Publ. Math. Debrecen
42 / 3–4 (1993), 333–345

Vollisotrope Kreisschiebzykliden des Flaggenraumes

Von G. S. KARÁNÉ (Budapest)

Herrn Professor Lajos Tamássy zum 70. Geburtstag gewidmet

Abstract. A flag space is a three-dimensional affine space with an absolute $\{\omega,\ f,\ F\}$ where f is a line in the plane of infinity ω and F a point of f (Brauner [1]–[3]). A cyclide is a surface of order 4 that intersects ω only at f. In this paper we investigate all cyclides generated by translation of a circle in a full isotropic plane. We give normal-forms and CAD (Computer Aided Design) pictures of these surfaces.

§1. Aus der Geometrie des Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ und die Zykliden

Die Geometrie des Flaggenraumes (zweifach isotropen Raumes) wurde erstmals systematisch von H. Brauner (vgl. [1]–[3]) studiert und von H. Sachs in zahlreichen Arbeiten weiterentwickelt. Wir bezeichnen i.f. mit $P_3(\mathbf{R})$ den *dreidimensionalen reellen projektiven Raum,* und beschreiben seine Punkte mittels *projektiver Koordinaten* $(x_0{:}x_1{:}x_2{:}x_3) \neq (0{:}0{:}0{:}0)$.

In $P_3(\mathbf{R})$ wirkt die 15-parametrige *Gruppe der Projektivitäten*

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \rho\bar{x}_0 = \alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2 + \alpha_{03}x_3 \\ \rho\bar{x}_1 = \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ \rho\bar{x}_2 = \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ \rho\bar{x}_3 = \alpha_{30}x_0 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3, \end{cases}$$

wobei $\rho \neq 0$ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet und $\mathrm{Det}(\alpha_{ik}) \neq 0$ gilt. Die *Fernebene* ω von P_3 beschreiben wir durch $x_0 = 0$ und bezeichnen mit $A_3 := P_3 - \omega$ den *zugeordneten affinen Raum.* Punkte in A_3 werden durch *affine Koordinaten* $\{x, y, z\}$ festgelegt, wobei bekanntlich gilt

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}, \quad x_0 \neq 0. \tag{1.2}$$

Man gelangt zur Geometrie des zweifach isotropen Raumes (Flaggenraumes), indem man in $\omega \subset P_3$ eine *Absolutfigur* $\{\omega,\ f,\ F\}$ auszeichnet, die aus einer Geraden $f \subset \omega$ und einem Punkt $F \in f$ besteht. Die Gerade f heißt *absolute Gerade*, der Punkt F heißt *absoluter Punkt.* Alle projektiven Automorphien von $\{\omega,\ f,\ F\}$ bilden eine Gruppe, genannt *zweifach isotrope Ähnlichkeitsgruppe.*

Wird f durch $x_0{=}x_1{=}0$ beschrieben und F durch $F(0 : 0 : 0 : 1)$ festgelegt, dann läßt sich nach [1], S.119 diese zweifach isotrope Ähnlichkeistgruppe durch

$$\begin{cases} \bar{x} = c_1 + c_2 x \\ \bar{y} = c_3 + c_4 x + c_5 y \\ \bar{z} = c_6 + c_7 x + c_8 y + c_9 z \end{cases} \tag{1.3}$$

erfassen. Sie hängt von 9 freien Parametern ab und wird deshalb mit H_9 bezeichnet. Wir bezeichnen — wie üblich — die [xy]-Ebene als *Grundrißebene.* In dieser Ebene ($z = 0$) induziert (1.3) die Gruppe

$$\begin{cases} \bar{x} = c_1 + c_2 x \\ \bar{y} = c_3 + c_4 x + c_5 y, \end{cases} \tag{1.4}$$

