Publ. Math. Debrecen
42 / 3–4 (1993), 353–355

Über die Existenz des zum Parallelwinkel gehörigen Lotes

Von J. STROMMER (Budapest)

Meinem lieben Freund, Herrn Professor Lajos Tamássy zum 70. Geburtstag gewidmet

Die Existenz der zum Parallelwinkel $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ gehörigen Lotstrecke p hat schon *Hilbert* ohne Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen. (Vgl. [1], S.142–144.) Im folgenden geben wir einen anderen einfachen Beweis, welcher sich auf die einfachsten Eigenschaften der Hjelmslevschen Halbdrehungen stützt, und aus dem sich eine einfache Konstruktion der Lotstrecke p zum Parallelwinkel $\Pi(p)$ ergibt.

Einem Punkt P der Ebene bei der Halbdrehung um O um den (gerichteten) Winkel AOB, der kleiner als ein Rechter ist, entspricht der Punkt P', für den der Winkel POP' dem Winkel AOB gleich ist, und P' der Fußpunkt des von P auf OP' gefällten Lotes ist. Der Punkt O entspricht sich selbst.

Bei einer Halbdrehung gehen die Punkte einer Geraden a in Punkte einer Geraden a' über. Fällen wir das Lot OA auf a und bestimmen wir den Punkt A', in den bei einer Halbdrehung um O der Punkt A übergeht, so ist AA' die Gerade, welche der Geraden a entspricht. Jeder Geraden durch O entspricht eine Gerade durch O. (S. z. B. [2], S. 464.)

Nach diesen Vorbemerkungen sei a eine beliebige Gerade und O ein nicht auf ihr gelegener Punkt (s. nebenstehende Figur). Wir ziehen durch O eine Parallele b zu a. Es sei N der Fußpunkt des von O auf a gefällten Lotes. Bei der Halbdrehung um O um den gegebenen Winkel $\Pi(p)$ gehe a in die Gerade a' und b in b' über. Dann geht a' nach obigem durch den Punkt N. Der Punkt N geht bei dieselber Halbdrehung in den Fußpunkt

N' des von O auf a' gefällten Lotes. Die Gerade b' schneidet a' in einem Punkt M, denn, wenn man das bei N' rechtwinkligen Dreieck ONN' um O dreht, bis die Kathete ON' auf die Halbgerade ON fällt, so geht die Seitengerade NN' des Dreiecks in eine Gerade über, welche in einem inneren Punkt N_1 der Strecke ON auf der Geraden ON senkrecht steht. Diese Gerade muß b schneiden, da $ON_1 = ON' < ON$ ist, und ON das zum Parallelwinkel NOM_1 gehörige Lot ist.

Es sei m die im Punkte M auf die Gerade OM errichtete Senkrechte. Die Gerade b Schneidet m nicht. In der Tat, bei der Halbdrehung um O um den Winkel $\Pi(p)$ gehen die Geraden a, b und m in Geraden über, die durch denselben Punkt M gehen. Hätte also b mit m einen Punkt gemein, so müßte dieser auch ein Punkt von a sein, was nicht möglich ist, da a und b untereinander parallel sind.

Es sei nun b_1 ein beliebiger Halbstrahl, der vom Scheitel des Winkels (b, b') ausgeht und im Inneren dieses Winkels verläuft, und M' der Punkt in den M durch die Halbdrehung um O um den Winkel $\Pi(p)$ übergeführt wird. Dann schneidet der Halbstrahl b_1' in den b_1 durch diese Halbdrehung übergeht, die Strecke MM' in einem inneren Punkt, so daß es einen Punkt der Geraden m gibt, welcher durch die Halbdrehung in diesen übergeführt wird, und b_1 geht durch diesen Punkt, d.h. b_1 schneidet m.

Hieraus folgt aber, daß b zu m parallel ist, und daher ist OM das zum Parallelwinkel $\Pi(p)$ gehörende Lot. Damit haben wir gezeigt, daß zu jedem Winkel, der kleiner als ein Rechter ist, ein zugehöriges Lot existiert.

Aus obigem ergibt sich folgende Konstruktion von p aus $\Pi(p)$:

Man zieht zu einer beliebigen Geraden a aus einem außerhalb ihr gelegenen Punkt O eine parallele Halbgerade b. Dann fällt man von O

aus auf a das Lot ON und trägt $\Pi(p)$ an den Halbstrahl b an, so daß der entstehende Schenkel b' auf dieselbe Seite von b wie das Lot ON fällt. Sodann trägt man an die Strecke ON in O an der b entgegengesetzten Seite denselben Winkel an. Fällt man von N aus auf den anderen Schenkel dieses Winkels das Lot NN', so schneidet es auf der Halbgeraden b' die gesuchte Strecke $OM = p$ ab.

Literaturverzeichnis

[1] D. Hilbert, Neue Begründung der Bolyai–Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Ann.* **57** (1903), 137–150.

[2] J. Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie, *Math. Ann.* **64** (1907), 449–474.

J. STROMMER
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
LEHRSTUHL FÜR GEOMETRIE
STOCZEK U. 4.
BUDAPEST
H–1521

(Eingegangen am 21. Januar 1993)