгебры GK. Рассмотрим элементы $(1+a_1x_1)\,S(P)$ и $(1+a_1x_2)\,S(P)$ $(x_1, x_2 \in \bar{P})$ группы $\tilde{S}=S(G)/S(P)$. Очевидно, эти элементы принадлежат нижнему слою $\tilde{N}_i$ группы $\tilde{S}^{p^i}$. Предположим, что они лежат в одном смежном классе группы $\tilde{S}^{p^i}$ по подгруппе $\tilde{S}^{p^{i+1}}$. Тогда $(1+ax_1)\,S(P) = (1+ax_2)yS(P)$, где $y \in G^{p^{i+1}}K$. Значит,

$$(1+ax_1) = (1+ax_2)yz \qquad (z \in S(P)). \tag{1.12}$$

Так как $x_i \in G^{p^{i+1}}K$ $(i=1, 2)$ и $yz \in G^{p^{i+1}}K$, то из (1. 12) следует, что $yz=1$ и $ax_1=ax_2$, откуда $x_1d=x_2$. Таким образом, при $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in \bar{P})$ элементы $(1+ax_1)\,S(P)$ и $(1+ax_2)\,S(P)$ принадлежат различным смежным классам группы $\tilde{N}_i$ по подгруппе $\tilde{N}_{i+1}$. Значит, $(\tilde{N}_i:\tilde{N}_{i+1}) = \infty$, откуда вытекает, что разложение фактор-группы $S(G)/S(P)$ в прямое произведение циклических групп содержит бесконечно много циклических групп порядка p^{i+1}. Лемма доказана.

Теорема 1. 3. *Пусть G-счетная абелева p-группа, P-максимальная полная подгруппа группы G, K-счетное или конечное поле характеристики p, S-силовская p-подгруппа мультипликативной группы алгебры GK, а P'-максимальная полная подгруппа группы S.*

Обозначим через A_n (A_∞) прямое произведение циклических p-групп порядков $p, \ldots, p^n$ (соответственно порядков $p, \ldots, p^n, \ldots$), где каждая из циклических групп порядка p^i $(1 \leqq i \leqq n)$ (соответственно каждая из циклических групп порядка p^i, где i-произвольное натуральное число) встречается счетное число раз. Если $P \neq 1$, то $P' \neq 1_\infty$. При $P=1$ группа $P'=1$. Ряды Ульма для редуцированных групп G/P и S/P' имеют один и тот же порядковый тип w. Все факторы ряда Ульма группы S/P', кроме, быть может, последнего фактора $\bar{S}^\gamma$ для случая, когда $w = \gamma+1$-трансфинтное число первого ряда, изоморфны группе A_∞. Пусть $w = \gamma+1$, а G^γ-последний фактор ряда Ульма группы G/P. Если порядки элементов группы G^γ не ограничены, то $\bar{S}^\gamma \cong A_\infty$. Предположим, что порядки элементов группы G^γ ограничены, причем p^α-показатель группы G^γ, а p^β-наибольший из порядков тех циклических прямых множителей, которые входят в разложение группы G^γ счетное число раз. Обозначим через H прямое произ-

ведение всех циклических прямых множителей группы G^γ, порядки которых не превышают p^β. Если поле K-счетное, то $\bar{S}^\gamma \cong A_\alpha$, а для конечного поля K группа $\bar{S}^\gamma$ представляется в виде прямого произведения $\bar{S}^\gamma = A_\beta \times \tilde{S}$, где группа $\tilde{S}$ изоморфна силовской p-подгруппе $S(G^\gamma/H)$ мультипликативной группы групповой алгебры FK конечной группы $F = G^\gamma/H$. (Если G^γ-конечная группа, то $H=1$).

Доказательство. Доказательство теоремы сразу получается путем сопоставления лемм 1. 8,1. 9, 1. 11 следствий из этих лемм и лемм 1. 12 и 1. 13.

Теорема 1. 4. *Пусть G и G_1-счетные абелевы p-группы; S и S_1-соответственно силовские p-подгруппы групповых алгебр GK и G_1K (K-счетное или конечное поле характеристики p); $P(P_1)$-максимальная полная подгруппа группы $G(G_1)$; $w(w_1)$-порядковый тип ряда Ульма группы G/P (G_1/P_1). Если $w = \gamma+1$ $(w_1 = \gamma_1+1)$-трансфинитное число первого рода, то обозначим через $G^\gamma(G_1^{\gamma_1})$ последний фактор ряда Ульма группы G/P (G_1/P_1). Группы S и S_1 изоморфны тогда и только тогда, когда одновременно выполяются следующие условия: 1. Если $P \neq 1$, то $P_1 \neq 1$; 2. $w = w_1$ 3. Если $w = w_1 = \gamma+1$ и K-счетное поле, то группы G^γ и G_1^γ имеют один и тот же показатель p^α или порядки элементов этих групп не ограничены. Если $w = w_1 = \gamma+1$ и K-конечное поле, то или порядки элементов групп G^γ и G_1^γ одновременно не ограничены, или совпадают показатели групп G^γ и G_1^γ и, при этом, изоморфны конечные группы G^γ/H и G_1^γ/H_1 (см. обозначения теоремы 1. 3).*

Доказательство. Теорема 1. 4 непосредственно вытекает из теоремы 1. 3 и теоремы 1. 2.

§ 2. Полупростые групповые алгебры счетных примарных абелевых групп

В этом параграфе находятся необходимые и достаточные условия изоморфизма групповых алгебр GK и G_1K двух счетных абелевых p-групп G и G_1 над полем K, характеристика которого не совпадает с простым p. Устанавливаются также необходимые и достаточные условия изоморфизма комплексных и вещественных групповых алгебр счетных периодических абелевых групп.

На всем протяжении параграфа рассматриваются только групповые алгебры над полем, характеристика которого не делит порядки элементов группы. В дальнейшем всегда будет предполагаться, что $\operatorname{char} K \neq p$.

Напомним некоторые факты о полупростых групповых алгебрах конечных абелевых p-групп. Пусть G-конечная абелева p-группа типа $[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]$ $(\alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_s)$, а ξ-первообразный корень степени p^{α_1} из 1. Образуем поле $K(\xi) = F$. Групповая алгебра GF разлагается в прямую сумму $(G:1) = t$ одномерных (над F) идеалов:

$$GF = I'_1 + \ldots + I'_t.$$

Каждый идеал I'_i порождается минимальним идемпотентом

$$e'_i = \frac{1}{(G:1)} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g,$$

где $\chi_i(g)$ $(i=1, \ldots, t)$-характер группы G над полем F.

Множество характеров $\chi_i(g)$ группы G распадается на непересекающиеся подмножества (K-классы).

(2. 1) $$\{\chi_{11}, \dots \chi_{1r_1}\} \dots, \{\chi_{s1}, \dots, \chi_{sr_s}\}$$

K-сопряженных между собой характеров (характеров, переходящих друг в друга под действием автоморфизмов $\xi \to \xi^{\mu}$ поля F над K). Подмножествам (2. 1) соответствуют подмножества K-сопряженных между собой минимальных идемпотентов алгебры GF:

$$\{e'_{11}, \dots, e'_{1r_1}\}, \dots, \{e'_{1}, \dots, e'_{sr_s}\}$$

Минимальные идемпотенты $e_1, \dots, e_s$ алгебры GK получаются в результате сложения K-сопряженных минимальных идемпотентов алгебры GF:

$$e_i = e'_{i1} + \dots + e'_{ir_i} \qquad (i = 1, \dots, s).$$

Обозначим через $K(\chi)$ поле, полученное в результате присоединения к полю K всех значений характера χ группы G. Если характер χ имеет ядро H и $(G:H) = m$ то $K(\chi) = K(\varepsilon)$, где ε-первообразный корень степени m из I.

Ввиду (2. 1) и (2. 1′), минимальный идеал $I_i = GKe_i$ алгебры GK изоморфен полю $K(\chi_{i1}) = \dots = K(\chi_{ir_i})$. Очевидно, $\big(K(\chi_{ij}):K\big) = r_i$ $(i=1, \dots, s)$.

Определение 2. 1. Введем обозначение: $w_G(e_i) = r_i$. Число r_i назовем весом минимального идемпотента e_i алгебры GK $(i=1, \dots, s)$.

Так как G-примарная группа, то вес $w_G(e_i)$ определяет поле I_i $(i=1, \dots, s)$ с точностью до изоморфизма.

В соответствии с разбиением (2. 1), множество элементов группы G распадается на K-классы $T_1, \dots, T_s$. По определению элементы $a, b \in G$ принадлежат одному K-классу тогда и только тогда, когда $b = a^{\mu}$, где μ-такое целое число, что отображение $\xi \to \xi^{\mu}$ является автоморфизмом поля $F = K(\xi)$ над K.

Порядки K-классов $T_1, \dots, T_s$ (после соответствующей их перенумерации) совпадают с числами $r_1, \dots, r_s$. Таким образом, имеет место теорема [3]:

Теорема 2. 1. *Групповые алгебры GK и G_1K двух конечных абелевых p-групп G и G_1 изоморфны тогда и только тогда, когда группы G и G_1 распадаются на одно и то же число K-классов и порядки соответствующих K-классов этих групп совпадают.*

Из приведенных выше фактов о групповых алгебрах конечных абелевых p-групп легко вытекают следующие леммы:

Лемма 2. 1. Пусть G-конечная абелева p-группа типа $[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ $(\alpha_1 \geqq \dots$ $\dots, \geqq \alpha_s)$, H циклическая группа порядка p^{α_1}, а ξ_i-первообразный корень степени p^i из 1 $(i=0, 1, \dots)$. Разложение алгебры GK в прямую сумму полей

(2.2) $$GK = I_1 + \dots + I_q$$

содержит те и только те поля, которые встречаются в разложении алгебры HK (без учета краткостей вхождения). Каждый идеал I_i изоморфен полю $K(\xi_j)$, где $0 \leqq j \leqq \alpha_1$. Наоборот, произвольное поле $K(\xi_j)$ $(0 \leqq j \leqq \alpha_1)$ встречается среди полей I_i в разложении (2. 2).

Лемма 2. 2. Пусть H-подгруппа конечной абелевой группы G. Тогда полная система представителей K-классов характеров группы G получится, если мы выберем такую систему $\{\psi_1, \ldots, \psi_r\}$ для группы H, продолжим каждый характер ψ_i до характеров $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ $(n=(G:H))$ группы G и среди характеров ψ_{ij} для каждого i выделим несопряженные (над K) характеры: $\psi_{ij_1}, \ldots, \psi_{ij_{q_i}}$.

Лемма 2. 3. Пусть ψ-характер подгруппы H конечной p-группы $G, \chi_1, \ldots, \chi_q$-все характеры группы G, индуцирующие на H характер ψ, а e-минимальный идемпотент алгебры HK, соответствующий характеру ψ. Если $(K(\chi_1):K)=\ldots$ $\ldots=(K(\chi_q):K)=m$, то вес $w_G(e_i)$ каждого минимального идемпотента e_i алгебры GK, возникающего в разложении идемпотента e, равен m.

Лемма 2. 4. Пусть конечная абелева p-группа G представляется в виде прямого произведения: $G = G_1 \times G_2$. Пусть e-минимальный идемпотент алгебры G_1K и $w_{G_1}(e)=n$. Пусть $1 = e_1' + \ldots + e_q'$-разложение единицы алгебры G_2K, в сумму минимальных идемпотентов этой алгебры, где $w_{G_2}(e_i)=m_i$ $(m_1 \geqq \ldots \geqq m_q)$, и пусть $e = e_1 + \ldots + e_t$-разложение идемпотента e в сумму минимальных идемпотентов алгебры GK. Если $n \geqq m_1$, то $w_G(e_i)=n\ (i=1, \ldots, t)$. Если $n<m_1$ то множество различных весов идемпотентов $e_1, \ldots, e_t$ алгебры GK совпадает с множеством $\{n, n+1, \ldots, m_1\}$.

Лемма 2. 5. Пусть K-произвольное поле (char $K \neq p$), ξ_i-первообразный корень степени p^i из 1 $(i=1, 2, \ldots)$ и $q=1$ $(q=2)$, если $p \neq 2$ $(p=2)$. Либо для всех натуральных $j \geqq q$

$$K(\xi_q) = K(\xi_j), \tag{2. 3}$$

либо существует такое натуральное число $f=f(K)$, что

$$K(\xi_q) = K(\xi_{q+1}) = \ldots = K(\xi_f) \subset K(\xi_{f+1}) \subset \ldots \tag{2. 4}$$

Лемма 2. 5 является известным фактом теории круговых полей (см., например [4]).

Следствие. Пусть для поля K и простого числа p выполняются условия (2. 4). Тогда при $i \geqq f$

$$(K(\xi_i):K(\xi_f)) = p^{i-f}.$$

Доказательство. Пусть $H=(\psi)$-группа Галуа поля $K(\xi_i)$ над подполем $K(\xi_f)$ и $\psi(\xi_i)=\xi_i^{\mu}$. Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $\xi_f=\xi_i^{p^{i-f}}$. Так как $\psi(\xi_i^{p^{i-f}})=\xi_i^{\mu p^{i-f}}$, то $\mu p^{i-f} \equiv p^{i-f} (\mathrm{mod}\, p^i)$, т. е. $\mu \equiv 1 \pmod{p^f}$. При этом, $\mu \not\equiv 1 \pmod{p^{f+1}}$, так как в противном случае автоморфизм ψ оставлял бы на месте элемент ξ_{f+1}. Отсюда, легко получить, что число μ принадлежит показателю p^{i-f} по $\mathrm{mod}\, p^i$, т. е. порядок группы H равен p^{i-f}. Утверждение доказано.

Лемма 2. 5'. Пусть G-циклическая группа порядка p^{α}, а K-произвольное поле (char $K \neq p$), удовлетворяющее условию (2. 4). Пусть $\alpha \geqq f$ (см. 2. 4), а G_1-подгруппа группы G порядка p^f. Тогда множество минимальных идемпотентов алгебры GK, соответствующих точным*) абсолютно неприводимым

---

*) Характер χ абелевой группы G называется точным, если ядро представления χ равно I.

характерам группы, совпадает с множеством минимальных идемпотентов алгебры G_1K, соответствующих точным характерам группы G_1.