d.h. *die allgemeine ebene isotrope Ähnlichkeitsgruppe* $\mathcal{G}_5$. Die dazugehörige ebene isotrope Geometrie wurde ausführlich in der Monagraphie [7] von H. Sachs betrachtet. Um Geometrie zu betreiben, ist die Gruppe (1.3) noch zu allgemein. Sie enthält jedoch als *Untergruppe die sechsparametrige Gruppe* ${B_6}^{(2)}$

$$\begin{cases} \bar{x} = c_1 + x \\ \bar{y} = c_2 + c_3 x + y \\ \bar{z} = c_4 + c_5 + c_6 y + z, \end{cases} \tag{1.5}$$

die man *Gruppe der zweifach isotropen Bewegungen* (vgl. [1], S.119) nennt. Ein affiner Raum A_3, in dem die Gruppe ${B_6}^{(2)}$ als *Fundamentalgruppe* wirkt, heißt ein *Flaggenraum* ${I_3}^{(2)}$ (*zweifach isotroper Raum*). Die zugehörige Geometrie heißt *zweifach isotrope Geometrie* (Geometrie des Flaggenraumes). Die Absolutfigur $\{\omega, f, F\}$ ist das Analogon zum *absoluten Kegelschnitt*

$$i_E : \quad x_0 = 0, \quad {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 0 \tag{1.6}$$

der euklidischen Geometrie.

Hinsichtlich der Punkte, Geraden und Ebenen sind die folgenden Begriffsbildungen von zentraler Bedeutung: Eine Ebene ε des ${I_3}^{(2)}$ heißt *nichtisotrop,* wenn sie F nicht enthält. Eine Ebene ε heißt *isotrop,* wenn $F \in \varepsilon$ gilt, aber $f \not\subset \varepsilon$. Eine Ebene ε heißt *vollisotrop,* wenn $f \subset \varepsilon$ gilt.

Nimmt man zu den drei Typen von Ebenen des ${I_3}^{(2)}$ noch die fernebene hinzu, so hat man demnach in ${I_3}^{(2)}$ 4 Arten von Kreisen zu unterscheiden: Ein *nichtisotroper Kreis* k ist ein Kegelschnitt in einer nichtisotropen Ebene ε, der die absolute Gerade f berührt. Ein *isotroper Kreis* ist ein Kegelschnitt in einer isotropen Ebene ε, der die absolute Gerade f berührt. Ein *vollisotroper Kreis* k ist ein Kegelschitt in einer vollisotropen Ebene ε, der dir absolute Gerade f im absoluten Punkt F berührt. Ein *Fernkreis* k ist ein Kegelschnitt in ω, der die absolute Gerade f in F berührt.

Unter einer *Zyklide* des dreidimensionalen *euklidischen Raumes* E_3 versteht man eine algebraische Fläche 4. Ordnung, welche den absoluten Kegelschnitt i_E als Doppelkurve enthält. Diese Definition läßt sich nach H. Sachs (vgl. [6]) unschwer auf den Flaggenraum ${I_3}^{(2)}$ übertragen: Unter einer *verallgemeinerten Zyklide des Flaggenraumes* ${I_3}^{(2)}$ versteht man eine irreduzible algebraische Fläche 4. Ordnung $\Phi^{(4)}$, welche die Fernebene ω nur nach der absoluten Geraden f schneidet. Unter einer *gewöhnlichen Zyklide* des ${I_3}^{(2)}$ versteht man eine Zyklide mit der Eigenschaft, daß für alle vollisotropen ebenen Schnitte die Gerade f eine *Doppelgrade* der Fläche ist.

