Publ. Math. Debrecen
58 / 3 (2001), 411–422

Über Kugelpackungen um einen Zylinder

Von J. HORVÁTH (Sopron), Á. H. TEMESVÁRI (Sopron)
und J. ZÁVOTI (Sopron)

Herrn Professor Dr. L. Fejes Tóth zum 85. Geburtstag gewidmet

Abstract. A rotation cylinder $Z(t,1)$ with axis t and unit radius is given in $\boldsymbol{E}^3$. We investigate packings of balls with radius r where the balls touch the cylinders $Z(t,1)$ and $Z(t,1+r)$. In this paper we give an upper bound for the densities of the above packings (Theorem 1). This bound is sharp for the radii r given in (2). In other cases we construct packings whose densities give a lower bound for the extremal density (Theorem 2).

1. Einleitung

L. Fejes Tóth und Heppes haben das folgende Problem als eine Aufgabe im Schweizer Mathematischen Wettbewerb für Studenten gestellt. Es sei eine Strecke von der Länge a gegeben. Man beweise, dass mindestens $2\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\right]+2$ sich paarweise nicht schneidende Einheitskugeln existieren, die mit der angegebenen Strecke innere Punkte oder Randpunkte gemeinsam haben. Die Vermutung von L. Fejes Tóth, nach der die Anzahl der Kugeln mit der obigen Eigenschaft im d-dimensionalen euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^d\,(d>3)$ nicht grösser sein kann als im $\boldsymbol{E}^3$, hat Horváth [HJ 1972] bewiesen. Nach verschiedenen guten Konstruktionen hat Kertész [K 1982] das entsprechende Problem in der euklidischen Ebene gelöst.

Mathematics Subject Classification: 52C17.
Key words and phrases: packing of balls round a given cylinder, density.

Wir betrachten eine Gerade t statt der Strecke. Dann liegen die Einheitskugeln, die gemeinsame Punkte mit t haben, in einem Drehzylinder mit Radius 2 und mit der Achse t. Wir können also das Problem so erklären: Man bestimme die dichteste Packung von Einheitskugeln im $\boldsymbol{E}^d$ ($d \geq 3$), die in einem Drehzylinder mit Radius 2 liegen. Horváth [HJ 1972] hat solche Packungen von Einheitskugeln im $\boldsymbol{E}^d$ ($d \geq 3$) untersucht, wobei die Kugeln in einem Drehzylinder mit Radius r sind. Er hat die dichtesten Packungen für $r \in [1, 2]$ bestimmt.

Eine Verallgemeinerung der ursprünglichen Aufgabe ist die folgende. Es sei eine Drehzylinderfläche im $\boldsymbol{E}^3$ gegeben. Wir betrachten alle möglichen Packungen von kongruenten Kugeln, wobei die Kugeln die Zylinderfläche vom aussen berühren und wir suchen die dichtesten Packungen (vgl. Dichtedefinition in 2).

In dieser Arbeit geben wir eine obere Abschätzung für die Dichten der obigen Kugelpackungen (Satz 1) an, die in unendlich vielen Fällen genau ist. In den weiteren Fällen konstruieren wir günstige Packungen. Horváth hat die Konstruktionen in 2.3 angegeben und damit den Satz 2 bewiesen. Die Arbeit von Závoti ist die numerische Lösung des Problems im Zusammenhang mit der Gleichung (15). Die anderen Ergebnisse stammen von H. Temesvári.

2. Bezeichnungen, Grundbegriffe

Es bezeichne $Z(t, 1)$ die Zylinderfläche mit Radius 1 und mit der Achse t. Mit $G(r)$ bezeichnen wir eine Kugel mit Radius r. Es bezeichne $Z(t; 1, 1 + r)$ den durch $Z(t, 1)$ und $Z(t, 1 + r)$ begränzten Raumteil. Eine Packung von $G(r)$ in $Z(t; 1, 1 + r)$ wird als Packung von $G(r)$ um den Zylinder $Z(t, 1)$ genannt. Die Dichte $\sigma(G(r))$ einer Packung von $G(r)$ um $Z(t, 1)$ kann man auf gewöhnliche Weise (vgl. [FTL 1972]) erklären.