Доказательство. Пусть $G=(a)$. Подгруппу G_1 можно записать в виде $G_1=(a^m)$, где $m=p^{\alpha-f}$. Пусть ξ-первообразный корень порядка p^α из единицы, а $\varepsilon=\xi^m$-первообразный корень из единицы степени p^f. Образуем минимальные идемпотенты e' и u' соответственно алгебр $GK(\xi)$ и $G_1K(\varepsilon)$:

$$e'=\frac{1}{(G:1)}\sum_{j=1}^{(G:1)}\xi^j a^j;\quad u'=\frac{1}{(G_1:1)}\sum_{j=1}^{(G_1:1)}\varepsilon^j a^{mj}.$$

Пусть e и u-минимальные идемпотенты алгебр GK и G_1K, соответствующие идемпотентам e' и u'. Ввиду равенства $u'e'=e'$, также $ue=e$, и, следовательно, $GKe\subseteqq GKu$. Идеал GKe изоморфен полю $K(\xi)$, а идеал G_1Ku изоморфен полю $K(\varepsilon)$. Пусть $\big(K(\varepsilon):K\big)=t$. Тогда размерность идеала GKu над полем K равна $t(G:G_1)=tp^{\alpha-f}$. С другой стороны, в силу следствия из леммы 2. 5, $\big(K(\xi):K\big)=tp^{\alpha-f}$. Таким образом, размерности идеалов GKe и GKu над полем K совпадают. Следовательно, $GKe=GKu$ и $e=u$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть G-циклическая p-группа, а H и G_1-такие подгруппы G, что $C_1\supseteqq H$ и $(G_1:H)=p^f$ (см. 2. 4). Тогда множество минимальных идемпотентов алгебры GK, соответствующих характерам группы G с ядром H, совпадает с множеством минимальных идемпотентов подалгебры G_1K, соответствующих характерам группы G_1 с тем же ядром H.

Определение 2. 2. Поле K (char $K\neq p$), для которого выполняются условия (2. 3) соответственно (2. 4) будем называть полем второго рода (соответственно полем первого рода) относительно простого числа p.

Лемма 2. 6. Каждое конечномерное представление Γ локально конечной группы G над полем K, характеристика которого не делит порядки элементов группы G, вполне приводимо. Представление Γ неприводимо тогда и только тогда, когда для некоторой конечной подгруппы H группы G индуцированное представление $\Gamma{\downarrow}(H)$-неприводимо.

Доказательство. Рассмотрим совокупность матриц $\{\Gamma(g)\}$ $(g\in G)$. Так как Γ-конечномерное представление группы G, то из множества $\{\Gamma(g)\}$ можно выделить максимальную линейную независимую подсистему $\Gamma(g_1),\dots,\Gamma(g_t)$. содержащую только конечное число матриц. Обозначим через H конечную подгруппу G, порожденную элементами $g_1,\dots,g_t$. Очевидно, представление Γ неприводимо тогда и только тогда, когда индуцированное представление $\Gamma{\downarrow}(H)$-неприводимо. Представление $\Gamma{\downarrow}(H)$-вполне приводимо, и поэтому представление Γ также вполне приводимо. (Лемма 2. 6 хорошо известна. Мы привели доказательство леммы для полноты изложения.)

Лемма 2. 7. Пусть G-счетная абелева p-группа без элементов бесконечной высоты, а K-поле (char $K\neq p$). Тогда для любого элемента $x\in GK$ найдется такое неприводимое конечномерное представление Γ алгебры GK, что $\Gamma(x)\neq 0$.

Доказательство. Группа G разлагается в прямое произведение циклических p-групп: $G=(a_1)\times\dots\times(a_s)\times\dots$. Пусть $G_s=(a_1)\times\dots\times(a_s)$. Очевидно,

$x \in G_s K$ для достаточно большого натурального s. Алгебра $G_s K$ обладает неприводимым представлением Γ, для которого $\Gamma(x) \neq 0$, причем это представление естественным образом продолжается до представления алгебры GK.

Лемма 2. 8. Пусть G-счетная абелева p-группа, а P-подгруппа элементов бесконечной высоты в G. Если K-поле первого рода относительно простого p (см. определение 2. 2), то подгруппа P совпадает с пересечением ядер всех конечномерных неприводимых представлений группы G над полем K.

Доказательство. Пусть Γ-неприводимое конечномерное представление группы G над полем K. Ввиду леммы 2. 6, Γ индуцирует неприводимое представление некоторой конечной подгруппы H группы G. Пусть $a \in P$ и $\Gamma(a) \neq E$ (E-единичная матрица). Представление Γ неприводимо на любой подгруппе $Q \supseteqq H$. Пусть Γ'-ограничение представления Γ на подгруппу $H' = \{H, a\}$, а χ'-абсолютно неприводимый характер группы H', соответствующий представлению Γ. Тогда $\chi'(a) = \varepsilon \neq 1$ $(\varepsilon^{p^r} = 1)$. Пусть g_n-такой элемент группы G, что $g_n^{p^n} = a$, где n-произвольное натуральное число, а $\chi^{(n)}$-характер группы $\{H, g_n\}$, индуцирующий на H' характер χ'. Тогда $\chi^n\ (g_n) = \xi_n$, где $\xi_n^{p^n} = \varepsilon$. Так как K-поле первого рода, то $(K(\xi_n) : K) \to \infty$, если $n \to \infty$. С другой стороны, степень m представления Γ совпадает с числом $(K(\chi^{(n)}) : K)$ для любого натурального n. Мы получили противоречие, так как $(K(\chi^n) : K) = (K(\xi_n) : K)$. Следовательно, $\Gamma(a) = E$ для любого элемента $a \in P$.

Пусть $g \bar{\in} P$. Так как фактор-группа G/P разлагается в прямое произведение циклических групп, то существует такое неприводимое конечномерное представление Γ группы G/P, что $\Gamma(gP) \neq E$. Представление Γ можно, очевидно, рассматривать как представление группы G над полем K, причем элемент g не содержится в ядре этого представления. Лемма доказана.

Лемма 2. 9. Пусть G-периодическая абелева группа, а K-поле характеристика которого не делит порядки элементов группы G.

Если идеал I алгебры GK порождается конечным числом элементов алгебры, то I порождается также идемпотентом e, и, следовательно, через I можно провести прямое разложение алгебры GK:

$$GK = I \dotplus I_1 \qquad (I_1 = GK(1-e)).$$

Доказательство. Пусть $I = (x_1, \ldots, x_s)$. Существует конечная подгруппа $H \subset G$, такая, что $x_i \in HK$ $(i = 1, \ldots, s)$. Идеал $HKx_1 + \ldots + HKx_s$ алгебры HK порождается идемпотентом e. Очевидно, $I = GKe$.

Лемма 2. 10. Пусть G-счетная абелева p-группа, P-подгруппа элементов бесконечной высоты в G. K-поле первого рода (относительно p), а V-идеал алгебры GK, порожденный всеми элементами $a-1$ $(a \in P)$. Идеал V совпадает с пересечением V' ядер всех неприводимых конечномерных представлений алгебры GK.

Доказательство. Ввиду леммы 2. 7, $(a-1) \in V'$ для любого элемента $a \in P$. На основании леммы I.I, имеет место изоморфизм $GK/V \cong G_1 K$, где $G_1 = G/P$. Так как группа G_1 разлагается в прямое произведение циклических групп, то по лемме 2. 7 для каждого класса $(x+V) \neq V$ алгебры GK/V найдется такое неприводимое конечномерное представление Γ этой алгебры, что $\Gamma(x+V) \neq 0$. Γ можно также рассматривать как представление алгебры GK, и элемент x не содержится в ядре Γ. Таким образом, $V=V'$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $G(G_1)$-счетная абелева p-группа, $P(P_1)$-подгруппа элементов бесконечной высоты в $G(G_1)$, $H=G/P$ $(H_1=G_1/P_1)$, K-поле первого рода относительно простого p, а $V(V_1)$-идеал алгебры GK (G_1K), порожденный всеми элементами $a-1$ (a_1-1), где $a\in P$ $(a_1\in P_1)$. Если существует изоморфизм $\theta\colon GK\to G_1K$, то 1. $HK\cong H_1K$; 2. Группы G и G_1 одновременно являются полными группами или группами без элементов бесконечной высоты. 3. Если P-конечная группа, то группа P_1 также конечна.

Доказательство. В силу леммы 2. 10 идеал $V(V_1)$ является пересечением ядер всех неприводимых конечномерных представлений алгебры $GK(G_1K)$ и поэтому $\theta(V)=V_1$. Следовательно, $GK/V\cong G_1K/V_1$. На основании леммы 2. 10 и леммы 1. 1, $GK/V\cong HK$, $G_1K/V_1\cong H_1K$, и, значит, $HK\cong H_1K$. Из леммы 2. 10 далее вытекает, что группа $G(G_1)$ тогда и только тогда является полной группой (группой без элементов бесконечной высоты), когда HK (H_1K)-одномерная алгебра (соответственно, когда $V=0$, $(V_1=0)$. Отсюда следует утверждение 2.

Предположим, что подгруппа P-конечна. Тогда, в силу леммы 2, 9 идеал V порождается идемпотентом e. Если P_1-бесконечная группа, то идеал V_1 не может порождаться идемпотентом e_1. В самом деле, идемпотент $e_1\in V_1$ принадлежит некоторой подалгебре $G_1'K$, где G_1'-конечная подгруппа группы G_1. Очевидно, существует такой элемент $a_1\in P_1$, что $a_1\bar{\in} G_1'$. Тогда $(a_1-1)\in V_1$ и $(a-1)e_1\neq(a_1-1)$. Полученное противоречие доказывает, что подгруппа P_1 конечна, откуда следует последнее утверждение леммы.

Лемма 2. 11. Пусть G и G_1-счетные абелевы p-группы без элементов бесконечной высоты, а K-поле (char $K\neq p$). Если K-поле первого рода и $GK\cong G_1K$ то порядки элементов групп G и G_1 одновременно ограничены или неограничены. Предположим, что G и G_1-группы с ограниченными порядками элементов, $p^{\alpha}(p^{\alpha_1})$-показатель группы $G(G_1)$, $p^{\beta}(p^{\beta_1})$-наибольший из порядков тех циклических множителей, которые счетное число раз встречаются в прямом разложении группы $G(G_1)$, $\xi(\xi_1)$-первообразный корень степени $p^{\alpha}(p^{\alpha_1})$ из единицы, а $\varepsilon(\varepsilon_1)$-первообразный корень из единицы степени $p^{\beta}(p^{\beta_1})$. Пусть $GK\cong G_1K$. Тогда $\big(K(\xi):K\big)=\big(K(\xi_1):K\big), \big(K(\varepsilon):K\big)=\big(K(\varepsilon_1):K\big)$.

Доказательство. Рассмотрим разложения групп G и G_1 в прямое произведение циклических групп:

$$G=(a_1)\times\ldots\times(a_s)\times\ldots, \tag{2. 8}$$

$$G_1=(b_1)\times\ldots\times(b_s)\times\ldots. \tag{2. 9}$$

Предположим, что порядки элементов группы G ограничены и p^{α}-показатель этой группы. Пусть $F=K(\xi)$, где K-поле первого рода, а ξ-первообразный корень степени p^{α} из единицы. Ввиду лемм 2. 6 и 2. 4, степени неприводимых представлений группы G не превышают числа $(F:K)$. Если бы порядки элементов группы G_1 были не ограничены, то подгруппа $G_1^{(s)}=(b_1)\times\ldots\times(b_s)$ группы G_1 для достаточно большого s обладала бы неприводимым K-представлением Γ, степень которого превышала бы $(F:K)$, причем Γ продолжалось бы до представления группы G_1. Значит, показатель группы G_1 также конечен.

Рассмотрим векторы (p^α, p^β) и $(p^{\alpha_1}, p^{\beta_1})$ для групп G и G_1 с ограниченными порядками элементов. Наибольшие степени неприводимых представлений групп G и G_1 над полем K равны соответственно $(K(\xi):K)$ и $(K(\xi_1):K)$. Так как $GK \cong G_1K$, то $(K(\xi):K) = (K(\xi_1):K)$. Предположим, что $(K(\varepsilon):K) < (K(\varepsilon_1):K)$ (см. обозначения в формулировке леммы).

Представим группу G в виде прямого произведения: $G = G'' \times G'$, где G'-прямое произведение тех циклических прямых множителей в (2. 8), порядки которых превышают p^β, а G''-группа с показателем p^β. Обозначим через I идеал алгебры GK, порожденный элементами $a-1$, где $a \in G'$. В силу леммы 1. 1, $GK/I \cong G''K$. Степени неприводимых представлений алгебры $G''K$ не превышают $(K(\varepsilon):K)$. В силу изоморфизма между алгебрами GK и G_1K алгебра G_1K должна обладать таким идеалом I_1, что I_1 порождается конечным числом элементов, а степени неприводимых представлений фактор-алгебры G_1K/I_1 не превышают $(K(\varepsilon):K)$.

На основании леммы 2. 9, имеет место прямое разложение: $G_1K = I_1 \dotplus I_2$, где идеал $I_1(I_2)$ порождается идемпотентом $e_1 \in G_1'K(e_2 \in G_1'K)$ G_1'-конечная подгруппа группы G_1). Не нарушая, общности рассуждений, можно считать, что

$$G_1' = (b_1) \times \dots \times (b_t).$$

Пусть e_2'-минимальный идемпотент алгебры $G_1'K$ принадлежащий идеалу $G_1'Ke_2$, а ψ-абсолютно неприводимый характер группы G_1', соответствующий идемпотенту e_2'. В силу условий леммы, существует подгруппа $(b_i) \subset G_1$ $(i > t)$ порядка p^{β_1}. Образуем подгруппу $G_1'' = G_1'' \times (b_i)$. Применяя лемму 2. 4, получим, что в разложении идемпотента e_2' в ортогональную сумму минимальных идемпотентов алгебры $G_1''K$ возникает идемпотент e_3 с весом $m \geqq (K(\varepsilon_1):K)$. Тогда неприводимое представление Γ группы G_1'' над полем K соответствующее идемпотенту e_3, имеет степень m. Продолжим Γ до представления алгебры G_1K. Так как идемпотенты e_3 и e_1 попарно ортогональны, то $\Gamma(e_1) = 0$. Следовательно, для любого элемента $x \in I_1$ $\Gamma(x) = 0$, и Γ можно рассматривать как неприводимое представление фактор-алгебраы G_1K/I_1. Мы получили противоречие, так как степени неприводимых представлений алгебры G_1K/I_1 не превышают $(K(\varepsilon):K)$, а степень Γ равна $m \geqq (K(\varepsilon_1):K) > (K(\varepsilon):K)$, Итак, $(K(\varepsilon):K) = (K(\varepsilon_1):K)$. Лемма доказана.

Лемма 2. 12. Пусть G-счетная абелева p-группа, а K-поле первого рода относительно простого p. Алгебра GK тогда и только тогда содержит минимальные идеалы, когда группа G представляется в виде прямого произведения: $G = P \times G_1$, где P-группа p^∞, а G_1-конечная группа.