Für die folgenden Überlegunden ist der in [6] eingeführte Begriff der Hauptachsenfläche wichtig: Ist $\Phi^{(4)}$ eine verallgemeinerte Zyklide, so schneidet jede vollisotrope Ebene ε die Fläche $\Phi^{(4)}$ nebst f nach einer Kurve 3. Ordnung $k^{(3)}$. Bestimmt man bezüglich $k^{(3)}$ den Polarkegelschnitt $k^{(2)}$ des Punktes F, so bilden alle diese Kegelschnitte $k^{(2)}$ — wenn ε das Ebenenbüschel um f durchläuft — eine Fläche Σ^* genannt Hauptachsenfläche der Zyklide. Ist $\Phi^{(4)}$ eine gewöhnliche Zyklide, dann schneidet jede vollisotrope Ebene ε die Fläche $\Phi^{(4)}$ nach der Doppelgeraden f und einem Kegelschnitt $c^{(2)}$. Bestimmt man bezüglich $c^{(2)}$ die Polare p des Punktes F, so bilden alle diese Polaren p — wenn ε das Ebenenbüschel um f durchläuft — eine Fläche Σ^*, genannt Hauptachsenfläche der Zyklide. Σ^* ist stets eine Fläche 2. Ordnung und isotrop invariant mit $\Phi^{(4)}$ verknüpft. Sie kann zur Klassifikation der Zyklyden $\Phi^{(4)}$ herangezogen werden. Wie Vl. Ščurić und H. Sachs in [11] gezeigt haben, existieren im projektive erweiterten Flaggenraum genau 70 Flächen 2. Ordnung und demnach gibt es in ${I_3}^{(2)}$ genau 70 *Haupttypen von Zykliden.*

§2. Bestimmung aller vollisotropen Kreisschiebzykliden

In diesem Abschnitt bestimmen wir alle irreduziblen Zykliden 4. Ordnung des $I_3{}^{(2)}$, die sich durch Schiebung eines *vollisotropen Kreises erzeugen* lassen; wir bezeichnen diese Zykliden als *Schiebzykliden vom Typ A*.

Ein in der vollisotropen Ebene $x = t$ gelegener Kreis k läßt sich in der Gestalt

$$\{x = t,\ z = Ry^2 + \alpha(t)y + \beta(t)\} \tag{2.1}$$

ansetzen. Er schneidet die $[xz]$-Ebene $y = 0$ in einem Punkt

$$P(t, o, \beta_{(t)}). \tag{2.2}$$

Die Tangente in P hat die Steigung $\dfrac{dz}{dy} = 2Ry + \alpha(t) \mid P_{(y=0)} = \alpha(t)$. Der Koeffizient $\alpha(t)$ ist somit der *isotrope Neigungswinkel* der Tangente in P an k gegen die $[xy]$-Ebene.

Wir zeigen zunächst, daß die gesuchten Lösungsflächen $\Phi^{(4)}$ gewöhnliche Zykliden 4. Ordnung sein müssen. Angenommen $\Phi^{(4)}$ wäre eine verallgemeinerte Zyklide, dann wäre f eine einfache Gerade für jede vollisotrope Schnittebene ε und ε würde $\Phi^{(4)}$ nebst (2.1) nocht nach einer Geraden g schneiden. Es gilt sicher $g \neq f$, denn andernfalls wäre f eine Doppelgerade bezüglich den vollisotropen ebenen Schnitte und $\Phi^{(4)}$ somit eine gewönliche Zyklide. Da dies für die Schar der parallelen vollisotropen Ebenen gilt, würde $\Phi^{(4)}$ dann in eine Regelfläche und eine Restfläche zerfallen, was wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität der Lösungsflächen ausgeschlossen ist. Wir können somit die in Frage kommenden Zykliden in der Gestalt

$$\begin{aligned} F \equiv{} & a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{102}xz^2 + a_{201}x^2z + \\ & + a_{120}xy^2 + a_{111}xyz + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + \\ & + a_{011}yz + a_{101}xz + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{000} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ansetzen. Jeder Schnitt mit einer vollisotropen Ebene $x = x_0$ liefert ja dann eine Kurve 2. Ordnung, so daß f eine Doppelgerade für diese ebenen Schnitte ist. Soll eine Kreisschiebzyklide vom Typ A vorliegen, so muß sich beim Einsetzen von (2.1) in (2.3) für jedes $x = t$ eine Identität in y einstellen. Man gewinnt explizit die Bedingung