2.1. Wir projizieren die Punkte von $G(r)$ auf die Zylinderfläche $Z(t, 1)$ derart, dass die Projektionsgeraden Flächennormalen sind. Mit $K(r)$ bezeichnen wir das Projektionsbild von $G(r)$ auf $Z(t, 1)$. Es bezeichne $\sigma(K(r))$ die Dichte der Packung von $K(r)$ auf der Zylinderfläche $Z(t, 1)$. Es ist leicht zu beweisen, dass

$$\sigma(G(r)) = \sigma(K(r)) \frac{2r^2\pi}{2(1 + r)K(r)}, \tag{1}$$

wobei $K(r)$ auch den Flächeninhalt von $K(r)$ bezeichnet.

2.2. Die Menge von n Kugeln mit Radius r wird Kugelkrone genannt, wenn die Kugelmittelpunkte die Ecken eines regulären n-Ecks sind und die Kugeln eine Packung um $Z(t,1)$ bilden. (Die Ebene der Kugelmittelpunkte ist orthogonal zu t.) Mit $K(n,r)$ bezeichnen wir den obigen Typ von Kugelkronen. Die Kugelkronen $K_1(n,r)$ und $K_2(n,r)$ sind benachbart, wenn jede Kugel von $K_1(n,r)$ zwei der Kugeln von $K_2(n,r)$ berührt und die Kugelmittelpunkte der Kronen nicht in derselben Ebene liegen. Es sei $r_n \in \mathbb{R}^+$ die Zahl, für die jede Kugel von $K_2(n,r_n)$ die Ebene der Kugelmittelpunkte der benachbarten Kugelkrone $K_1(n,r_n)$ berührt. Nach Rechnungen ergibt sich

$$r_n = \frac{2\sin\frac{\pi}{2n}}{\sqrt{3}-2\sin\frac{\pi}{2n}}. \tag{2}$$

Mit $P(r_n)$ bezeichnen wir die Packung um $Z(t,1)$, die aus Kugelkronen vom Typ $K(n,r)$ besteht, wobei jede Kugelkrone zwei benachbarte Kugelkronen hat.

Es sei $a = \frac{r}{1+r}$. Aus (2) erhält man

$$a_n = \frac{r_n}{1+r_n} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Satz 1. *Die Dichte* (1) *einer Packung von Kugeln mit Radius* r *um den Zylinder* $Z(t,1)$ *ist nicht grösser als*

$$\frac{a\pi}{6\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a} \tag{3}$$

mit $a = \frac{r}{1+r}$. *Die extremale Dichte tritt für* $r = r_n$ *bei den Packungen* $P(r_n)$ *ein.*

Wir bemerken, dass die Dichtefunktion (3) streng monoton fallend ist. Im Fall $a \to 0$ $(r \to 0)$ strebt die Dichte gegen $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.604599788\ldots$.

2.3. Im folgenden geben wir eine untere Abschätzung für die dichtesten Packungen herum den Zylinder $Z(t,1)$.

2.3.1. Es sei $n \geq 2, r_{n+1} < r < r_n$ $(a_{n+1} < a < a_n)$. Mit $P_1(r)$ bezeichnen wir die Packung von $G(r)$ um $Z(t,1)$, die aus Kugelkronen vom Typ $K(n+1,r)$ besteht, wobei jede Krone genau zwei benachbarte Kugelkronen hat. Die Dichte von $P_1(r)$ bezüglich $Z(t;1,1+r)$ ist

$$d_1(n,a) = \frac{(n+1)a^2}{6\sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}}.$$

2.3.2. Es sei wieder $n \geq 2$, $r_{n+1} < r < r_n$. Wir betrachten eine Kugelkrone vom Typ $K(n,r)$. Die benachbarte Kugelkrone entsteht durch Anwendung einer Schraubung mit Achse t und Winkel $\frac{\pi}{n}$. Die benachbarte Krone existiert für $n \geq 7$ ($r \leq r_7$) immer, für $2 \leq n \leq 6$ nur im Fall, wenn $r > r_n^*$ mit

$$a_n^* = \frac{r_n^*}{1 + r_n^*} = \sin \frac{\pi}{2n} \tag{4}$$

gilt.