Доказательство. Пусть алгебра GK содержит минимальный идеал I $(I \neq 0)$. Так как $I^2 \neq 0$, то идеал I порождается идемпотентом $e \in HK$, где H-конечная подгруппа группы G. Обозначим через N ядро неприводимого представления группы H над полем K, соответствующего идемпотенту e. Пусть G'-произвольная конечная подгруппа группы G, содержащая подгруппу H. Так как e-минимальный идемпотент алгебры $G'K$, G'/N-циклическая группа, ибо подгруппа N является ядром абсолютно неприводимого характера ψ

группы G', соответствующего идемпотенту e, а ψ осуществляет гомоморфизм группы G' на циклическую группу. Таким образом группа G содержит такую конечную подгруппу N, что для любой конечной подгруппы $G' \supseteq N$ фактор-группа G'/N-циклична. Отсюда сразу следует, что группа G записывается в виде прямого произведения группы p^∞ на конечную группу. Наоборот, если $G = P \times G_1$(P-группа p^∞, G_1-конечная группа), то алгебра GK содержит минимальные идеалы. В самом деле, пусть P_f-подгруппа группы P порядка p^f, где $f=f(K)$ (см. 2,4). В силу леммы 2. 5, минимальный идемпотент e алгебры P_fK, соответствующий точному характеру группы P_f, остается минимальным для любой цилической подгруппы $\tilde{P} \supseteq P_f$ ($\tilde{P} < P$). Пусть $x \neq 0$-произвольный элемент алгебры PK и $xe \neq 0$.Пусть $xe \in \tilde{P}K$, где $\tilde{P} \supseteq P_f$-конечная подгруппа группы P. Так как $\tilde{P}Ke$-минимальный идеал алгебры $\tilde{P}K$, то для некоторого элемента $y \in \tilde{P}K$ $yxe = e$. Следовательно, PKe-минимальный идеал алгебры PK. Отсюда легко получить, что идемпотент $\frac{1}{(G_1:1)}(\sum_{g \in G_1} g)e$ порождает минимальный идеал алгебры GK. Лемма доказана.

Леммы 2. 11, 2. 12 и следствие из леммы 2. 10 дают ряд необходимых условий изоморфизма групповых алгебр счетных примарных абелевых групп. Рассмотрим вспомогательные конструкции, которые будут применены для изучения достаточных условий изоморфизма.

Пусть H-конечная подгруппа p-группы G, e-минимальный идемпотент алгебры HK, χ-представитель множества K-сопряженных характеров группы H, соответствующих идемпотенту e, а $I = HKe$-минимальный идеал алгебры HK, порожденный идемпотентом e

$$\left(e = \frac{1}{(H:1)} \sum_{g \in H} x(g^{-1})g\right). \quad \text{Если} \quad x \in (\sum_{g \in H} \alpha_g g)e \in I \qquad (\alpha_g \in K),$$

то положим

$$\theta(x) = \sum_{g \in H} \alpha_g \chi(g). \tag{2.10}$$

Отображение θ определяет изоморфизм поля I на поле $K(\chi)$. Оно зависит от выбора характера χ в K-классе характеров группы H, соответствующем минимальному идемпотенту e алгебры HK.

В силу формулы (2. 10), произвольному элементу $\lambda \in K(\chi)$ соответствует однозначно определенный элемент $xe \in I$, для которого мы введем обозначение λe. Чтобы получить элемент $\lambda e \in I$ достаточно произвольным образом записать элемент $\lambda \in K(\chi)$ в виде $\lambda = \sum_{g \in H} \alpha_g \chi(g)$ $(\alpha_g \in K)$. Тогда

$$\lambda e = (\sum_{g \in H} \alpha_g g)e. \tag{2.10}$$

Пусть идемпотент $e \in GK$ представляется в виде суммы попарно ортогональных идемпотентов $e = e_1 + \ldots + e_s$, где e_i-минимальный идемпотент подалгебры H_iK ($H_i \subseteq G$-конечная группа; $i = 1, \ldots, s$), а $\chi_1, \ldots, \chi_s$-произвольным образом выбранные представители K-классов характеров соответственно подгрупп $H_1, \ldots, H_s$, соответствующие идемпотентам $e_1, \ldots, e_s$. Если $\lambda = \bigcap_{i=1}^{s} K(\chi_i)$, то условимся употреблять запись

$$(2.11)\qquad \lambda e_1 + \ldots + \lambda e_s = \lambda \circ e.$$

Лемма 2. 13. Пусть e-минимальный идемпотент алгебры HK (H-конечная подгруппа группы G), а χ-соответствующий e абсолютно неприводимый характер. Предположим, что идемпотент e разлагается в сумму попарно ортогональных идемпотентов $e = e_1 + \ldots + e_s$, где e_i-минимальный идемпотент алгебры H_iK ($H_i \supseteqq H$; $i = 1, \ldots, s$).

Пусть абсолютно неприводимые характеры $\chi_1, \ldots, \chi_s$ конечных групп $H_1, \ldots, H_s$, соответствующие идемпотентам $e_1, \ldots, e_s$, выбраны таким образом, что каждый из них индуцирует на подгруппе H характер χ. Если $\lambda \in K(\chi)$, то

$$(2.12)\qquad \lambda e = \lambda_1 + \ldots + \lambda e_s.$$

(Элементы λe, λe_i определяются в соответствии с формулой (2. 10))

Доказательство. Пусть $\lambda = \sum_{g \in H} \alpha_g \chi(g)$ ($\alpha_g \in K$). Тогда, в силу (2. 10),

$$\lambda e = (\sum_{g \in H} \alpha_g g) e = (\sum_{g \in H} \alpha_g g) e_1 + \ldots + (\sum_{g \in H} \alpha_g g) e_s =$$
$$= (\sum_{g \in H} \alpha_g \chi_1(g)) e_1 + \ldots + (\sum_{g \in H} \chi_s(g)) e_s = \lambda e_1 + \ldots + \lambda e_s.$$

Лемма доказана.

Определение 2. 3. Пусть G-счетная абелева p-группа и

$$(3.13)\qquad G_1 \subset G_2 \subset \ldots$$

такая возрастающая последовательность конечных подгрупп группы G, что $\bigcup_i G_i = G$. Образуем алгебру GK ($\mathrm{char}\, K \neq p$). Назовем деревом идемпотентов алгебры GK, соответствующим последовательности (2. 13), совокупность идемпотентов $\{e^{i_1, \ldots, i_m}_{r_1, \ldots, r_m}\}$ (m пробегает натуральный ряд) алгебры GK, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Идемпотент $e^{i_1, \ldots, i_m}_{r_1, \ldots, r_m} = e_u$ однозначно определяется вектором $u = (i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)$ с натуральными компонентами. При фиксированном m множество векторов $M_m = \{(i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)\}$-конечно.

2. $\sum_{u \in M_m} e_u = 1$. Если $u, v \in M_m$ и $u \neq v$, то $e_u \cdot e_v = 0$ ($m = 1, 2, \ldots$).

3. Каждый идемпотент e_u $(u = (i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m) \in M_m; m = 1, 2, \ldots)$ представляется в виде суммы попарно ортогональных идемпотентов: $e_u = e_u^{(1)} + \ldots + e_u^{(j)}$ (индекс j зависит от вектора $u \in M_m$), где e_u^i-минимальный идемпотент веса r_m некоторой подгруппы $F_u^i \supseteqq G_m$ ($i = 1, \ldots j$). Если $m = 1$, то $e_u \in G_1K$, а каждая подгруппа $F_u^i (u \in M_1)$ совпадает с подгруппой G_1.

4. Пусть $u = (\bar{i}_1. \ldots, \bar{i}_m, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m) \in M_m$ фиксированный вектор, а $M_{m+1}^{(u)}$ — — подмножество множества M_{m+1}, состоящее из всех векторов $v \in M_{m+1}$ вида

$v=(\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_m, i_{m+1}, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m, r_{m+1})$ (векторы $v \in M_{m+1}^{(u)}$ могут отличатся друг то друга только $(m+1)$-ой и $2(m+1)$-ой компонентами). Тогда $e_v = \sum_{v \in M_{m+1}^{(u)}} e_v$.

5. Пусть $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$-фиксированная последовательность, элементами которой являются минимальные идемпотенты подалгебр G_jK $(j=1, 2, \ldots)$, где сначала расположены все минимальные идемпотенты алгебры G_1K, затем все минимальные идемпотенты алгебры G_2K и т. д. Тогда идемпотент $e^{(i)}$ представляется в виде симмы идемпотентов e_u, где $u \in M_i$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Определение 2. 4. Пусть

$$D = \{e_{r_1,\ldots,r_m}^{i_1,\ldots,i_m}\} \quad \text{и} \quad D' = \{e_{r'_1,\ldots,r'_m}^{i'_1,\ldots,i'_m}\} \qquad —$$

деревья идемпотентов соответственно для алгебр GK и HK (деревья строятся по отношению к фиксированным возрастающим последовательностям конечных подгрупп в группах G и H). Будем говорить, что эти деревья изоморфны, если для каждого натурального m совпадают множества векторов

$$M_m = \{(i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)\} \quad \text{и} \quad M'_m = \{(i'_1, \ldots, i'_m, r'_1, \ldots, r'_m)\}.$$

Следующая лемма будет играть важную роль для исследования достаточных условий изоморфизма групповых алгебр счетных примарных абелевых групп.

Лемма 2. 14. Пусть G' и H'-счетные абелевы p-группы. Если в алгебрах $G'K$ и $H'K$ (char $K \neq p$) можно построить изоморфные деревья идемпотентов, то эти алгебры изоморфны.

Доказательство. Пусть

$$D = \{e_{r_1,\ldots,r_m}^{i_1,\ldots,i_m}\} \quad \text{и} \quad \tilde{D} = \{\tilde{e}_{r_1,\ldots,r_m}^{i_1,\ldots,i_m}\} \qquad —$$

изоморфные деревья идемпотентов для алгебр $G'K$ и $H'K$, соответствующие возрастающим последовательностям подгрупп

$$G'_1 \subset \ldots \subset G'_s \subset \ldots, \quad H'_1 \subset \ldots \subset H'_s \subset \ldots \quad (\bigcup_i G'_i = G'; \bigcup_i H'_i = H').$$

Для каждого натурального m эти деревья определяют одно и то же множество $M_m = \{(i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)\}$.

Положим $G=G', H'$ и соответственно $G_i = G'_i, H'_i$ $(i=1, 2, \ldots)$. Выделим из последовательности

$$G_1 \subset \ldots \subset G_s \subset \ldots$$

подпоследовательность

$$G_{m_1} \subset G_{m_3} \subset \ldots \subset G_{m_{2s+1}} \subset \ldots \tag{2. 14}$$

Подпоследовательность (2. 14) строится индуктивно. На первом шаге индукции полагаем $G_{m_1} = G_1$. Если уже построена подгруппа Gm_{2s+1} $(s \geqq 0)$, то в силу свойств 5 и 4 дерева идемпотентов (см. определение 2. 3) существует такой индекс m_{2s+2}, один и тот же при $G=G', H'$, что каждый минимальный идемпотент $e \in Gm_{2s+1}K$ представляется в виде суммы

$$e = \sum e_u, \quad \text{где} \quad u \in Mm_{2s+2}. \tag{2. 15}$$

Из свойства 2 дерева следует, что в правой части (2. 15) встретятся все идемпотенты e_u при $u\in M_{m_{2s+2}}$, если элемент e в левой части пробегает все минимальные идемпотенты алгебры $G_{m_{2s+2}}K$. Запишем разложение каждого из идемпотентов e_u $(u\in M_{m_{2s+2}})$ в соответствии со свойством 3 дерева:

$$e_u=\sum_i e_u^i, \tag{2. 16}$$

где e_u^i-минимальный идемпотент группы $F_u^i\supseteqq G_{m_{2s+2}}$ (Если $u=(i_1,\dots,i_{m_{2s+2}}, r_1,\dots,r_{m_{2s+2}})$, то вес минимального идемпотента e_u^i группы F_u^i равен r_m). Теперь выбираем такой индекс m_{2s+3}, что при $G=G', H'$ $G_{m_{2s+3}}\supset F_u^i$, для всех подгрупп F_u^i, соответствующих формуле (2. 16). На следующем шаге индукции строится подгруппа $G_{m_{2s+3}}$.

Каждому минимальному идемпотенту e_u^i группы F_u^i $(u\in M_{m_{2s}}; s=1,2,\dots)$ соответствует K-класс характеров X_u^i группы F_u^i. Произведем теперь специальный выбор представителей K-классов характеров групп $G_{m_{2s+1}}$ $(s=0,1,\dots)$ и K-классов X_u^i $(u\in M_{m_{2s}};\ s=1,2,\dots)$. На первом шаге индукции произвольным образом отметим систему представителей всех K-классов характеров группы G_{m_1}. Сделаем индуктивное предположение. Предположим, что уже выбрана система представителей $\psi_1,\dots,\psi_r$ K-классов характеров группы $G_{m_{2s-1}}$ $(s\geqq 1)$. Если характер ψ_j соответствует минимальному идемпотенту e алгебры $G_{m_{2s-1}}K$, то, в силу (2. 15) и (2. 26),

$$e=\sum_{u,i} e_u^i \qquad (u\in M_{m_{2s}}) \tag{2. 17}$$

Теперь, в каждом из K-классов X_u^i, соответствующих идемпотентам e_u^i в правой части (2. 17), выбираем такие характеры $\chi_1,\dots,\chi_l$, которые на подгруппе $G_{m_{2s-1}}$ индуцируют характер ψ_i.

Так как $F_u^i\subset \dot G_{m_{2s+1}}$ $(u\in M_{m_{2s}})$, то каждый характер χ_j $(j=1,\dots,l)$ допускает продолжение до характеров группы $G_{m_{2s+1}}$. Пусть $\psi_{i1},\dots,\psi_{in_i}$-все характеры группы $G_{m_{2s+1}}$, продолжающие характер χ_i. Тогда характеры ψ_{ij} и $\psi_{i_1j_1}$ группы $G_{m_{2s+1}}$ при $i\neq i_1$ не могут быть K-сопряжены.

В самом деле, обозначим соответственно через e_{ij} и $e_{i_1j_1}$ минимальные идемпотенты алгебры $G_{m_{2s+1}}K$, соответствующие характерам ψ_{ij} и $\psi_{i_1j_1}$. Если последние K-сопряжены то $e_{ij}=e_{i_1j_1}$. Пусть $e_{u_1}^{t_1}\in F_{u_2}^{t_1}K$ и $e_{u_2}^{t_2}\in F_{u_2}^{t_2}K$ $(u_1, u_2\in M_{m_{2s}})$-идемпотенты, соответствующие характерам χ_i и χ_{i_1}. Тогда $e_{u_1}^{t_1}e_{ij}=e_{ij}$; $e_{u_2}^{t_2}e_{i_1j_1}=e_{i_1j_1}$ и $e_{u_1}^{t_1}e_{u_2}^{t_2}=0$ что противоречит равенству $e_{ij}=e_{i_1j_1}$. Выберем из каждого множества $\psi_{i1},\dots,\psi_{in_i}$ максимальную систему характеров $\psi_{iq_1},\dots,\psi_{iq_f}$, попарно несопряженных над полем K. Тогда характеры $\{\psi_{iq_j}\}$ образуют полную систему представителей K-классов характеров группы $G_{m_{2s+1}}$. Действительно, при сложении минимальных идемпотентов алгебры $G_{m_{2s+1}}K$, соответствующих характерам $\psi_{iq_1},\dots,\psi_{iq_f}$, возникает минимальный идемпотент e_u^t, соответствующий характеру χ_i. Кроме того, идемпотенты e_u^t попарно ортогональны и в сумме дают единицу алгебры GK.