$$
\begin{aligned}
&a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{102}x[R^2y^4 + \alpha^2y^2 + \beta^2 + \\
&+ 2R\alpha y^3 + 2R\beta y^2 + 2\alpha\beta y] + a_{210}x^2[Ry^2 + \alpha y + \beta] + \\
&+ a_{120}xy^2 + a_{111}xy[Ry^2 + \alpha y + \beta] + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + \\
&+ a_{002}[R^2y^4 + \alpha^2y^2 + \beta^2 + 2R\alpha y^3 + 2R\beta y^2 + 2\alpha\beta y] + \\
&+ a_{110}xy + a_{011}y[Ry^2 + \alpha y + \beta] + a_{101}x[Ry^2 + \alpha y + \beta] + \\
&+ a_{100}x + a_{010}y + a_{001}[Ry^2 + \alpha y + \beta] + a_{000} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Schreibt man (2.4) als Polynom 4. Grades in y, so müssen die einzelnen Koeffizienten dieses Polynoms verschwinden. Der Koeffizient bei y^4 lautet

$$R^2a_{102}x + R^2a_{002} = 0, \tag{2.5}$$

und das Verschwinden von (2.5) für jedes $x = t$ liefert

$$a_{102} = 0, \quad a_{002} = 0. \tag{2.6}$$

Wird dies berücksichtigt, so entsteht als Koeffizient bei y^3

$$Ra_{111}x + Ra_{011} = 0 \tag{2.7}$$

und man erhält daraus wie oben

$$a_{111} = 0, \quad a_{011} = 0. \tag{2.8}$$

Als Koeffizient bei y^2 stellt sich ein

$$Ra_{201}x^2 + a_{120}x + a_{020} + Ra_{101}x + Ra_{001} = 0, \tag{2.9}$$

woraus die 3 Bedingungen

$$a_{201} = 0,\ a_{120} + Ra_{101} = 0,\ Ra_{001} + a_{020} = 0 \tag{2.10 a–c}$$

fließen. Schließlich gewinnt man als Koeffizient bei y

$$a_{210}x^2 + a_{110}x + a_{101}\alpha x + a_{010} + a_{001}\alpha = 0 \tag{2.11}$$

und hieraus die Bedingungen

$$
\begin{gathered}
a_{210} = 0, \quad a_{110}\alpha + a_{101}\alpha = 0, \\
a_{010} + a_{001}\alpha = 0.
\end{gathered}
\tag{2.12 a–c}
$$

Das Absolutglied in (2.4) lautet

$$a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{200}x^2 + a_{101}x\beta + a_{100}x + a_{001}\beta + a_{000} = 0. \tag{2.13}$$

Gilt in den Gleichungen (2.12 b,c) daß $(a_{101},\ a_{001}) \neq (0,0)$ gilt, dann kann man daraus folgern, daß α eine Konstante ist, da ja a_{110} und a_{101} bzw. a_{010} und a_{001} Konstanten sind. Da $\alpha(t)$ damit nicht von der Lage der vollisotropen Trägerebene von k abhängt, kann man wegen $\dfrac{dz}{dy} = \alpha$ durch eine isotrope Bewegung (1.5) erreichen, daß $\alpha = 0$ wird. Die Tangenten an k in den Punkten P sind dann parallel zur neuen $[xy]$-Ebene. Damit ergibt sich aus (2.12 b,c) noch

$$a_{110} = 0, \quad a_{010} = 0. \tag{2.14}$$

Werden die Bedingungen (2.6), (2.8), (2.10 a–c), (2.12a) und (2.14) in die Flächengleichung (2.3) eingesetzt, so erhält man

$$F \equiv a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{200}x^2 + a_{000} + (a_{101}x + a_{001})(z - Ry^2) = 0. \tag{2.15}$$