Die nächste (dritte) Kugelkrone wird derart herumgelegt, dass jede Kugel dieser neuen Krone je eine Kugel der ersten und der zweiten Krone berührt. Die vierte Kugelkrone entsteht wie die zweite. Wegen den Bedingungen für die Kugelradien schneiden sich die Kugeln der zweiten und der vierten Kugelkrone nicht. Die Konstruktion der weiteren Kugelkronen um den ganzen Zylinder ist klar. Diese Packung von $G(r)$ um $Z(t,1)$ wird mit $P_2(r)$ bezeichnet. Die Dichte der Packung $P_2(r)$ bezüglich $Z(t;1,1+r)$ ist

$$d_2(n,a) = \frac{na^2}{3\sqrt{a^2 - \sin^2 \beta}}, \tag{5}$$

wobei der Winkel β die Lösung der Gleichung

$$\sqrt{a^2 - \sin^2 \beta} = \sqrt{a^2 - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} - \beta\right)} + \sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\pi}{2n}} \tag{6}$$

mit $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ ist.

Es sei $r_{n+1} < r \leq r_n^*$ und $2 \leq n \leq 6$. Für diese Kugelradien existiert eine Kugelkrone vom Typ $K(2n,r)$. Mittels Anwendung der Schraubung mit Achse t und Winkel $\frac{\pi}{2n}$ konstruieren wir die benachbarte Krone, die für die obigen r und n existiert. Auf ähnliche Weise bilden wir die weiteren benachbarten Kugelkronen. Die entstehende Packung $P_3(r)$ ist eine

Packung von $G(r)$ um $Z(t,1)$. Die Dichte der Packung $P_3(r)$ bezüglich $Z(t;1,1+r)$ ist

$$d_2^*(n,a) = \frac{na^2}{3\sqrt{a^2 - \sin^2\frac{\pi}{4n}}}. \tag{7}$$

Satz 2. *Die Dichte der dichtesten Packungen von Kugeln mit Radius r um $Z(t,1)$ ist in den Fällen $n \geq 7$, $r_{n+1} \leq r \leq r_n$ und $2 \leq n \leq 6$, $r_n^* < r \leq r_n$ mindestens*

$$\max(d_1(n,a), d_2(n,a))$$

mit $a = \frac{r}{1+r}$. Wenn $2 \leq n \leq 6$, $r_{n+1} \leq r \leq r_n^*$ gilt, dann ist die extremale Dichte mindestens

$$\max(d_1(n,a), d_2^*(n,a)).$$

Die Behauptung des Satzes ist eine einfache Folgerung der Konstruktionen in 2.3.1 und 2.3.2.

3. Hilfssätze

Beim Beweis des Satzes 1 brauchen wir einige Hilfssätze.

Es sei $a \in]0,1[$ eine reelle Zahl. Der durch die Kurve $y^2 + \sin^2 x = a^2$ begrenzte Bereich $\boldsymbol{T}$ ist konvex und die Koordinatenachsen sind seine Symmetrieachsen.

Es bezeichne $P_1, P_2, \ldots, P_6$ die Ecken des affin regulären Sechsecks $\boldsymbol{H}$, das dem Bereich $\boldsymbol{T}$ einbeschrieben ist. Es seien P_1, P_2 und P_3 die Ecken von $\boldsymbol{H}$ mit nichtnegativen Ordinaten. Ihre Spiegelbilder am Anfangspunkt O des Koordinatensystems sind P_4, P_5 bzw. P_6. Wir bezeichnen mit $T(\boldsymbol{H})$ den Inhalt des Sechsecks $\boldsymbol{H}$. Zwei spezielle affin reguläre Sechsecke werden definiert (Abb. 1). Die Ecken des Sechsecks $\boldsymbol{H}^0$ sind $P_1^0\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{a}{2}\right)$, $P_2^0(0;a)$, $P_3^0\left(-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{a}{2}\right)$ und die Spiegelbilder an O. Das Sechseck $\boldsymbol{H}^1$ ist durch die Punkte $P_1^1\left(\frac{\arcsin a}{2}; \sqrt{\frac{2a^2-1+\sqrt{1-a^2}}{2}}\right)$, $P_2^1\left(-\frac{\arcsin a}{2}; \sqrt{\frac{2a^2-1+\sqrt{1-a^2}}{2}}\right)$, $P_3^1(-\arcsin a; 0)$ und ihre Spiegelbilder an O bestimmt.