Мы показали, как выбрать представителей K-классов характеров X_u^i $(u\in M_{m_{2s}})$ и представителей K-классов характеров группы $G_{m_{2s+1}}$, если известна система представителей K-классов характеров группы $G_{m_{2s-1}}$ $(s=1,2,\dots)$.

Занумеруем представителей K-классов характеров X_u^i (для всевозможных векторов $u \in M_{m_{2s}}$ $(s=1, 2\ldots)$ и индексов i):

$$\chi_1, \ldots, \chi_r, \ldots . \tag{2.18}$$

В процессе индуктивного построения мы получили также для каждой подгруппы $G_{m_{2s+1}}$ систему представителей T_s K-классов характеров этой группы. Расположим характеры из множества $\bigcup_s T_s$ в последовательность

$$\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots . \tag{2.19}$$

Характеры χ_i и ψ_i удовлетворяют следующему условию: Если χ_i характер подгруппы F_u^j и $u \in M_{m_{2s}}$, то ограничение характера χ_i на любой подгруппе $G_{m_{2k+1}}(2k+1<2s)$ совпадает с одним из характеров ψ_j, а ограничение χ_i-на любой подгруппе F_u^j, где $u \in M_{m_{2k}}$ $(k<s)$ совпадает с одним из характеров χ_j. При этом, каждый характер χ_j группы F_u^l (каждый характер ψ_j группы F_u^l) является ограничением некоторого характера χ_i и некоторого характера ψ_i.

Построим теперь изоморфизм между алгебрами $G'K$ и $H'K$. Рассмотрим множество идемпотентов $\{e_u\}\{\tilde{e}_u\}$ алгебры $G'K$ $(H'K)$, где вектор $u=(i_1, \ldots, i_{m_{2s}}, r_1, \ldots, r_{m_{2s}})$ пробегает множество $M_{m_{2s}}$.

Пусть $e_u = e_u^{(1)}+\ldots+e_u^{(j)}$, где $e_u^{(i)}$-минимальный идемпотент веса $r_{m_{2s}}$ подгруппы F_u^i (см. 2.16). Обозначим через K_i поле $K(\xi)$(ξ-корень некоторой степени p^l из 1) размерности i над K. Так как для каждого идемпотента e_u^i зафиксирован содержащийся в последовательности (2.18) абсолютно неприводимый характер χ_j, то ввиду (2.11) можно образовать элемент

$$\lambda \circ e_u = \lambda e_u^{(1)} + \ldots + \lambda e_u^{(j)}, \tag{2.20}$$

где $\lambda \in K_{r_{m_{2s}}}(u=(i_1, \ldots, i_{m_{2s}}, r_1, \ldots, r_{m_{2s}}))$.

Пусть $A_s\,(\tilde{A}_s)$-подалгебра алгебры $G'K$ $(H'K)$, состоящая из всевозможных линейных комбинаций $\sum\limits_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ e_u (\sum\limits_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ \tilde{e}_u)$, где для каждого вектора $u=(i_1, \ldots, i_{m_{2s}}, r_1, \ldots, r_{m_{2s}})$ коэффициент λ_u принимает произвольные значения из поля $K_{r_{m_{2s}}}(s=1, 2, \ldots)$.

Соответствие

$$\theta_s: \sum_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ e_u \to \sum_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ \tilde{e}_u \qquad (\lambda_u \in K_{r_{m_{2s}}}),$$

очевидно, является изоморфизмом между алгебрами A_s и $\tilde{A}_s$. Покажем, что $A_s \subset A_{s+1}$ $(\tilde{A}_s \subset \tilde{A}_{s+1})$ и изоморфизм θ_{s+1} является продолжением изоморфизма θ_s. В самом деле, пусть

$$u = (i_1, \ldots, i_{m_{2s}}, r_1, \ldots, r_{m_{2s}}) \in M_{m_{2s}} \quad \text{и} \quad e_u = e_{u_1} + \ldots + e_{u_t}, \quad \text{где} \quad u_j = (\ldots, r^j_{m_{2(s+1)}}) \in M_{m_{2(s+1)}} \qquad (j = 1, \ldots, t).$$

Тогда, в силу (2.16), $e_{u_j} = \sum\limits_i e_{u_j}^i$ и $e_u = \sum\limits_{i,j} e_{u_j}^i$ где $e_{u_j}^i$-минимальный идемпотент группы $F_{u_j}^i$.

Так как $K_{r_{m_{2s}}} \subseteqq K_{r_{m_{2(s+1)}}}$ $(j=1, \ldots, t)$, то в силу (2. 20) для любого элемента $\lambda \in K_{r_{m_{2s}}}$

$$\lambda \circ e_u = \sum_{i,j} \lambda e^i_{u_j} = \lambda \circ e_{u_1} + \ldots + \lambda \circ e_{u_t}. \tag{2.21}$$

Аналогично, $\lambda \circ \tilde{e}_u = \lambda \circ \tilde{e}_{u_1} + \ldots + \lambda \circ \tilde{e}_{u_t}$. Следовательно, $A_s \subset A_{s+1}$ $\tilde{A}_s \subset \tilde{A}_{s+1}$. Из формулы (2. 21) также сразу вытекает, что изоморфизм θ_{s+1} продолжает изоморфизм θ_s. Покажем теперь, что $\bigcup_i A_i = G'K$. В самом деле, пусть x-произвольный элемент алгебры $G'K$. Тогда найдется такая подгруппа $G'_{m_{2s+1}}$, что $x \in G'_{m_{2s+1}}K$.

Пусть $1 = e_1 + \ldots + e_t$-разложение единицы алгебры $G'_{m_{2s+1}}K$ в сумму минимальных идемпотентов этой алгебры и пусть r_i-вес идемпотента e_i. Тогда $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_t e_t$, где $\lambda_i \in K_{r_i}$ $(i=1, \ldots, t)$.

По доказанному, каждый элемент $e \in \{e_1, \ldots, e_t\}$ можно представить в виде суммы

$$e = e_{u_1} + \ldots + e_{u_q},$$

где $u_j = (i_1^{(j)}, \ldots, i_{m_{2s+2}}^{(j)}, r_1^{(j)}, \ldots, r_{m_{2s+2}}^{(j)}) \in M_{m_{2s+2}}$. Каждый идемпотент e_{u_j} записывается в виде суммы $e_{u_j} = e_{u_j}^{(1)} + \ldots + e_{u_j}^{(f)}$, где $e_{u_j}^{(i)}$-минимальный идемпотент веса $r_{m_{2s+2}}^{(j)}$ некоторой подгруппы $F^i_{u_j} \supseteqq G'_{m_{2s+1}}$. Таким образом, $e = \sum_{i,j} e_{uj}^{(i)}$. Пусть идемпотент e имеет вес r. Так как $K_r \subseteqq K_{r_{(j)}\atop m_{2s+2}}$ для $j=1, \ldots, t$, то для произвольного элемента $\lambda \in K_r$ имеем $\lambda e = \sum_{i,j} \lambda e_{u_j} = \lambda \circ e_{u_1} + \ldots + \lambda \circ e_{u_t}$ и, следовательно, $\lambda e \in A_{m_{2s+2}}$, т. е. $x \in A_s$. Таким образом,

$$\bigcup_i A_i = G'K; \quad \bigcup_i \tilde{A}_i = H'K. \tag{2.22}$$

Изоморфизм алгебр GK и HK вытекает теперь из (2. 22) и того факта, что изоморфизм θ_{s+1} продолжает изоморфизм θ_s. Лемма доказана.

Лемма 2. 15. Пусть G и H-счетные абелевы p-группы, а K-произвольное поле (char $K \neq p$). Предположим, что в G и H удалось выделить такие возрастающие последовательности конечных подгрупп

$$1 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_s \subset \ldots \, (\bigcup_i G_i = G), \tag{2.23}$$

$$1 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s \subset \ldots \, (\bigcup_i H_i = H) \tag{2.24}$$

что:

1. В алгебрах G_iK (H_iK) $(i=1, 2, \ldots)$ определены минимальные идемпотенты первого и второго рода. Либо для $i \geqq 1$ все минимальные идемпотенты алгебр $G_iK(H_iK)$-первого рода, либо для каждого $i \geqq 2$ множество минимальных идемпотентов алгебры G_iK (H_iK) распадается на непересекающиеся (непустые) подмножества E_1 и E_2 соответственно идемпотентов первого и второго рода. Идемпотент

$$e = \frac{1}{(F_i:1)} \sum_{g \in F_i} g \qquad (F_i = G_i, H_i) \tag{2.25}$$

является идемпотентом первого рода алгебры $F_i K$ $(i=1, 2, \ldots)$. Если K-поле второго рода относительно простого p, то все минимальные идемпотенты алгебр $F_i K$-первого рода $(i=1, 2, \ldots)$.

2. Между множествами минимальных идемпотентов первого рода алгебр $G_1 K$ и $H_1 K$ существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее вес. Множества различных весов минимальных идемпотентов второго рода этих алгебр совпадают.

3. Пусть e-минимальный идемпотент первого рода алгебры $F_i K$ $(F_i = G_i, H_i)$ и

$$e = e_1 + \ldots + e_t \tag{2.26}$$

-разложение идемпотента e в сумму минимальных идемпотентов алгебры $F_{i+1} K$. Тогда среди идемпотентов e_j в (2. 26) обязательно встречаются идемпотенты первого рода. Множество $W = \{r_1, \ldots, r_f\}$ различных весов идемпотентов первого рода e_j в (2. 26) зависит только от номера i и веса идемпотента е в алгебре $F_i K$.

Каждый минимальный идемпотент второго рода алгебры $F_i K (F_i = G_i, H_i)$ разлагается в сумму минимальных идемпотентов второго рода алгебры $F_{i+1} K$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Имеет место одно из следующих условий:

3-а. Пусть $r_j \in W$. Если $r_j \neq 1$ или если $r_j = 1$, но поле K содержит первообразный корень степени p из 1, то в (2. 24) встречаются по крайней мере два идемпотента e_j первого рода веса r_j. Если поле K не содержит первообразного корня из 1 степени p, то каждая подалгебра $F_i K (F_i = G_i, H_i)$ содержит точно один минимальный идемпотент первого рода веса 1, который имеет вид (2. 25).

3-б. Пусть $e_1, \ldots, e_q$-все минимальные идемпотенты первого рода алгебры $F_1 K$ $(F_1 = G_1, H_1)$. Каждая подалгебра $F_i K$ содержит точно q минимальных идемпотентов первого рода $e'_1, \ldots, e'_q$, причем $e'_i e_i = e'_i$ $(i=1, \ldots, q)$ и вес идемпотента e'_j (в $F_i K$) совпадает с весом идемпотента e_j (в $F_1 K$).

4. Пусть ε_i-первообразный корень степени p^i из единицы $(i=1, 2, \ldots)$, а e-идемпотент второго рода алгебры $F_t K$. Произвольный подгруппе F_j $(j \geqq t)$ можно сопоставить натуральное m, такое, что если $r_i = (K(\varepsilon_i) : K) \geqq m$, то найдется такая конечная подгруппа $F \supseteqq F_j$, что идемпотент e представляется в виде суммы по крайней мере двух минимальных идемпотентов алгебры FK веса r_i.

5. Для всех подгрупп F_i выполняется точно одно из следующих условий:

5-а. Каждый минимальный идемпотент первого рода алгебры $F_i K$ разлагается в сумму минимальных идемпотентов первого рода алгебры $F_{i+1} K$.

5-б. В разложѐнии каждого минимального идемпотента e первого рода алгебры $F_i K$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $F_{i+1} K$ всегда встречаются минимальные идемпотенты второго рода $(F_i = G_i, H_i)$.

Тогда алгебры GK и HK изоморфны.

Доказательство. Покажем, что для алгебр GK и HK можно построить изоморфные деревья идемпотентов, соответствующие последовательностям подгрупп (2. 23) и (2. 24).

Будем рассматривать три случая:

I. Все минимальные идемпотенты групповых алгебр $G_i K$ и $H_i K$ $(i=1, 2, \ldots)$-первого рода.

II. III. Для каждого натурального $i \geqq 2$ подалгебры G_iK и H_iK содержат минимальные идемпотенты второго рода, но, при этом, для всех $i \geqq 2$ в случае II имеет место условие 5-а, а в случае III-условие 5-б.

Положим $F_i = G_i, H_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим последовательность идемпотентов

$$(2.27) \qquad e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}, \ldots$$

в которой сначала расположены все минимальные идемпотенты алгебры F_1K, затем все минимальные идемпотенты алгебры F_2K и т. д.

Пусть $W_1 = \{r_1, \ldots, r_q\}$ и $W_2 = \{r_{q+1}, \ldots, r_s\}$- соответственно множества различных весов минимальных идемпотентов первого и второго рода алгебры F_1K (Множество W_2 может быть пустым), и пусть в алгебре F_1K существует точно n_i минимальных идемпотентов первого рода веса r_i $(i = 1, \ldots, q)$. В силу условия 2 леммы, множества W_1 и W_2 и числа $n_1, \ldots, n_q$ будут одними и теми же для групп G_1 и H_1.

Пусть $e_{r_i}^{(1)}, \ldots, e_{r_i}^{(n_i)}$-все минимальные идемпотенты первого рода веса r_i $(i = 1, \ldots, q)$ алгебры F_1K, а $e_{r_j}^{(1)}$ $(j = q+1, \ldots, s)$-сумма всех минимальных идемпотентов второго рода веса r_j алгебры F_1K. Для построения изоморфных деревьев идемпотентов алгебр GK и HK на первом шаге индукции берем систему идемпотентов $e_{r_1}^{(1)}, \ldots, e_{r_1}^{(n_1)}, \ldots, e_{r_q}^{(1)}, \ldots, e_{r_q}^{(n_q)}, e_{r_{q+1}}^{(1)}, \ldots, e_{r_s}^{(1)}$ алгебры F_1K.

Предположим, что на m-ом шаге индукции уже построена система идемпотентов

$$(2.28) \qquad E_m = \{e_u = e_{r_1, \ldots, r_m}^{i_1, \ldots, i_m}\}$$

алгебры $\tilde{G}K$ $(\tilde{G} = G, H)$, где вектор $u = (i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)$ пробегает конечное множество M_m $(i_j, r_j$-натуральные числа), причем идемпотенты e_u $(u \in M_m)$ удовлетворяют следующим условиям:

А) $1 = \sum e_u$; $e_u \cdot e_{u_1} = 0$, если $u \neq u_1$; $e_u = \sum\limits_i e_u^{(i)}$, где $e_u^{(i)}$-минимальный идемпотент веса r_m некоторой подгруппы $F_u^i \supseteq F_m$ $\big(u = (i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)\big)$.