Berücksichtigt man in (2.1) die Bedingung $\alpha{=}0$, so liefert $z{=}Ry^2{+}\beta$, d.h. $\beta = z - Ry^2$ in (2.13) eingesetzt gerade (2.15), d.h. die noch ausstehende Nebenbedingung wird durch (2.15) erfüllt. Die Flächen (2.15) sind somit *Lösungsflächen des Problems.*

Der bisher ausgeschlossene Sonderfall $a_{101} = 0$, $a_{001} = 0$ muß noch betrachtet werden. Werden die Nebenbedingungen (2.6), (2.8), (2.10 a), (2.12 a) und $a_{101} = a_{001} = 0$ in (2.3) eingesetzt, so entsteht der Zylinder 4. Ordnung

$$\begin{aligned} F \equiv{} & a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{200}x^2 + a_{100}x + a_{000} + a_{120}xy^2 + \\ & + a_{020}y^2 + a_{110}xy + a_{010}y = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Schnitte von (2.16) mit vollisotropen Ebenen $x =$ konst. bestehen aber über $\mathbb{C}$ aus 4 z-parallel Erzeugenden, d.h. keinen vollisotropen Kreisen. Somit liefert (2.16) keine Kreisschiebzykliden. Damit haben wir den $\dfrac{dz}{dy} = \alpha$ durch eine isotrope Bewegung (1.5) erreichen, daß $\alpha = 0$ wird. Die Tangenten an k in den Punkten P sind dann parallel zur neuen $[xy]$-Ebene. Damit ergibt sich aus (2.3) noch

$$F \equiv a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{200}x^2 + a_{000} + (a_{101} + a_{001})\ (z - Ry^2) = 0. \tag{2.17}$$

Berücksichtigt man in (2.1) die Bedingung $\alpha = 0$, so liefert $\beta = z - Ry^2$ d.h. die noch ausstehende Nebenbedingung wird durch (2.17) erfüllt. Die Flächen (2.17) sind somit *Lösungsflächen des Problems.* Damit haben wir den

Satz 2.1. *Die einzigen Kreisschiebzykliden des Flaggenraumes* $I_3{}^{(2)}$*, die sich durch Schiebung eines vollisotropen Kreises erzeugen lassen sind die Flächen* (2.17)

Eine *Schiebfläche* entsteht nach [13], S. 55 durch Verschiebung einer *Raumkurve* $k \ldots \vec{y} = \vec{y}(u)$ längs einer *Leitkurve* $\ell \ldots \vec{z} = \vec{z}(t)$, wobei sich k und ℓ in der Ausgangslage schneiden müssen. Eine Schiebfläche besitzt daher eine Parameterdarstellung der Gestalt

$$\vec{x}(u,t) = \vec{y}(u) + \vec{z}(t). \tag{2.18}$$

Eine ausführliche Behandlung der Schiebflächen findet man in [12]. Setz man im vorliegenden Fall $x = t$, $y = u$, so folgt aus (2.17)

$$z = Ru^2 - \frac{p_4(t)}{a_{101}t + a_{001}}, \tag{2.19}$$

wobei abkürzend $p_4(t) := a_{400}t^4 + a_{300}t^3 + a_{200}t^2 + a_{100}t + a_{000}$ gesetzt wurde. Die Division in (2.19) ist zulässig, denn für $a_{101} = a_{001} = 0$ vereinfacht sich (2.15) zu

$$F \equiv a_{400}x^4 + a_{300}x^3 + a_{200}x^2 + a_{100}x + a_{000} = 0. \tag{2.20}$$

und diese Gleichung stellt über $\mathbb{C}$ 4 vollisotrope Ebenen dar — ein Fall der weiter nicht interessiert. Insgesamt gewinnt man daher mit (2.19) die Flächendarstellung

$$\vec{x}(u,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ Ru^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -\dfrac{p_4(t)}{a_{101}t + a_{001}} \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

womit die Lösungsflächen (2.15) als Schiebflächen nachgewiesen sind. Eine zu den vollisotropen Schiebkreisen k *konjugierte Leitkurve* ist die Kurve