Hilfssatz 1. *Der Inhalt von $\boldsymbol{H}^0$ ist kleiner als der Inhalt von $\boldsymbol{H}^1$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$T(O\,P_1^0\,P_2^0\,P_3^0) < T(O\,P_1^1\,P_2^1\,P_3^1). \tag{8}$$

Die Ungleichung (8) ist mit der Ungleichung

$$a\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) < \arcsin\sqrt{\frac{2a^2-1+\sqrt{1-a^2}}{2}}, \quad a \in \,]0,1[,$$

d.h. mit

$$0 < -\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin b\right) + b\sqrt{\frac{2\sin^2 b - 1 + \cos b}{2\sin^2 b}} = F(b),\ \ b \in \,]0,\tfrac{\pi}{2}[\tag{9}$$

äquivalent, wobei $b = \arcsin a$ ist.

Es ist zu beweisen, dass die Funktion $b \mapsto F(b)$, $b \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wächst und $\lim_{b\to 0^+} F(b)$ ist, was die Richtigkeit der Behauptung zeigt. □

Abbildung 1

Hilfssatz 2. *Die Koordinaten der benachbarten Ecken $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ mit $y_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ (Abb. 1) eines dem Bereich $\boldsymbol{T}$ einbeschriebenen affin regulären Sechsecks $\boldsymbol{H}$ erfüllen die Gleichungen*

$$x_2 = x_1 + x_3 \quad \textit{und} \quad y_2 = y_1 + y_3. \tag{10}$$

Wenn

$$x_1 \in \left[\frac{1}{2}\arcsin a, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]$$

ist, dann gelten

$$x_2 \in \left[-\frac{1}{2}\arcsin a, 0\right] \quad \textit{und} \quad x_3 \in \left[-\arcsin a, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a\right].$$

Beweis. Das Sechseck $\boldsymbol{H}$ ist affin regulär, deshalb gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3}$, d.h. die Gleichungen (10).

Auf Abb. 1 haben wir auch die Ecken der Sechsecke $\boldsymbol{H}^0$ und $\boldsymbol{H}^1$ angegeben. Die Ecken P_1, P_2, P_3 des Sechsecks $\boldsymbol{H}$ liegen auf dem kürzeren Bogen $P_1^0 P_3^1$ der Kurve $y^2 + \sin^2 x = a^2$. Falls (10) gilt, d.h. $P_1 \in P_1^0 P_1^1$, dann liegen P_2 und P_3 auf dem kürzeren Bogen $P_1 P_3^1$ und es gilt $y_1 = \frac{a}{2}$. Die Ordinate des Vektors $\overrightarrow{P_3P_2}$ ist grösser oder gleich $\frac{a}{2}$, weil $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_3P_2}$. Folglich liegt P_3 auf $P_3^1 P_3^0$, d.h. $x_3 \in \left[-\arcsin a, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]$. Auf ähnliche Weise beweist man $x_2 \in \left[-\frac{1}{2}\arcsin a, 0\right]$. □

Hilfssatz 3. *Das Sechseck $\boldsymbol{H}^0$ besitzt den kleinstmöglichen Inhalt unter den affin regulären Sechsecken, die dem Bereich $\boldsymbol{T}$ einbeschrieben sind.*

Beweis. Es gilt $T(\boldsymbol{H}) = 3T(OP_1P_2P_3)$. Wir dürfen die Punkte $(i = 1, 2, 3)$ derart wählen, dass $y_i \geq 0$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} T(OP_1P_2P_3) &= |\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2}| = |x_1y_2 - y_1x_2| \\ &= x_1\sqrt{a^2 - \sin^2 x_2} - x_2\sqrt{a^2 = \sin^2 x_1}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Aus (10) und Hilfssatz 2 ergibt sich

$$\sqrt{a^2 - \sin^2(x_2 - x_1)} = \sqrt{a^2 - \sin^2 x_2} - \sqrt{a^2 - \sin^2 x_1} \tag{12}$$

wobei

$$a \in]0,1[, \quad \frac{\arcsin a}{2} \le x_1 \le \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad x_1 - \arcsin a \le x_2 \le 0.$$

Zwecks Bestimmung des einbeschriebenen affin regulären Sechsecks vom kleinstmöglichen Inhalt geben wir das absolute Minimum der Funktion zweier Veränderlichen

$$\begin{gathered} T(x_1,x_2) = x_1\sqrt{a^2 - \sin^2 x_2} - x_2\sqrt{a^2-\sin^2 x_1}, \\ a \in]0,1[,\ x_1 \in \left[\frac{\arcsin a}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a\right],\ x_2 \in [x_1 - \arcsin a, 0] \end{gathered} \tag{13}$$

unter der Bedingung (12) an.