Б) Идемпотент $e^{(m)}$ из последовательности (2. 27) представляется в виде суммы некоторых идемпотентов e_u $(u \in M_m)$. В множестве $E_m = \{e_u\}$ $(u \in M_m)$ существует такое непустое подмножество E_m', что каждый идемпотент $e_u \in E_m'$ $(u = (i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m))$ равен сумме минимальных идемпотентов e_u^i первого рода алгебры F_mK одного и того же веса r_m, а сумма $\sum\limits_{e_u \in E_m'} e_u$ совпадает с суммой всех минимальных идемпотентов первого рода алгебры F_mK (см. А). Если дополнение $E_m'' = E_m \setminus E_m'$-непусто, то для каждого минимального идемпотента $e_u \in E_m''$ найдется такой минимальный идемпотент e второго рода алгебры F_mK, что $ee_u \neq 0$.

Покажем, как на $m+1$-шаге индукции построить систему идемпотентов $E_{m+1} = \{e_{r_1, \ldots, r_{m+1}}^{i_1, \ldots, i_{m+1}}\}$. Для этого произведем дальнейшее разложение идемпотентов $e_u \in E_m$.

Пусть $e_u = \sum\limits_i e_u^{(i)} \in E_m'$ ($e_u^{(i)}$-минимальный идемпотент веса r_m алгебры F_mK). Запишем разложение каждого идемпотента $e_u^{(i)}$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $F_{m+1}K$:

$$(2.29) \qquad e_u^{(i)} = e_1' + \ldots + e_t'.$$

В силу условий леммы 2. 15 множество $W=\{f_1, \ldots, f_q\}$ различных весов идемпотентов e'_j первого рода в (2. 29) определяется только индексом m и весом r_m идемпотента e^i_u. В случаях I и II все идемпотенты e'_j в (2. 29)-первого рода. В случае Ш среди этих идемпотентов обязательно встречаются идемпотенты второго рода.

Если $e_u=\sum_i e^{(i)}_u \in E''_m$, то в силу индуктивного предположения существует такой минимальный идемпотент e второго рода алгебры $F_m K$, что $ee_u \neq 0$. Отсюда и из условия 4 в формулировке леммы 2. 15 легко вытекает, что можно выбрать такой вес r_{m+1}, превосходящий веса всех идемпотентов e'_j в правой части (2. 29) при переменном $e^{(i)}_u$ $(e_u \in E'_m)$ и веса всех идемпотентов $e^{(i)}_u$ при $e_u \in E''_m$, что каждый минимальный идемпотент второго рода e'_j алгебры $F_{m+1}K$ в (2. 29) и каждый идемпотент $e^{(i)}_u$ при $e_u \in E''_m$ допускает разложение в сумму по крайней мере двух слагаемых

(2. 30) $$\tilde{e}_1+\tilde{e}_2+\ldots,$$

где $\tilde{e}_j$-минимальные идемпотенты одного и того же веса r_{m+1} соответственно подгрупп $F^{(j)} \supseteqq F_{m+1}$. Совершив разложения типа (2. 30), мы для каждого идемпотента e_u $(u \in M_m)$ получим разложение:

(2. 31) $$e_u = e^{(1)}_u+\ldots+e^{(j_u)}_u.$$

Разложение (2. 31), удовлетворяет следующим свойствам:

Если $e_u \in E'_m$, то в правой части (2. 31) встречаются минимальные идемпотенты первого рода алгебры $F_{m+1}K$. Множество различных весов этих идемпотентов $W=\{f_1, \ldots, f_q\}$ зависит только от пары (m, r_m) $\big(u=(i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)\big)$. Если идемпотент e_u пробегает множество E'_m, то идемпотентами $e^{(j)}_u$ первого рода исчерпываются все минимальные идемпотенты первого рода алгебры $F_{m+1}K$. Остальные идемпотенты $e^{(j)}_u$ в (2. 31) $(u \in M_m)$ являются минимальными идемпотентами веса r_{m+1} некоторых подгрупп $F^{(j)}_u \supseteqq F_{m+1}$; если $e_u \in E''_m$, то каждый идемпотент в (2. 31) является минимальным идемпотентом веса r_{m+1} некоторой подгруппы $F^{(j)}_u \supseteqq F_{m+1}$. Число r_{m+1}-константа, зависящая, в силу выбора, только от индекса m и превосходящая вес любого минимального идемпотента первого рода $e^{(j)}_u$ алгебры $F_{m+1}K$ в (2. 31).

Для каждого идемпотента e^j_u в (2. 31) веса r_{m+1} найдется такой минимальный идемпотент e второго рода алгебры $F_{m+1}K$, что $ee^j_u=e^j_u$.

Если e^j_u-идемпотент веса r_{m+1}, то в разложении (2. 31) встречается по крайней мере еще один идемпотент веса r_{m+1}.

Если e^j_u-минимальный идемпотент первого рода алгебры $F_{m+1}K$ веса n, то в (2. 31) также встречаются по крайней мере два минимальных идемпотента e^j_u первого рода веса n, за исключением случаев, когда выполняется условие 3-б в формулировке леммы или когда имеет место условие 3-а, но, при этом, $n=1$ и поле K не содержит первообразный корень степени p из единицы.

Отметим еще следующие свойства разложения (2. 31): $e^i_u \cdot e^{i_1}_{u_1}=0$, если $(u, i) \neq (u_1, i_1)$;

(2. 32) $$\sum_{u \in M_m} \sum_i e^i_u = 1.$$

Так как каждый из идемпотентов e^j_u в (2. 31) является минимальным идемпотентом некоторой подгруппы $F^j_u \supseteqq F_{m+1}$ то для минимального идемпотента $e^{(m+1)}$

алгебры F_iK $(i \leqq m+1)$ (см. 2. 27) и любого идемпотента e_u^j выполняется точно одно из равенств

$$(2.33) \qquad e_u^j \cdot e^{(m+1)} = e_u^j; \quad e_u^j \cdot e^{(m+1)} = 0.$$

Отсюда, в силу (2. 32), вытекает разложение:

$$(2.34) \qquad e^{(m+1)} = e_{u_1}^{i_1} + \ldots + e_{u_t}^{i_t},$$

где в правой части участвуют некоторые из идемпотентов e_u^j $(u \in M_m)$.

Мы осуществили вспомогательные конструкции для образования $m+1$-го этажа дерева идемпотентов.

Построение идемпотентов $e_{r_1, \ldots, r_{m+1}}^{i_1, \ldots, i_{m+1}}$ осуществляем следующим образом.

Пусть $W' = \{f_1, \ldots, f_q\}$-множество различных весов идемпотентов e_u^i в (2. 31), где $u = (i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)$, а $E^{(f)} = \{\tilde{e}_{j_1}, \ldots, \tilde{e}_{j_r}\}$ $(f \in W')$-множество всех идемпотентов веса f из этого разложения.

Если множество $\tilde{E}_f$ содержит более одного элемента, то полагаем

$$e_{r_1, \ldots, r_m, f}^{i_1, \ldots, i_m, 1} = \tilde{e}_{j_1}; \quad e_{r_1, \ldots, r_m, f}^{i_1, \ldots, i_m, 2} = \tilde{e}_{j_2} + \ldots + \tilde{e}_{j_r}.$$

Предположим теперь, что множество $\tilde{E}_f$ содержит точно один идемпотент $\tilde{e}_{j_1}$. Из предыдущих рассмотрений следует, что это возможно только тогда, когда $\tilde{e}_{j_1}$-идемпотент первого рода алгебры $F_{m+1}K$ и, при этом, либо выполняется условие 3-б, либо имеет место условие 3-а, но поле K не содержит первообразного корня степени p из единицы, а вес идемпотента $\tilde{e}_{j_1}$ равен 1.

В этом случае полагаем $e_{r_1, \ldots, r_m, f}^{i_1, \ldots, i_m, 1} = \tilde{e}_{j_1}$.

Таким образом, для каждого идемпотента e_u $(u \in M_m)$ мы получили ортогональное разложение:

$$e_u = \sum_{i_{m+1} r_{m+1}} e_{r_1, \ldots, r_{m+1}}^{i_1, \ldots, i_{m+1}}.$$

Из (2. 34) и (2. 33) вытекает, что идемпотент $e^{(m+1)}$ представляется в виде суммы некоторых идемпотентов $e_{r_1, \ldots, r_{m+1}}^{i_1, \ldots, i_{m+1}}$, ибо в силу ортогональности идемпотентов $e_{r_1, \ldots, r_{m+1}}^{i_1, \ldots, i_{m+1}}$ каждый идемпотент $e_{u_j}^j$ из (2. 33) входит в разложение только одного из этих идемпотентов.

Далее легко проверить, что для идемпотентов $e_{r_1, \ldots, r_{m+1}}^{i_1, \ldots, i_{m+1}}$ выполняются индуктивные свойства А) и В).

Из способа построения множества идемпотентов $D = \{e_{r_1, \ldots, r_m}^{i_1, \ldots, i_m}\}$ алгебры $\tilde{G}K$ $(m = 1, 2, \ldots)$ вытекает, что D—дерево идемпотентов (см. определение 2. 3).

Расматривая систему идемпотентов D при $\tilde{G} = G$ и $\tilde{G} = H$ мы получим для алгебр GK и HK изоморфные деревья идемпотентов (на m-ом шаге индукции для алгебр G_mK и H_mK возникают один и те же векторы $u = (i_1, \ldots, i_m, r_1, \ldots, r_m)$).

Отсюда в силу леммы 2. 14 вытекает изоморфизм алгебр GK и HK. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $p = 2$, K-поле второго рода относительно простого числа 2 (char $K \neq 2$) и $K \subset K(i)$ (i-первообразный корень 4 степени из единицы). Предположим, что для групповых алгебр GK и HK счетных 2-групп выполняются условия леммы 2. 15, но, при этом, для подалгебр G_jK (H_jK) (см. (2. 23),

(2. 24)) определены идемпотенты второго рода, так что имеют место условия 1, 2, 3, 5 леммы 2. 15, а условие 4 трансформируется следующим образом: Если e-идемпотент второго рода алгебры $G_t K(H_t K)$, то для любой подгруппы $G_j\ (H_j)\ (j \geqq t)$ найдется такая конечная подгруппа $F \supseteqq G_j\ (F \supseteqq H_j)$ группы $G(H)$, что идемпотент e разлагается в сумму по крайней мере двух идемпотентов веса 2 алгебры FK (каждый минимальный идемпотент групповой алгебры $G'K$ произвольной конечной 2-группы G' имеет вес 1 или 2.) Тогда сохраняются рассуждения леммы 2. 15 и $GK \cong HK$.

Замечание 2. Замечание 1 остается справедливым для произвольных периодических групп G и H и поля вещественных чисел K, так как минимальные идемпотенты вещественной групповой алгебры произвольной конечной группы имеют вес 1 или 2.

Теорема 2. 2. *Пусть K-поле первого рода относительно простого p. Отметим следующие типы счетных абелевых p-групп:*

1. *G-прямое произведение циклических групп с неограниченными в совокупности порядками элементов.*
2. *G-прямое произведение циклических групп с ограничеными в совокупности порядками.*
3. *G-группа p^∞.*
4. *G-полная группа, прямое разложение которой содержит по крайней мере две группы p^∞.*
5. *G-прямое произведение группы p^∞ на конечную группу.*
6. *G-прямое произведение полной группы типа 4. на конечную p-группу.*
7. *G-прямое произведение полной группы на бесконечную p-группу без элементов бесконечной высоты с ограниченными в совокупности порядками элементов.*
8. *G-редуцированная p-группа, а подгруппа P элементов бесконечной высоты в G-конечна и отлична от единицы.*
9. *Подгруппа P элементов бесконечной высоты в G бесконечна, а порядки элементов фактор-группы G/P неограничены в совокупности (каждая счетная p-группа принадлежит к одному из перечисленных 9 типов).*

Если группы G и G_1 принадлежат различным типам, то групповые алгебры GK и G_1K-неизморфны.

Если G и G_1-группы одного и того же типа $n=1, 3, 4, 8, 9$, то групповые алгебры GK и G_1K изоморфны.

Пусть G и G_1-группы типа 2; p^α (p^{α_1})-показатель группы G (G_1); $p^\beta(p^{\beta_1})$-наибольший из порядков тех циклических прямых множителей группы $G(G_1)$, которые содержатся в прямом разложении группы $G(G_1)$ счетное число раз. Обозначим через ξ и ξ_1-первообразные корни степеней p^α и p^{α_1} из единицы, а через ε и ε_1-первообразные корни из единицы соответственно степеней p^β и p^{β_1}. Групповые алгебры GK и G_1K изоморфны тогда и только тогда, когда $(K(\xi):K)=(K(\xi_1):K)$ и $(K(\varepsilon):K)=(K(\varepsilon_1):K)$.

Пусть G и G_1-одновременно группы типа 5 или типа 6: $G = P \times H$; $G_1 = P_1 \times H_1$ (P и P_1-группы p^∞ или полные группы типа 4, H и H_1-конечные группы). Алгебры GK и G_1K изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны алгебры HK и H_1K.

Пусть, наконец, G и G_1-группы типа 7.: $G = P \times H$, $G_1 = P_1 \times H_1$ (P и P_1-полные группы, H и H_1-счетные p-группы типа 2). Алгебры GK и G_1K изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны алгебры HK и H_1K.

Доказательство. 1. Пусть G-группа типа 1 и $GK \cong G_1K$. Тогда в силу следствия из леммы 2. 10. и леммы 2. 11 группа G_1 имеет также тип 1.

Наоборот, предположим, что группы G и G_1 разлагаются в прямое произведение циклических групп с неограниченными в совокупности порядками элементов. Образуем группу $H = G \times G_1$ и покажем, что $HK \cong GK$ и $HK \cong G_1K$.

Обозначим через $\tilde{G}$ группу G или группу G_1. Выделим в прямом разложении группы $\tilde{G}$ такую последовательность циклических подгрупп $(c_1), \ldots, (c_s), \ldots$, что порядок (c_i) равен p^{γ_i} и $\gamma_1 < \ldots < \gamma_s < \ldots$. Подгруппы (c_i) $(i=1, \ldots)$ входят в прямые разложения групп $\tilde{G}$ и H. Обозначим через F группу $\tilde{G}$ или H и рассмотрим произвольное разложение группы F в прямое произведение циклических подгрупп, содержащее подгруппы (c_i):

$$F = (b_1) \times \ldots \times (b_s) \times \ldots .$$

Положим $F_1 = (c_1)$ и обозначим через F_i $(i \geqq 2)$ подгруппу группы F, порожденную подгруппой (c_i) и теми из групп $(b_1), \ldots, (b_i)$, порядки которых не превышают p^{γ_i} $(i=2, 3, \ldots)$. Очевидно, подгруппа F_i $(i \geqq 1)$ представляется в виде прямого произведения

$$F_i = (c_i) \times (b_{j_1}) \times \ldots \times (b_{j_r}) \qquad (r \leqq i),$$

причем подгруппа F_i выделяется прямым множителем в F_{i+1}. Далее, $\bigcup_i F_i = F$, так как для каждой подгруппы (b_i) существует такая подгруппа (c_j), что $p^{\gamma_i} \geqq ((b_i):1)$.