$$\left\{ x = t,\ z = -\frac{p_4(t)}{a_{101}t + a_{001}} \right\}, \quad \text{d.h.} \tag{2.22}$$

$$p_4(x) + z(a_{101}x + a_{001}) = 0. \tag{2.23}$$

Dies ist die Schnittkurve von $\Phi^{(4)}$ mit der Ebene $y = 0$. Da k eine ebene Kurve ist, gehören die Kreisschiebzykliden in die spezielle Klasse der *Rückungsflächen,* die im Bauwesen eine bedeutende Rolle spielen. Wie in [6] gezeigt erhält man die Gleichung der Hauptachsenfläche Σ^*, in dem man die Zyklidengleichung partiell nach z differenziert. Aus (2.15) folgt $\dfrac{\partial F}{\partial z} =$

$a_{101}x + a_{001} = 0$. Somit ist für $a_{101} = 0$, $a_{001} \neq 0$ die *Hauptachsenfläche* Σ^* die *Fernebene,* während sich für $a_{101} \neq 0$ eine *vollisotrope Ebene* als Hauptachsenfläche ergibt. Im ersten Fall bezeichnen wir die Schiebzyklide als vom **Typ A I**, im zweiten Fall als vom **Typ A II**. Im ersten Fall kann man nach Division der Flächengleichung mit $a_{001} \neq 0$ und nach einer ersichtlichen Umbezeichnung die Darstellung

$$z = Ry^2 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \tag{2.24}$$

erreichen. Im *zweiten Fall* kann man durch eine Schiebung in x-Richtung $a_{001} = 0$ erreichen, und nach einer Umbezeichung der Koeffizienten erhält man die Flächengleichung

$$z = Ry^2 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 + \frac{d_0}{x}. \tag{2.25}$$

Wir vermerken den

Satz 2.2. *Die Kreisschiebzykliden* (2.15) *vom Typ A zerfallen in die Unterklassen* A I *und* A II. *Im ersten Fall ist die Fernebene die Hauptachsenfläche und der Flächentyp läßt sich durch* (2.24) *beschreiben. Im zweiten Fall ist die Hauptachsenfläche eine vollisotrope Ebene; dieser Flächentyp läßt sich durch* (2.25) *beschreiben. Beide Flächentypen sind Schiebflächen im Sinne der Differentialgeometrie, wobei die Schnittkurve mit der Ebene* $y = 0$ *eine Leitkurve der Schiebfläche ist.*

§3. Die Kreisschiebzykliden vom Typ A I

Gilt in (2.24) $b_4 = 0$, dann liegt eine *Kreisschiebzyklide* 3. Ordnung vor. Wir setzen i.f. stets $b_4 \neq 0$ voraus. Die Leitkurve der Schiebfläche ist dann die *biquadratische Parabel*

$$z = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \tag{3.1}$$

in der isotropen Ebene $y = 0$. Nach [14], S. 171 läßt sich (3.1) auf die Normalform

$$z = Ax^2 + Bx^4 \tag{3.2}$$

transformieren, wobei auch $A = 0$ gelten kann. Im letzten Fall liegt eine *reine Parabel* 4. Ordnung vor und der Punkt $S(0, 0)$ ist ein *Flachpunkt.* Die Konstante B in der Gleichung $z = Bx^4$ ist eine *geometrische Größe,* wie in [8], S. 381 gezeigt wurde und läßt sich somit durch keine Transformation der Gruppe ${B_6}^{(2)}$ beseitigen. Aus (2.24) und (3.2) folgt somit, daß sich die Kreisschiebzykliden vom Typ A I auf die *Normalform*

$$y = Ry^2 + Ax^2 + Bx^4 \tag{3.3}$$

transformieren lassen. Die Fläche (3.3) für $A = 0$ bezeichnen wir als Schiebzyklide vom Typ A I 1, während wir die Fläche (3.3) für $A \neq 0$ als Schiebzyklide vom Typ A I 2 bezeichnen. Wir fassen dies zusammen im