Aus Symmetriegründen folgt, dass die Sechsecke $\boldsymbol{H}^0$ und $\boldsymbol{H}^1$ lokal extremal sind. Ist $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ eine lokale Extremumstelle der Funktion $T(x_1,x_2)$ unter der Bedingung

$$\varphi(x_1,x_2) = \sqrt{a^2 - \sin^2(x_2 - x_1)} - \sqrt{a^2 - sin^2 x_2} + \sqrt{a^2 - \sin^2 x_1} \equiv 0,$$

dann existiert eine reelle Zahl q, so dass

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \tag{14}$$

für die Funktion $\phi(x_1,x_2) = T(x_1,x_2) + q\varphi(x_1,x_2)$ an der Stelle $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ gelten. Aus (14) ergeben sich als mögliche Extrema die Sechsecke $\boldsymbol{H}^0$ und $\boldsymbol{H}^1$. Für ein weiteres beliebiges Extremum gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\cos x_1}{\sqrt{a^2-\sin^2 x_1}} \frac{\cos x_2}{\sqrt{a^2-\sin^2 x_2}} \frac{x_1 - x_2}{\sin(x_1 - x_2)} \\ &\quad + \frac{\cos x_2}{\sqrt{a^2-\sin^2 x_2}} \frac{\cos(x_1-x_2)}{\sqrt{a^2 - \sin^2(x_1-x_2)}} \frac{x_1}{\sin x_1} \\ &\quad - \frac{\cos x_1}{\sqrt{a^2-\sin^2 x_1}} \frac{\cos(x_1-x_2)}{\sqrt{a^2 - \sin^2(x_1-x_2)}} \frac{x_2}{\sin x_2} = 2. \end{aligned} \tag{15}$$

Závoti und Horváth haben mit einer Methode der numerischen Analysis bewiesen, dass die Gleichung (15) für ein weiteres beliebiges Extremum keine Lösung hat. Wir gehen in die Einzelheiten nicht ein, sondern erwähnen nur, dass der Algorithmus “rtsafe” in [PTVF 1992] bei der Lösung der nichtlinearen Gleichung (12) angewandt wurde.

Das bedeutet aber, auch den Hilfssatz 1 in Betracht genommen, dass die Funktion (13) unter der Bedingung (12) sein Minimum für das affin reguläres Sechseck $\boldsymbol{H}^0$ annimmt. □

4. Beweis des Satzes

Wir betrachten eine beliebige Packung von $G(r)$ um den Zylinder $Z(t, 1)$. Es bezeichne M den Mittelpunkt von $G(r)$ und O den Berührungspunkt von $G(r)$ und $Z(t, 1)$.

Abbildung 2

Ein kartesisches Koordinatensystem mit Anfangspunkt O wird derart gewählt, dass die Achse y eine Erzeugende von $Z(t, 1)$ ist. Die Abbildung 2 zeigt das Projektionsbild auf einer zu t senkrechten und durch O hindurchgehenden Bildebene, wobei die Projektionsgeraden parallel zu t sind. Die Bildpunkte werden mit Strich bezeichnet. Die Punkte der Kugel $G(r)$ werden mit den Flächennormalen von $Z(t, 1)$ auf die Zylinderoberfläche projiziert. Es sei $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}; \overline{z})$ ein Punkt der Kugeloberfläche $G(r)$, in dem die projizierende Flächennormale von $Z(t, 1)$ die Tangente von $G(r)$ ist. Der Punkt $\overline{P}'$ ist ein Randpunkt des Projektionsbildes $K(r)$

von $G(r)$ auf $Z(t,1)$. Es bezeichne α den Winkel $M't'\overline{P}'$. Im rechtwinkigen Dreieck $M't'\overline{P}'$ gilt

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - \overline{y}^2}}{1+r}. \tag{16}$$

Nach der Abwicklung von $Z(t,1)$ in die Koordinatenebene xy ist $P_L(x;y;0)$ die Verebnung des Projektionsbildes von $\overline{P}$. Auf Grund von (16) und $x = \alpha$, $y = \overline{y}$ gilt

$$\sin^2 x + \left(\frac{y}{1+r}\right)^2 = a^2 \tag{17}$$

mit $a = \frac{r}{1+r}$. Diese Kurve begrenzt den Bereich $K_L(r)$, dessen Symmetrieachsen die Koordinatenachsen x und y sind.