К прямому произведению $F_{i+1} = F_i \times \ldots \times (c_{i+1})$ применима лемма 2. 4, и поэтому для алгебр $\tilde{G}K$ и HK можно построить возрастающие последовательности подгрупп

$$G'_1 \subset \ldots \subset G'_s \subset \ldots,$$

$$H'_1 \subset \ldots \subset H'_s \subset \ldots \tag{2. 34'}$$

(эти последовательности являются специализациями последовательности $F_1 \subset \ldots \subset F_s \subset \ldots$ при $F=H$ и $F=\tilde{G}$), для которых выполняются условия леммы 2. 15 (Здесь все минимальные идемпотенты алгебр G'_iK и H'_iK-первого рода). Значит, $HK \cong GK$ и $HK \cong G_1K$, что и доказывает изоморфизм алгебр GK и G_1K.

2. Пусть G-группа типа 2. Если $GK \cong G_1K$, то, в силу леммы 2. 11 и следствия из леммы 2. 10, G_1-также группа типа 2 и, при этом, выполняются равенства

$$(K(\xi):K) = (K(\xi_1):K); \quad (K(\varepsilon):K) = (K(\varepsilon_1):K) \tag{2. 35}$$

Наоборот, предположим, что для групп G и G_1 типа 2 выполняются условия (2. 35), где K-может быть и полем второго рода.

Обозначим через F группу G или G_1. Пусть

$$F = (a_1) \times \ldots \times (a_s) \times \ldots . \tag{2. 36}$$

Пусть p^{γ}-старший из порядков циклических прямых множителей (2. 36), а p^{γ_1}-

старший из порядков тех множителей из (2. 36), которые входят в это разложение счетное число раз. Пусть $(b_1), \ldots, (b_n), \ldots$-все множители из (2. 36), порядки которых равны p^{γ_1}, $F'=(c_1)\times\ldots\times(c_r)$-прямое произведение тех множителей из (2. 36), порядки которых превышают p^{γ_1}, а $F''=(d_1)\times\ldots\times(d_s)\times\ldots$-произведение прямых множителей (2. 36), порядки которых меньше p^{γ_1} (подгруппы F' и F'' могут быть равны 1).

Положим $F_1=(b_1)$; $F_n = F'\times(b_1)\times\ldots\times(b_n)\times(d_1)\times\ldots\times(d_n)$ $(n\geqq 2)$ (Если $F'' = (d_1)\times\ldots\times(d_r)$-конечная подгруппа, то полагаем $d_i=1$ при $i>r$).

Пусть последовательность $F_1\subset\ldots\subset F_s\subset\ldots$ соответственно для групп G и G_1 принимает вид:

(2. 37)
$$G_{11}\subset\ldots\subset G_{1n}\subset\ldots,$$

и

(2. 28)
$$G'_{11}\subset\ldots\subset G'_{1n}\subset\ldots.$$

В силу леммы 2. 4, алгебры GK и G_1K по отношению к последовательностям (2. 37), (2. 38) удовлетворяют условиям леммы 2. 15, и, следовательно, $GK\cong G_1K$ (Здесь все минимальные идемпотенты алгебр $G_{1i}K$ и $G_{2i}K$-первого рода).

3. Пусть группа G представляется в виде прямого произведения $G=P\times H$, где P-группа p^∞, а H-конечная группа. Из леммы 2. 12 и следствия из леммы. 2. 10 следует, что $GK\cong G_1K$ тогда и только тогда, когда $G_1 = P_1\times H_1$, где P_1-группа p^∞, а H_1-такая конечная группа, что $H_1K\cong HK$. В вырожденном случае получаем, что из изоморфизма $GK\cong G_1K$, где G-группа p^∞ следует, что G_1-группа p^∞.

4. Пусть G-группа типа 4. Если $GK\cong G_1K$, то из следствия из леммы 2. 10 и леммы 2. 12 вытекает, что G_1-группа типа 4.

Предположим, что G и G_1-группы типа 4. Обозначим через F группу G или G_1 и рассмотрим разложение F в прямое произведение s групп p^∞, где $s\geqq 2$-либо конечное число, либо счетная мощность:

$$F = P_1\times\ldots\times P_n\times\ldots.$$

Представим группу P_i в виде объединения возрастающей последовательности циклических групп:

$$(a_{i1})\subset(a_{i2})\subset\ldots,$$

где a_{ij}-элемент порядка p^j $(j=1, 2, \ldots)$.

Построим в F возрастающую последовательность конечных подгрупп $F_1\subset F_2\subset\ldots$, где $F_j=\{a_{1j}, \ldots, a_{jj}\}$ если s-счетная мощность, и $F_j=\{a_{1j}, \ldots, a_{sj}\}$ при $j\geqq s$ в случае конечного числа s.

Пусть последовательность $F_1\subset\ldots F_t\subset\ldots$ для групп G и G_1 соответственно имеет вид:

$$G_{11}\subset\ldots\subset G_{1t}\subset\ldots;$$

и

(2. 39)
$$G'_{11}\subset\ldots\subset G'_{1t}\subset\ldots.$$

Ввиду лемм 2. 3 и 2. 4, алгебры GK и G_1K удовлетворяют условиям леммы 2. 15 по отношению к последовательностям (2. 39). Следовательно, $GK\cong G_1K$ (Все минимальные идемпотенты алгебр F_iK-первого рода).

5. Пусть группа G представляется в виде прямого произведения $G = P \times H$, где P-полная группа, прямое разложение которой содержит по крайней мере две группы p^∞, а H-конечная группа. Если $GK \cong G_1K$, то в силу леммы 2. 10 и следствия из леммы, $G_1 = P_1 \times H_1$, где P_1-полная группа, а H_1-конечная группа, причем $HK \cong H_1K$. Так как алгебра GK не содержит минимальных идеалов, то прямое разложение группы P_1 содержит по крайней мере две группы p^∞. Значит, по доказанному в предыдущем пункте, $PK \cong P_1K$.

Наоборот, пусть $G = P \times H$ и $G_1 = P_1 \times H_1$, где P и P_1-полные группы, неизоморфные группе p^∞, а H и H_1-такие конечные p-группы, что $HK \cong H_1K$. Тогда, по предыдущему, $PK \cong P_1K$. Следовательно, алгебры GK и G_1K изоморфны, ибо они являются тензорными произведениями попарно изоморфных алгебр.

6. Пусть группа G представляется в виде прямого произведения $G = P \times H$, где P-полная группа, а H-бесконечная p-группа с ограниченными в совокупности порядками элементов. Если $GK \cong G_1K$, то $G_1 = P_1 \times H_1$, где $HK \cong H_1K$. Это следует из леммы 2. 10 и следствия из этой леммы.

Предположим, что $G = P \times H$, $G_1 = P_1 \times H_1$ и $HK \cong H_1K$, где H и H_1-бесконечные p-группы с ограниченными в совокупности порядками элементов, а P и P_1-полные группы. Покажем, что $GK \cong G_1K$. Поскольку H и H_1-группы типа 2, то для них можно построить возрастающие последовательности подгрупп типа (2. 37) и (2. 38):

$$\begin{gathered} H_{11} \subset \ldots \subset H_{1s} \subset \ldots; \\ H_{21} \subset \ldots \subset H_{2s} \subset \ldots . \end{gathered} \tag{2.40}$$

Образуем в группах P и P_1 возрастающие последовательности подгрупп:

$$P_{11} \subset \ldots \subset P_{1s} \subset \ldots \ (\bigcup_i P_{1i} = P);$$

$$P_{21} \subset \ldots \subset P_{2s} \subset \ldots \ (\bigcup_i P_{2i} = P_1).$$

Положим $\tilde{H}_{1s} = P_{1s} \times H_{1s}$; $\tilde{H}_{2s} = P_{2s} \times H_{2s}$.

Построим последовательности

$$\tilde{H}_{11} \subset \ldots \subset \tilde{H}_{1s} \subset \ldots; \tag{2.41}$$

$$\tilde{H}_{21} \subset \ldots \subset \tilde{H}_{2s} \subset \ldots . \tag{2.42}$$

Назовем минимальными идемпотентами первого рода алгебры $\tilde{H}_{is}K$ $(i=1, 2)$ идемпотенты вида $\frac{1}{(P_{is}:1)}\big(\sum_{g \in P_{is}} g\big)\, e_t$, где e_t-минимальный идемпотент алгебры H_{is}, а идемпотентами второго рода — остальные минимальные идемпотенты этой алгебры. Ввиду лемм 2. 3, 2. 4, и 2. 5, для алгебр GK и G_1K по отношению к последовательностям (2. 41), (2. 42) выполняются условия леммы 2. 15. Следовательно, $GK \cong G_1K$.

7. Пусть подгруппа P элементов бесконечной высоты в группе G конечна $(P \neq 1)$. Если $GK \cong G_1K$, то в силу следствия из леммы 2. 10 подгруппа P_1 элементов бесконечной высоты в G_1 также конечна, причем $P_1 \neq 1$.

Наоборот, предположим, что G и G_1-группы типа 8. Покажем, что $GK \cong G_1K$.

Пусть P и P_1-конечные подгруппы элементов бесконечной высоты соответственно в группах G и G_1. Фактор-группы $H=G/P$ и $H_1=G_1/P_1$-группы типа 1. Образуем для групп H и H_1 последовательности типа (2. 34') (см. рассуждения пункта 1):

$$G_{11}/P \subset \ldots \subset G_{1s}/P \subset \ldots;$$

$$G_{11}/P_1 \subset \ldots \subset G'_{1s}/P_1 \subset \ldots,$$

а для групп G и G_1 последовательности

$$P = \tilde{G}_{10} \subset \tilde{G}_{11} \subset \ldots \subset \tilde{G}_{1s} \subset \ldots; \tag{2.43}$$

$$P_1 = \tilde{G}'_{10} \subset \tilde{G}'_{11} \subset \ldots \subset \tilde{G}'_{1s} \subset \ldots,$$

где $\tilde{G}_{1j}(\tilde{G}_{1j})$-полный прообраз группы G_{1j}/P (G'_{1j}/P_1) при естественном гомоморфизме $G \to G/P$ $(G_1 \to G_1/P_1)$ $(j=1, \ldots)$.

Назовем идемпотентами первого рода алгебры $\tilde{G}_{1j}K$ $(\tilde{G}'_{1j}K)$ $(j=1, 2, \ldots)$ минимальные идемпотенты этой алгебры, соответствующие таким абсолютно неприводимым характерам группы $\tilde{G}_{1j}(\tilde{G}'_{1j})$, ядро которых содержит подгруппу $\tilde{G}_{10}(\tilde{G}'_{10})$. Остальные минимальные идемпотенты алгебр $\tilde{G}_{1j}K(\tilde{G}'_{1j}K)$ $(j \geqq 1)$ назовем идемпотентами второго рода. На основании лемм 2. 3, 2. 4 и 2. 5 для алгебр GK и G_1K по отношению к последовательностям (2. 43) выполняются условия леммы 2. 15, и, следовательно, $GK \cong G_1K$.

8. Предположим, что G-группа типа 9 и $GK \cong G_1K$. Тогда, на основании следствия из леммы 2. 10 и леммы 2. 11, G_1-также группа 9. Пусть G и G_1-группы типа 9, а $P(P_1)$-бесконечные подгруппы элементов бесконечной высоты в $G(G_1)$. Выделим в группах P и P_1 возрастающие последовательности подгрупп:

$$P_{11} \subset \ldots \subset P_{1s} \subset \ldots \qquad (\bigcup_i P_{1i} = P);$$

$$P_{21} \subset \ldots \subset P_{2s} \subset \ldots \qquad (\bigcup_i P_{2i} = P_1).$$

Группы $G/P=H$ и $G_1/P_1=H_1$ являются группами типа 1 и поэтому к ним применимы рассуждения пункта 1. Построим для групп H и H_1 последовательности типа (2. 34):

$$G_{11}/P \subset \ldots \subset G_{1s}/P \subset \ldots;$$

$$G_{21}/P_1 \subset \ldots \subset G_{2s}/P_1 \subset \ldots.$$

Обозначим через $Q_{1j}(Q_{2j})$ систему представителей смежных классов группы $G_{1j}(G_{2j})$ по подгруппе $P(P_1)$, и пусть $H_{1j}(H_{2j})$-подгруппа группы $G(G_1)$, порожденной подгруппой $P_{1j}(P_{2j})$ и подмножеством $Q_{1j}(Q_{2j})$.

Образуем для групп G и G_1 последовательности:

$$H_{11} \subset \ldots \subset H_{1s} \subset \ldots; \tag{2.44}$$

$$H'_{11} \subset \ldots \subset H'_{1s} \subset \ldots. \tag{2.45}$$

Очевидно, $\bigcup_i H_{1i}=G$, $\bigcup_i H'_{1i}=G_1$.

Положим $P \cap H_{1j} = P_{1j}$; $P_1 \cap H'_{1j} = P'_{1j}$. Назовем идемпотентами первого рода алгебры $H_{1j}K(H'_{1j}K)$ минимальные идемпотенты этой алгебры, соответствующие таким абсолютно неприводимым характерам группы $H_{1j}(H'_{1j})$, ядро которых содержит, подгруппу $P_{1j}(P'_{1j})$. Остальные минимальные идемпотенты алгебры $H_{1j}K(H'_{1j}K)$ назовем идемпотентами второго рода. В силу лемм 2. 3 и 2. 5 для последовательностей (2. 44), (2. 45) выполняются условия леммы 2. 15, и поэтому $GK \cong G_1K$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу об изоморфизме групповых алгебр GK, где G-счетная p-группа, а K-поле второго рода относительно простого p.

Теорема 2. 3. *Если $p \neq 2$, а K-поле второго рода (относительно простого p), то групповые алгебры GK и G_1K любых двух счетных абелевых p-групп G и G_1 изоморфны.*

Доказательство. Образуем в группах G и G_1 возрастающие последовательности подгрупп

$$G_{11} \subset \ldots \subset G_{1s} \subset \ldots \qquad (\bigcup_i G_{1i} = G);$$

$$G'_{11} \subset \ldots \subset G'_{1s} \subset \ldots \qquad (\bigcup_i G'_{1i} = G_1).$$

Так как поле K-второго рода, то каждый минимальный идемпотент любых из алгебр $G_{1i}K$, $G'_{1i}K$ $(i=1, 2, \ldots)$ имеет вес 1 и разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов алгебры $G_{1i+1}K$ (соответственно $G'_{1i+1}K$). Отсюда, в силу леммы 2. 15, вытекает утверждение теоремы.