Satz 3.1. *Die Kreisschiebzykliden vom* Typ A I *umfassen 2 Arten. Die Art* A I 1 *besitzt die Gleichung* $z = Ry^2 + Bx^4$ *und ensteht durch Schiebung des vollisotropen Kreises* $z = Ry^2$ *längs einer reinen Parabel* $z = Bx^4$. *Die Art* A I 2 *besitzt die Gleichung* (3.3) *und entsteht durch Schiebung des vollisotropen Kreises* $z = Ry^2$ *längs der biquadratischen Parabel* $z = Ax^2 + Bx^4$. *Die in* (3.3) *verbleibenden Konstanten* R, A *und* B *besitzen geometrische Bedeutung.*

Die Abbildung 1 zeigt eine axonometrische Darstellung einer Zyklide vom Typ A I 1.

Abbildung 1

Abbildung 2

Die Abbildung 2 zeigt eine axonometrische Darstellung einer Zyklide vom Typ A I 2.

§4. Die Kreisschiebzykliden vom Typ A II

Gilt in (2.25) $d_0 = 0$, so liegt die schon unter a) erwähnte Schiebzyklide 3. Ordnung vor. Sei also i.f. stets $d_0 \neq 0$. Die Leitkurve ℓ in der Ebene $y = 0$ besitzt dann die Darstellung

$$zx = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{4.1}$$

wobei eine ersichtliche Umbezeichung der Koeffizienten in der Darstellung (2.25) vorgenommen wurde. Die Kurve (4.1) ist eine *vollständig zirkuläre Kurve 4. Ordnung* der isotropen $[xz]$ – Wir bezeichnen eine Kurve der Gestalt (4.1) als *Pseudo-Tridens* 4. Ordnung. Wenden wir zunächst auf (4.1) die ebene isotrope Bewegung

$$\{x = \bar{x},\ z = \bar{z} + a_2\bar{x} + a_1\} \tag{4.2}$$

an, dann entsteht $\bar{x}\bar{z} + a_2\bar{x}^2 + a_1\bar{x} = a_4\bar{x}^4 + a_3\bar{x}^3 + a_2\bar{x}^2 + a_1\bar{x} + a_0$, d.h.

$$\bar{x}\bar{z} = a_4\bar{x}^4 + a_3\bar{x}^3 + a_0. \tag{4.3}$$

Abbildung 3

Nach Rückkehr zur alten Bezeichnung hat man damit

$$z = a_4 x^3 + a_3 x^2 + \frac{a_0}{x}. \tag{4.4}$$

Die Kurve $y = a_4 x^3 + a_3 x^2$ schneidet (4.4) nicht im Endlichen. Es handelt sich um eine *kubische Parabel,* d.h. ebenfalls um eine vollständig zirkuläre Kurve (vgl. [12], S. 39) und somit ist sie nach [13] eine *asymptotische* Kurve. Um diese kubische Parabel und damit (4.4) auf Normalform zu transformieren, wenden wir auf (4.4) die ebene isotrope Bewegung $\{x = \bar{x} - \frac{a_3}{3a_4},\ z = \bar{z} - \frac{{a_3}^2}{3a_4}\bar{x} + \frac{2{a_3}^2}{27{a_4}^2}\}$ an und erhalten wir als *Normalform* von (4.1), nach Rückkehr zur alten Bezeichnung

$$z = Ax^3 + \frac{B}{x - C}, \quad A \neq 0,\ B \neq 0. \tag{4.5}$$

Bei der Kurve (4.5) sind zwei Fälle zu unterscheiden. Gilt $C = 0$, dann enthält die isotrope Gerade ℓ den Wendepunkt W der kubischen Parabel