Abbildung 3

Nach der Projektion der Packung von $G(r)$ um $Z(t,1)$ entsteht eine Packung von $K(r)$ auf $Z(t,1)$. Das Problem der dichtesten Packung von

$G(r)$ um $Z(t,1)$ führt zum Problem der dichtesten Packung von $K(r)$ auf $Z(t,1)$. Die Verebnung der Zylinderoberfläche ist ein Streifen $\boldsymbol{S}$ von der Breite 2π. Mit entsprechenden Verschiebungen von $\boldsymbol{S}$ entsteht eine Packung von $K_L(r)$ in der ganzen Ebene, deren Dichte gleich der Dichte der ursprünglichen Packung von $G(r)$ um $Z(t,1)$ ist. Diese Dichte ändert sich nicht, wenn wir die orthogonale Affinität mit Achse x und mit Verhältnis $\frac{1}{1+r}$ anwenden. Dann entsteht nach (17) eine Packung von $\boldsymbol{T}$ (vgl. 3.) mit derselben Dichte. Der Bereich $\boldsymbol{T}$ ist aber ein konvexer zentralsymmetrischer Bereich und auf Grund eines Satzes von L. Fejes Tóth [FTL 1965, Seite 159] kann diese Dichte nicht grösser als die Dichte der dichtesten gitterförmigen Packung von $\boldsymbol{T}$ sein. Es sei Γ das Gitter der Packung mit den Basisvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ (Abb. 3). Nach einem anderen wohlbekannten Satz von L. Fejes Tóth [FTL 1972, Seite 86] berühren sechs andere Exemplare der Bereiche in der gitterförmigen Packung mit maximaler Dichte den Bereich $\boldsymbol{T}$ wie es auf Abb. 3 sichtbar ist. Die Berührungpunkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 bilden ein einbeschriebenes zentralsymmetrisches Sechseck von kleinstmöglichem Inhalt. Nach Hilfssatz 3 ist $\boldsymbol{H}^0$ dieses extremale Sechseck. Eine mögliche Basis des extremalen Gitters Γ^0 ist $\overrightarrow{OA_0}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a, a\right)$, $\overrightarrow{OB_0}\left(-2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a, a\right)$.

Mit Hilfe der maximalen Dichte der gitterförmigen Packungen von $\boldsymbol{T}$ kann man für die Dichte (1) der Packung von $G(r)$ um $Z(t,1)$ die obere Abschätzung (3) angeben.

Zu den in der Ebene extremalen gitterförmigen Packungen gehören nicht immer Packungen von $G(r)$ um $Z(t,1)$. Für die natürlichen Zahlen $n \geq 2$, wobei $4n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\pi$ gilt (vgl. (2)), existieren aber Kugelpackungen. Die entsprechenden Kugelpackungen $P(r_n)$ sind nämlich extremal.

Literaturverzeichnis

[FTL 1965] L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, *Akadmiai Kiadó*, *Budapest*, 1965.

[FTL 1972] L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, *Springer Verlag*, *Berlin–Heidelberg–New York*, 1972.

[HJ 1972] J. Horváth, The densest packing of unit spheres in an n-dimensional cylinder, *Ann. Univ. Sci. Bp. Sect. Math.* **XV.** (1972), 139–143. (in *Russian*)

[K 1982] G. Kertész, On the problem of parasites, Dissertation, *Budapest*, 1982. (in *Hungarian*)

[PTVF 1992] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterliny and B. P. Flannery, Numerical Recipes, *Cambridge*, 1992.

J. HORVÁTH
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT SOPRON
H–9400 SOPRON
UNGARN
E-mail: jhorvath@emk.nyme.hu

Á. H. TEMESVÁRI
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT SOPRON
H–9400 SOPRON
UNGARN
E-mail: hta@emk.nyme.hu

J. ZÁVOTI
GEODÄTISCHES UND GEOPHYSIKALISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
FORSCHUNGSZENTRUM FÜR GEOWISSENSCHAFTEN
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
H–9400 SOPRON
UNGARN
E-mail: zavoti@ggki.hu

(Received June 28, 1999; revised October 4, 2000)