Теорема 2. 4. *Пусть $p=2$, а K-поле второго рода относительно простого числа 2. Если $K=K(i)$ $(i^4=1)$ то $GK \cong HK$ для любых счетных 2-групп G и H. Если $K \subset K(i)$, то групповая алгебра GK произвольной счетной 2-группы G изоморфна групповой алгебре 2-группы одного из следующих типов:*

1. G_1-группа типа $(2, \ldots, 2, \ldots)$;

2. G_2-группа типа $(4, 2, \ldots, 2, \ldots)$;

3. G_3-группа типа $(4, 4, \ldots, 4, \ldots)$;

4. G_4-группа типа 2^∞.

5. $G_5^{(s)} = P \times H_s$, где P-группа 2^∞, а H_s-прямое произведение s циклических групп порядка 2 $(s=1, 2, \ldots)$.

Групповые алгебры групп типов 1—5 попарно неизоморфны.

1. $GK \cong G_1K$ тогда и только тогда, когда $G \cong G_1$.

2. $GK \cong G_2K$ тогда и только тогда, когда G не содержит элементов бесконечной высоты и разложение группы G в прямое произведение циклических групп входит только конечное число множителей с порядками, превосходящими 2.

3. Пусть P-подгруппа элементов бесконечной высоты в G. $GK \cong G_3K$ тогда и только тогда, когда в разложении группы G/P в прямое произведение циклических групп встречается бесконечно много множителей с порядком, большим 2.

4. $GK \cong G_4K$ тогда и только тогда, когда G-полная 2-группа.

5. $GK \cong G_5^{(s)}K$, когда $G = P \times F$, где P-полная группа, а F-конечная группа, разлагающаяся в прямое произведение s циклических групп.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается так же, как теорема 2. 3. Пусть $K \subset K(i)$. Из леммы 2. 11 вытекает, что групповые алгебры G_1K, G_2K, G_3K попарно неизоморфны. Группа G_4 обладает только тривиальным одномерным представлением над полем K, а группа $G_5^{(s)}$ имеет точно 2^s одномерных представлений. Отсюда вытекает, что алгебры $G_5^{(s)}K$ при различных s между собой неизоморфны. Кроме того, алгебра $G_5^{(s)}K$ не может быть изоморфна ни одной из алгебр G_iK $(i=1, 2, 3)$, так как число одномерных K-представлений каждой из групп G_1, G_2, G_3-бесконечно.

Пусть G-счетная 2-группа, а P-подгруппа элементов бесконечной высоты в G. Предположим, что выполняются следующие условия: 1. Фактор-группа G/P-бесконечна. 2. Если $P=1$, то в разложении группы G в прямое произведение циклических групп встречается бесконечно много множителей, порядки которых превышают 2. Покажем, что $GK \cong G_3K$.

Пусть $G/P=(b_1P)\times\ldots\times(b_sP)\times\ldots$-разложение группы G/P в прямое произведение циклических групп.

В случае, когда группа P бесконечна, представим P в виде объединения возрастающей последовательности конечных подгрупп: $P_1\subset\ldots\subset P_s\subset\ldots$ $\left(\bigcup\limits_i P_i=P\right)$. При $P=1$ положим $P_1=\ldots=P_s=\ldots=1$, а в случае конечной группы P положим $P=P_1=\ldots=P_s=\ldots$. Далее, в группе $F=G/P$ выделим последовательность конечных подгрупп

$$F_1/P\subset\ldots\subset F_i/P\subset\ldots\qquad \left(F_1/P=(c);\ c^{2^r}=1;\ r\geqq 2\right),$$

где при $P=1$ подгруппы F_i задаются произвольно, а при $P\neq 1$ показатель каждой из подгрупп F_i больше 2 и

$$F_{i+1}/P=F_i/P\times F_i'/P.$$

Пусть R_i-система представителей смежных классов группы F_i по подгруппе P, а $\tilde{G}_i$-подгруппа группы G, порожденная множеством R_i и подгруппой P_i. Образуем последовательность.

$$\tilde{G}_1\subset\ldots\subset\tilde{G}_s\subset\ldots\qquad \left(\bigcup_i\tilde{G}_i=G\right). \tag{2.46}$$

Рассмотрим разложение группы G_3 в прямое произведение циклических групп порядка 4:

$$G_3=(b_1)\times\ldots\times(b_s)\times\ldots$$

и образуем последовательность подгрупп

$$G_3^{(1)}\subset\ldots\subset G_3^{(s)}\subset\ldots, \tag{2.47}$$

где $G_3^{(s)}=(b_1)\times\ldots\times(b_s)$ $(s=1, 2, \ldots)$. Тогда каждая из алгебр $\tilde{G}_iK(G_3^{(i)}K)$ содержит идемпотенты веса 1 и 2, причем в разложении минимального идемпотента веса 1 алгебры $\tilde{G}_iK(G_3^{(i)}K)$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $\tilde{G}_{i+1}K(G_3^{(i+1)}K)$ встречаются по крайней мере два идемпотента веса 1 и по крайней мере два идемпотента веса 2, а каждый минимальный идемпотент $e\in G_iK(G_3^{(i)}K)$ веса 2 разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов веса 2 алгебры $G_{i+1}K(G_3^{(i+1)}K)$. Отсюда, в силу леммы 2. 15 и замечания 1 к лемме вытекает, что $GK\cong G_3K$.

Предположим, что группа G разлагается в прямое произведение счетного числа циклических групп, среди которых встречается только конечное число групп порядков 2^{2+i} $(i\geqq 0)$. Тогда, в силу пункта 2 в доказательстве теоремы

2. 2, $GK \cong G_1 K$, если $G \cong G_1$ и $GK \cong G_2 K$, если в прямом разложении группы G встречается хотя бы одна циклическая группа порядка 2^{2+i} $(i \geqq 0)$. Предыдущие рассмотрения охватывают все случаи, когда группа G имеет бесконечно много одномерных представлений над полем K. Пусть группа G имеет только конечное число одномерных представлений над полем K. Тогда G представляется в виде прямого произведения $G = P \times H$, где P-полная группа, а $H = (b_1) \times \times \ldots \times (b_s)$-конечная 2-группа. Покажем, что $GK \cong G_5^{(s)} K$, а в вырожденном случае (при $s=0$) $GK \cong G_4 K$ (G_4-группа типа 2^∞). Пусть разложение группы P в прямое произведение n групп 2^∞ имеет вид: $P = P_1 \times \ldots \times P_t \times \ldots$ где n-натуральное число или счетная мощность.

Представим группу P_i в виде объединения возрастающей последовательности циклических подгрупп:

$$(c_{i1}) \subset \ldots \subset (c_{it}) \subset \ldots \qquad (c_{i1}^2 = 1).$$

Положим $H_i = H \times (c_{1i}) \times \ldots \times (c_{ii})$ $(i=1, 2, \ldots)$ если n-счетная мощность, а в случае конечного числа n будем считать, что $H_j = H \times (c_{1j}) \times \ldots \times (c_{nj})$ при $j \geqq n$. Положим $G_i = H \times H_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ и образуем возрастающую последовательность подгрупп группы G

$$(2.48) \qquad G_1 \subset \ldots \subset G_t \subset \ldots \qquad (\bigcup G_i = G).$$

Алгебра HK содержит точно 2^s минимальных идемпотентов $e_1, \ldots, e_r$ веса 1 $(r=2^s)$. Назовем минимальными идемпотентами первого рода для алгебры $G_i K$ $(i=1, 2, \ldots)$ идемпотенты вида $e_i e$, где e_i пробегает все минимальные идемпотенты веса 1 алгебры HK, а $e = \frac{1}{(H_i : 1)} \sum_{g \in H_i} g$-идемпотент алгебры $H_i K$, соответствующий единичному характеру группы. Остальные минимальные идемпотенты алгебр $G_i K$ $(i=1, 2, \ldots)$ назовем идемпотентами второго рода.

Для каждого минимального идемпотента $e \in G_i K$ второго рода и произвольной подгруппы G_j в (2. 48) найдется такая подгруппа $G_r \supset G_j$, что идемпотент e разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов веса 2 алгебры $G_r K$. В разложении каждого идемпотента первого рода алгебры $G_i K$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $G_{i+1} K$ возникает точно один идемпотент первого рода и идемпотенты второго рода. Таким образом, для двух групп G и G_1 обладающих точно 2^s одномерными представлениями над полем K, можно построить последовательности подгрупп (2. 48), для которых выполняются условия замечания 1 к лемме 2. 15. Следовательно, $GK \cong G_1 K$. В вырожденном случае получим, что групповая алгебра GK любой счетной полной 2-группы G изоморфна алгебре $G_4 K$. Теорема доказана.

Теорема 2. 5. *Пусть G и G_1-счетные периодические абелевы группы, а K-алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов групп G и G_1. Тогда групповые алгебры GK и $G_1 K$ изоморфны.*

Доказательство. Утверждение теоремы доказывается так же, как и теорема 2. 3. Если для групп G и G_1 построить восрастающие последовательности подгрупп

$$G_{11} \subset \ldots \subset G_{1s} \subset \ldots$$

и

$$G_{21} \subset \ldots \subset G_{2s} \subset \ldots,$$

то все минимальные идемпотенты алгебр $G_{ij}K$ ($i=1, 2; j=1, 2, \ldots$) имеют вес 1 и каждый минимальный идемпотент алгебры $G_{ij}K$ разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов алгебры $G_{ij+1}K$. Поэтому, в силу леммы 2. 15, $GK \cong G_1K$.

Теорема 2. 6. *Групповая алгебра GD произвольной счетной периодической абелевой группы G над полем действительных чисел D изоморфна вещественной групповой алгебре одной из 2-групп, перечисленных в формулировке теоремы 2. 4.*

Представим группу G в виде прямого произведения $G = N \times P \times R$, где N-группа с элементами нечетного порядка, P-полная 2-группа, а R-редуцированная 2-группа.

Если подгруппа $N \times P$-бесконечна, а группа R конечна, то $GD \cong G_5^{(s)}D$, где s-число циклических прямых множителей в разложении группы R.

$GD \cong G_3D$ тогда и только тогда, когда подгруппа R бесконечна и, при этом, выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий: 1. Подгруппа $(N \times P)$-бесконечна. 2. Подгруппа R содержит элементы бесконечной высоты. 3. $(N \times P)$-конечная группа, а группа R разлагается в прямое произведение циклических групп, среди которых имеется бесконечно много групп порядков 2^{2+i} ($i \geqq 0$).

$GD \cong G_2D$ тогда и только тогда, когда группа R разлагается в прямое произведение счетного числа циклических групп, а R^2 и $(N \times P)$-конечные группы, и, при этом, группа R не изоморфна группе G_1, если $(N \times P) = 1$.

$GD \cong G_1D$ тогда и только тогда, когда $G \cong G_1$.

Доказательство. Пусть G-счетная периодическая группа, все элементы которой имеют нечетный порядок, Покажем, что $GD \cong G_4D$, где G_4-группа типа 2^∞. Представим группу G_4 в виде объединения возрастающей последовательности циклических подгрупп.

$$H_1 \subset \ldots \subset H_s \subset \ldots \qquad (\bigcup_i H_i = G_4) \tag{2.49}$$

и построим возрастающую последовательность конечных подгрупп в G:

$$G_1 \subset \ldots \subset G \subset \ldots \subset (\bigcup_i G_t = G) \tag{2.50}$$

Назовем минимальным идемпотентом первого рода для группы $F_i = G_i, H_i$ идемпотент $e = \frac{1}{(F_i:1)} \sum_{g \in F_i} g$, а остальные минимальные идемпотенты группы F_i-идемпотентами второго рода. Тогда для последовательностей (2. 49) и (2. 50) выполняются условия замечание 2 к лемме 2,15 и, следовательно, $GD \cong G_sD$. Далее, если N-группа с элементами нечетного порядка, и $G = N \times P$ (P-полная 2-группа), то $GD \cong G'D$, где $G' = N \times N_1$ (N_1-произвольная счетная группа с нечетными порядками элементов). Следовательно, $G'D \cong G_4D$ (G_4-группа 2^∞). Таким образом, если счетная 2-группа G представляется в виде прямого произведения $N \times P$, то $GD \cong G_4D$. Отсюда вытекает, что групповая алгебра GD, где $G = P \times N \times R$ в случае бесконечной группы $P \times N$ изоморфна групповой алгебре $\tilde{G}D$, где $\tilde{G} = G_4 \times R$-счетная 2-группа.

Предположим теперь, что $G = N \times R$, где $N (N \neq 1)$-конечная группа нечетного порядка, а R-редуцированная (бесконечная) 2-группа. Рассмотрим два случая: а) R^2-конечная группа; б) Группа R^2-бесконечна.

В случае а) группу R можно представить в виде прямого произведения $R = R_1 \times G_1$, где $G_1 = (a_1) \times \ldots \times (a_s) \times \ldots$-прямое произведение циклических групп второго порядка, а R_1-конечная 2-группа, разлагающаяся в прямое произведение t циклических групп порядков 2^{2+i} $(i \geqq 0)$. Построим для группы G возрастающую последовательность подгрупп:

$$(2.50) \qquad H_1 = (N \times R_1) \subset \ldots \subset H_s = \{N, R_1, a_1 \ldots, a_s\} \subset \ldots .$$

Рассмотрим теперь группу $G_2 = (a_1) \times \ldots \times (a_s) \times \ldots$, где (a_1)-циклическая группа 4-го порядка, а каждая из подгрупп (a_j) при $j \geqq 2$ имеет порядок 2. Образуем для группы G_2 последовательность подгрупп

$$(2.51) \quad G_1' = (a_1) \times \ldots \times (a_t) \subset \ldots \subset G_s' = G_1' \times (a_{t+1}) \times \ldots \times (a_{t+s+1}) \subset \ldots .$$

Каждый минимальный идемпотент веса 1 алгебры $H_i D$ $(G_i' D)$ разлагается в сумму точно двух минимальных идемпотентов веса 1 алгебры $H_{i+1}D(G_{i+1}'D)$. Алгебры GD и G_2D по отношению к последовательностям (2. 50) и (2. 51) удовлетворяют условиям замечания 2 к лемме 2. 15. Следовательно, $GD \cong$ $\cong G_2D$. В случае б) для группы G и группы $G_3 = (4, \ldots, 4 \ldots)$ можно построить такие возрастающие последовательности подгрупп

$$G_{11} \subset \ldots \subset G_{1s} \subset \ldots \qquad (\bigcup_i G_{1i} = G);$$

и

$$G_{11}' \subset \ldots \subset G_{1s}' \subset \ldots \qquad (\bigcup_i G_{1i}' = G_3),$$

что разложение каждого минимального идемпотента веса 1 алгебры $G_{1i}D$ $(G_{1i}'D)$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $G_{1i+1}D(G_{1i+1}'D)$ содержит по крайней мере два идемпотента веса 1 и по крайней мере два идемпотента веса 2. Отсюда в силу замечания 2 к лемме 2. 15 вытекает изоморфизм $GD \cong$ $\cong G_3D$.