Abbildung 4

$k^{(3)}$ und die erzeugte Kurve (4.5) ist *zentralsymmetrisch* zum Wendepunkt W von $k^{(3)}$. Gilt $C \neq 0$, dann liegt W nicht auf ℓ und die Kurve (3.33) ist zu W nicht zentralsymmetrisch. Aus (2.25) und (4.5) folgt nunmehr als Normalform der *Kreisschiebzykliden* vom Typ A II

$$z = Ry^2 + Ax^3 + \frac{B}{x-C}, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0. \tag{4.6}$$

Eine Zyklide (4.6) mit $C = 0$ bezeichnen wir als vom Typ A II 1, während wir Flächen mit $C \neq 0$ als vom Typ A II 2 klassifizieren. Wir fassen dies zusammen im

Satz 4.1. *Die Kreisschiebzykliden vom Typ* A II *umfassen 2 Arten. Die Art* A II 1 *besitzt die Gleichung* $z = Ry^2 + Ax^3 + B/x$ *und entsteht durch Schiebung des vollisotropen Kreises* $z = Ry^2$ *längs des Pseudo-Tridens 4. Ordnung* $z = Ax^3 + B/x$*. Die Art* A II 2 *besitzt die Gleichung* (4.6) *und entsteht durch Schiebung des vollisotropen Kreises* $z = Ry^2$ *längs der vollständig zirkulären Kurve 4. Ordnung* $z = Ax^3 + \dfrac{B}{x-C}$.

Die Abbildung 3 zeigt eine axonometrische Darstellung einer Schiebzyklide vom Typ A II 1, während die Abbildung 4 eine Zyklide vom Typ A II 2 darstellt.

Literaturverzeichnis

[1] H. Brauner, Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, *Journ. f. reine u. angew. Math.* **224** (1966), 118–146.

[2] H. Brauner, Geometrie des zweifach isotropen Raumes II, *Journ. f. reine u. angew. Math.* **226** (1967), 132–158.

[3] H. Brauner, Geometrie des zweifach isotropen Raumes III, *Journ. f. reine u. angew. Math.* **228** (1967), 38–70.

[4] J. L. Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, Oxford 1916, Nachdruck: Chelsea Publ. Comp., *New York*, 1971.

[5] S. G. Karáné, Kreisschiebzykliden des Flaggenraumes $I_3{}^{(2)}$, Habilitationschrift, *a.d. MU Leoben – TU Budapest*, 1992.

[6] H. Sachs, Allgemeine Theorie der Zykliden des Flaggenraumes, *Journ. of Geometry*, (*in Vorbereitung*).

[7] H. Sachs, Ebene isotrope Geometrie, *Vieweg–Verlag*, *Braunschweig–Wiesbaden*, 1987.

[8] H. Sachs, Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene, *Studia Sci. Mat. Hung* **24** (1989), 377–383.

[9] H. Sachs, Die Strommer-Zykliden des Flaggenraumes, *Journ of Geometry* **43** (1992), 150–165.

[10] H. Sachs und GY. Strommer, Geodätische u. Pseudogeodätische auf Regelflächen im Flaggenraum, *Arch. d. Math* **33** (1979), 478–484.

[11] H. Sachs und V. Ščurić, Zur Theorie der Flächen 2. Ordnung im Flaggenraum, *RAD HAZU* **10** (1991), 197–216.

[12] G. Scheffers, Anwendung der Differential – und Integralrechnung auf Geometrie II: Einführung in die Theorie der Flächen, *Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig*, 1922.

[13] K. Strubecker, Differentialgeometrie III, Theorie der Flächenkrümmung, Sammlung Göschen, Bd. 1180 | 1180a, *Berlin, 1969.*

[14] K. Strubecker, Über die Parabeln zweiter bis vierter Ordnung, *Praxis d. Math* **4** (1962), 169–174.

GIZELLA SUDA KARÁNÉ
LEHRSTUHL FÜR DARSTELLENDE GEOMETRIE
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST
MÜEGYETEM RKP. 3.
H–1111. BUDAPEST
UNGARN

(Eingegangen am 22. December 1992)