Итак, мы показали, что для любой периодической счетной группы G имеет место изоморфизм $GD \cong HD$, где H – 2-группа. Утверждение доказываемой теоремы легко получается теперь путем привлечения теоремы 2. 4. Теорема доказана.

2. Изучим теперь неразложимые представления произвольной периодической абелевой группы G (не обязательно счетной) над произвольным полем K характеристики нуль.

Пусть G-произвольная группа, а K-любое поле. Назовем групповой полуалгеброй $\Gamma(GK)$ совокупность всевозможных формальных сумм вида $\sum_{g \in G} \lambda_g g$ $(\lambda_g \in K)$, для которых естественным образом определены операции сложения и правого и левого умножения на элементы групповой алгебры GK (по определению $\sum_g \lambda_g g = \sum_g \gamma_g g$, тогда и только тогда, когда $\lambda_g = \gamma_g$ для всех $g \in G$).

Если $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in \Gamma(GK)$, а H-подгруппа группы G, то через $d_H(x)$ условимся обозначать сумму $\sum_{g \in H} \alpha_g g$.

Лемма 2. 16. Пусть G-конечная абелева группа. H-подгруппа группы G, K-поле, характеристика которого не делит порядок G, e-минимальный идемпотент алгебры GK, а e_1-такой минимальный идемпотент алгебры HK, что $e_1 e = e$. Тогда $d_H(e) = \lambda e_1$ где $\lambda \in K$.

Доказательство. Пусть χ-абсолютно неприводимый характер группы G, соответствующий идемпотенту e. Пусть поле $F(F_1)$ получается в результате присоединения к полю K всех значений характера χ на группе $G(H)$. Идемпотент $e(e_1)$ получается в результате сложения всех идемпотентов, K-сопряженных с идемпотентом

$$e' = \frac{1}{(G:1)} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g \quad \left(e_1' = \frac{1}{(H:1)} \sum_{g \in H} \chi(g^{-1}) g \right).$$

Отсюда легко получить, что $d_H(e) = \dfrac{(F:F_1)}{(G:H)} e_1$. Лемма доказана.

Теорема 2. 7. *Пусть G-периодическая абелева группа, а K-поле характеристики нуль. Каждый неразложимый G-K-модуль неприводим. Неприводимые представления Γ группы G над полем K находятся во взаимно однозначном соответствии с такими множествами E идемпотентов алгебры GK, что*

1. *Элементами E являются минимальные идемпотенты e групповых алгебр HK всевозможных конечных подгрупп H группы G. Для каждой конечной подгруппы $H \subseteqq G$ множество E содержит точно один минимальный идемпотент e алгебры HK.*
2. *Любые два идемпотента из множества E неортогональны.*

Неприводимые представления F и F_1 группы G над полем K эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества идемпотентов E и E_1 совпадают.

Доказательство. Пусть M-произвольный неразложимый G-K-модуль, H-произвольная конечная подгруппа группы G, а $e_1, \ldots, e_t$-все минимальные идемпотенты алгебры HK. Так как $1 = e_1 + \ldots + e_t$, то $M = e_1 M + \ldots + e_t M$, и, в силу неразложимости модуля M, все слагаемые в правой части, кроме одного, обращаются в нуль. Таким образом, для каждой конечной подгруппы $H \subseteqq G$ существует точно один минимальный идемпотент $e_H \in HK$, такой, что

$$e_H M = M. \tag{2. 52}$$

Пусть x-произвольный ненулевой элемент модуля M. Образуем подмодуль $N = GKx \subseteqq M$. Покажем, что модуль N неприводим. В самом деле, пусть N_1-любой ненулевой G-K-подмодуль модуля N и $0 \neq ax \in N$, где $a \in GK$. Тогда существует такая конечная подгруппа $H \subseteqq G$, что $a \in HK$. Ввиду (2. 52), $x = e_H x_1$, где e_H-минимальный идемпотент алгебры HK, а x_1-ненулевой элемент модуля M. Тогда для некоторого элемента $a' \in HK$ имеем $a' a e_H = e_H$ и, следовательно, $a' a e_H x_1 = e_H x_1 = x$, т. е., $x \in N_1$ и $N_1 = N$. Таким образом, каждый ненулевой элемент $x \in M$ содержится в неприводимом G-K-подмодуле модуля M. Следовательно, модуль M-вполне приводим, а так как M-неразложимый модуль, то M-неприводим. Итак, каждый неразложимый G-K-модуль M неприводим.

Пусть H пробегает все конечные подгруппы группы G, а $E = E(M) = \{e_H\}$-множество всех минимальных идемпотентов e_H, для которых имеет место

(2. 52). Очевидно, множество E удовлетворяет условиям 1. и 2., перечисленным в формулировке теоремы.

Покажем, что неизоморфным неприводимым модулям M_1 и M_2 соответствуют различные множества $E(M_1)$ и $E(M_2)$.

В самом деле, предположим, что $E=E(M_1)=E(M_2)$.

Пусть $0 \neq x \in M_1$; $0 \neq y \in M_2$. Тогда для любого минимального идемпотента $e_H \in E$ выполняются равенства

$$x = e_H x_H; \quad y = e_H y_H (0 \neq x_H \in M_1; 0 \neq y_H \in M_2).$$

Очевидно, $M_1=GKx$, $M_2=GKy$. Произвольный элемент $\tilde{x} \in M_1$ записывается в виде $\tilde{x}=ax$, где $a \in GK$. Если $a_1x=a_2x$, где $a_1, a_2 \in HK$ (H-конечная подгруппа группы G), то

$$a_1 e_H x_H = a_2 e_H x_H. \tag{2. 53}$$

Пусть $I=HKe_H$-минимальный идеал алгебры HK. Тогда имеет место H-K-изоморфизм $\theta: I \to HKe_H x_H$, где $\theta(ae_H)=ae_H x_H$ ($a \in HK$). Значит, из (2. 53) вытекает равенство $a_1e_H=a_2e_H$, а из этого равенства следует, что $a_1e_Hy_H=$ $=a_2e_Hy_H$ или $a_1y=a_2y$. Таким образом, формула $ax \to ay$ определяет операторный изоморфизм модуля M_1 на M_2, что ведет к противоречию.

Итак, неизоморфным неприводимым модулям M_1 и M_2 соответствуют различные множества $E(M_1)$ и $E(M_2)$. Рассмотрим теперь произвольное множество $E'=\{e_H\}$ идемпотентов алгебры GK, удовлетворяющее условиям 1. и 2. теоремы 2. 7. Покажем, что существует такой неприводимый G-K-модуль M, что $E(M)=E'$.

Обозначим через N_H ядро неприводимого представления группы H над полем K, соответствующего идемпотенту $e_H \in E'$. Пусть N-подгруппа группы G, порожденная всеми подгруппами N_H (H пробегает все конечные подгруппы группы G). Покажем, что $N \cap H = N_H$. В самом деле, предположим, что $N' = (N \cap H) \supset N_H$. Пусть $N' \subseteqq N_{H_1} \dots N_{H_t}$, где $H_1, \dots, H_t$-некоторые конечные подгруппы группы G. Из неравенств $e_{N_{H_i}} e_{H_i} \neq 0$ легко вытекает, что $e_{N_{H_i}} =$ $=\frac{1}{(N_{H_i}:1)} \sum_{g \in N_{H_i}} g$ $(i=1, \dots, t)$. Далее используя неравенства $e_{N'} e_{N_{H_i}} \neq 0$ $(i=1, \dots, t)$ получим, что $e_{N'}=\frac{1}{(N':1)} \sum_{g \in N'} g$, т. е. идемпотент $e_{N'} \in E'$ соответствует единичному представлению группы N' над полем K. Так как по предположению $N' \supset N_H$, то $e_{N'}e_H=0$. что противоречит свойству 2. множества E'. Итак,

$$N \cap H = N_H. \tag{2. 54}$$

Так как фактор-группы H/N_H-циклична, то из (2. 54) сразу вытекает, что каждая конечная подгруппа группы G/N-циклична. Следовательно, G/N-счетная группа, изоморфная подгруппе группы всех комплексных корней из единицы.

Построим в группе G/N возрастающую последовательность конечных групп

$$G_1/N \subset \dots \subset G_s/N \subset \dots \qquad (\bigcup_i G_i = G). \tag{2.55}$$

Выберем в каждой из подгрупп G_i систему L_i представителей смежных классов по подгруппе N таким образом, что $L_i \subset L_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Пусть $L=\bigcup_i L_i$. Обозначим через G'_i подгруппу группу G, порожденную множеством L_i. Тогда $G'_1 \subset \ldots \subset G'_s \subset \ldots$. Рассмотрим совокупность идемпотентов $\{e_{G'_i}\}$. Так как $G'_i \subset G'_{i+1}$ и $e_{G'_i} e_{G'_{i+1}} \neq 0$, то $e_{G'_i} \cdot e_{G'_{i+1}} = e_{G'_{i+1}}$. Тогда, в силу леммы 2.16, $d_{G'_i}(e_{G'_{i+1}}) = \lambda e_{G'_i}$ $(\lambda \in K)$. Следовательно, существует такая последовательность $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ элементов поля K, что

$$d_{G'_i}(\lambda_{i+1} e_{G'_{i+1}}) = \lambda_i e_{G'_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots).$$

Из формул (2.55) следует, что существует такой элемент $x \in \Gamma(GK)$ ($\Gamma(GK)$-групповая полуалгебра группы G над полем K), что $d_{G'_i}(x) = \lambda_i e_{G'_i}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Пусть

$$x = \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in L} \alpha_g g + \sum_{g \notin L} \alpha_g g.$$

Положим

$$x_1 = \sum_{g \in L} \alpha_g g. \tag{2.56}$$

Пусть $y = (\sum_{g \in N} g) x_1$ $(y \in \Gamma(G, K))$. Положим $M = GKy$ и покажем, что M-неприводимый G-K-модуль и $E(M) = E'$.

Пусть I-идеал алгебры GK, порожденный всевозможными элементами $h-1$, где $h \in N$ и $Q = G/N$. В силу леммы 1.1, существует гомоморфизм $\theta: GK \to QK$ с ядром I. Произвольный элемент $a \in GK$ записывается в виде

$$a = \sum_{h \in N} \sum_{b \in L} \alpha_{h,b}\, hb \qquad (\alpha_{h,b} \in K).$$

Тогда

$$\theta(a) = \sum_{b \in L} \sum_{h} \alpha_{h,b}(bN) = \bar{a}. \tag{2.57}$$

Так как модуль M аннулируется идеалом I, то M можно рассматривать как модуль над фактор-алгеброй $QK \cong GK/I$.

Пусть H-произвольная конечная подгруппа группы G и $L \cap H = L_H$. Положим $H' = HN/N$. Вивду (2.54), минимальный идемпотент $e_H \in E'$ можно записать в виде

$$e_H = \frac{1}{(N_H:1)} (\sum_{g \in N_H} g) \sum_{b \in L_H} \gamma_b b \qquad (\gamma_b \in K), \tag{2.58}$$

где $\sum_b \gamma_b(bN)$-минимальный идемпотент алгебры $H'K$. Вследствие (2.57) отсюда вытекает, что $\theta(e_H) = \bar{e}_H = \sum_{b \in L_H} \gamma_b(bN)$, где $\theta(e_H) \neq 0$-минимальный идемпотент групповой алгебры подгруппы HN/N группы Q.

Отсюда вытекает, что для произвольного идемпотента $e \in GK$ $(e \neq 0)$ идемпотент $\bar{e} \neq 0$ (e-записывается в виде суммы минимальных идемпотентов некоторой алгебры HK, где H конечная подгруппа группы G). В силу (2.56), $\bar{e}_{G'_i} = \gamma \sum_{g \in L_i} \alpha_g(gN)$ $(\gamma \in K)$. Тогда при $j \geqq i$ имеем:

$$\overline{(e_{G'_i} \sum_{g \in L_j} \alpha_g g)} = \bar{e}_{G'_i} \sum_{g \in L_j} \alpha_g(gN) = \bar{e}_{G'_j} \cdot \gamma \bar{e}'_{G_j} = \gamma \bar{e}'_{G_j}.$$

Следовательно, $e_{G_i'}\sum_{g\in L_j}\alpha_g g=\sum_{g\in L_j}\alpha_g g+c$ где $c\in I$. Теперь при $j\geqq i$:

$$d_{G_j}(e_{G_i'}y)=e_{G_i}\Big(\sum_{g\in N}g\Big)\cdot\sum_{g\in L_j}\alpha_g g=\Big(\sum_{g\in N}g\Big)\cdot\Big(\sum_{g\in L_j}\alpha_g g+c\Big)=$$
$$=\Big(\sum_{g\in N}g\Big)\sum_{g\in L_j}\alpha_g g=d_{G_j}(y).$$

Так как $\bigcup_j G_j=G$, то отсюда вытекает, что

$$e_{G_i'}y=y\qquad(i=1,2,\ldots).$$

Пусть $0\neq ay\in M$, где $a\in GK$. Тогда $a\in G_jK$ и $ay=\bar a\bar e_{G_j}y$. Так как $\bar e_{G_j}$-минимальный идемпотент алгебры $(G_j/N)K$, то существует такой элемент $\bar b\in(G_j/N)K$ что $\bar b\bar a\bar e_{G_j}=\bar e_{G_j}$. Значит M-неприводимый модуль над QK, а, следовательно, и над GK.

Пусть H-произвольная конечная подгруппа группы G. Тогда для некоторого j

$$HN\subset G_j,\quad HN/N\subset G_j/N.$$

Так как $e_He_{G_j}'\neq0$, то $\bar e_H\bar e_{G_j}'\neq0$. Значит, $\bar e_H\bar e_{G_j}'=\bar e_{G_j}'$. Таким образом, $e_HM=\bar e_H\bar e_{G_j}'M=\bar e_{G_j}'M=e_{G_j}'M=M$. Следовательство, $E(M)=E'$ и теорема доказана.

Литература

[1] W. E. Deskins, Finite abelian groups with isomorphic group algebras *Duke Math. J.* **23** (1956), 35—40.

[2] А. Г. Курош, Теория групп., *Москва*, **1953**.

[3] С. Д. Берман, Характеры линейных представлений конечных групп над произвольным полем, Матем. сборник **44**, (1958), 409—456.

[4] S. Perlis—G. L. Walker, Abelian group algebras of finite orders. *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 420—426.

[5] С. Д. Берман, Об изоморфизме групповых алгебр счетных абелевых групп. *Докл. и сообщ. УжГУ, физ. матем. сер.* 3, (1960), 56—57.

[6] С. Д. Берман, Об изоморфизме групповых алгебр прямых произведений примарных циклических групп. *Докл. и сообщ. УжГУ физ. матем. сер.*, **3**, (1961), 56—57.

[7] С. Д. Берман. Групповые алгебры счётных абелевых p-групп. *Доклады АНСССР*, **175.** (1967), N3 514—516.

(Поступило 20. XII. 1966.)