

Zur Theorie der Halbgruppen.

Dem Andenken meines Freundes Professor Tibor Szele gewidmet.

Von J. SZÉP in Szeged.

Es ist bekannt, daß jede Gruppe G mit Hilfe jeder Untergruppe $H (\subset G)$ in der Form $G = HC'$ faktorisiert ist, wo C' ein Komplex aus G ist und $H \cap C' = 1$ gilt. Aus dieser Tatsache folgt: ist G eine Gruppe und ist H eine Untergruppe von G , so existiert ein Komplex C'' in G derart, daß*)

$$G - H = HC'' \quad (H \cap C'' \text{ ist leer})$$

gilt.

Es sei F eine Halbgruppe und A eine beliebige Teilhalbgruppe von F . Es entsteht die Frage, ob Halbgruppen F (keine Gruppen) existieren, bei denen zu jeder Teilhalbgruppe A von F eine Faktorisierung

$$(1) \quad F - A = AC \quad (A \cap C \text{ ist leer})$$

gehört, wo C ein Komplex aus F ist. Mit solchen Fragen werden wir uns im folgenden beschäftigen.

Zuerst schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus:

a) Sind H und K zwei Untergruppen von F , so ist $H \cap K$ entweder leer oder eine Gruppe.

Dazu genügt es zu zeigen, daß es für jedes $a (\in F)$ höchstens eine durch a erzeugte Untergruppe $\{a\}$ von F gibt. Es seien $\{a\}$ und $\{a'\}$ zwei solche zyklische Gruppen in F mit dem Einselement e bzw. e' und mit dem inversen Element $\bar{a}$ bzw. $\bar{a}'$ von a . Es genügt zu zeigen, daß $e = e'$ und $\bar{a} = \bar{a}'$ ist. Aus $ee' = e(a\bar{a}') = (ea)\bar{a}' = a\bar{a}' = e'$ und aus $ee' = (\bar{a}a)e' = \bar{a}(ae') = \bar{a}a = e$ folgt $e' = e$. Es gilt ferner $\bar{a} = \bar{a}(a\bar{a}') = (\bar{a}a)\bar{a}' = \bar{a}'$.

b) Sind H und K zwei Untergruppen von F und ist $H \cap K$ nicht leer, so ist die durch H und K erzeugte Halbgruppe eine Gruppe. Diese Bemerkung folgt einfach aus a).

Es bezeichne $[a]$ ($a \in F$) die Halbgruppe $a, a^2, \dots$ und $\{a\}$ die von a erzeugte unendliche zyklische Gruppe in F , falls diese existiert. Es bezeichne ferner $x = \sqrt[a]{a}$ eine beliebige Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

*) Das Zeichen $-$ und später das Zeichen $+$ bedeutet die mengentheoretische Differenz bzw. Vereinigung.

Es sei in F

$$F_a = \begin{cases} \{a\}, & \text{wenn dieses existiert und alle } \sqrt{a} \text{ mit dem Einselement} \\ & \text{von } \{a\} \text{ vertauschbar sind.} \\ [a] & \text{in anderen Fällen.} \end{cases}$$

Satz. Es sei $F(\neq 0)$ eine Halbgruppe. Hat $F - A$ für jedes $A = F_a$ eine Faktorisierung (1), so hat F eine Zerlegung

$$(2) \quad F = G_1 + G_2 + \dots,$$

wo die G_i ($i = 1, 2, \dots$) paarweise fremde Untergruppen von F sind und für ihre Einselemente $e_1, e_2, \dots$ die Relationen $e_i e_k = e_k$ ($i, k = 1, 2, \dots$) gelten. Umgekehrt, hat die Halbgruppe F eine Zerlegung (2) mit den gesagten Eigenschaften, so hat $F - A$ für jedes $A = F_a$ eine Faktorisierung (1).

BEWEIS. Es ist evident, daß $0 \notin F$ ist, weil F für $A = F_0$ keine Faktorisierung (1) hat.

Für jedes $a(\in F)$ gelten die folgenden Faktorisierungen:

$$(3) \quad F - F_a = F_a B,$$

$$(4) \quad F - F_{a^2} = F_{a^2} B'.$$

Wir werden beweisen, daß jedes Element a von F eine (zyklische) Untergruppe in F erzeugt.

Nehmen wir zuerst an, daß F_{a^2} keine Gruppe ist. Gilt $a \in F_{a^2}$ (also $a = a^{2r}$), so ist F_a und auch F_{a^2} eine endliche Gruppe, was ein Widerspruch ist. Gilt $a \in F_{a^2} b'$ (das heißt $a = a^{2k} b'$, $b' \in B'$), so ist $b' \in F_a$. Ist nämlich z. B. $b' \in F_a b$ ($b \in B$), so folgt $a \in F_a b$, was nach (1) ein Widerspruch ist. Wegen $b' \in F_a$ gilt $a = a^{2k} a^t = a^{2k+t}$ ($a^t = b'$, $2k+t > 1$), also ist F_a wieder eine (endliche) Gruppe.

Nehmen wir nun an, daß F_{a^2} eine Gruppe ist. Es existiert in diesem Fall ein Element $\bar{a}$ derart, daß $a^2 \bar{a} = \bar{a} a^2 = e_{a^2}$ (e_{a^2} ist das Einselement von F_{a^2}) gilt. Ist F_{a^2} eine endliche Gruppe der Ordnung n , so ist $\bar{a} = a^{2(n-1)}$ und es gilt $a e_{a^2} = e_{a^2} a$. Ist F_{a^2} eine unendliche Gruppe, so gilt $a e_{a^2} = e_{a^2} a$ nach der Definition von F_{a^2} . Multiplizieren wir die Gleichung $a(a^2 \bar{a}) = (a^2 \bar{a})a$ von links mit $\bar{a}$, so ergibt sich $e_{a^2} a \bar{a} = e_{a^2} \bar{a} a$. Man sieht leicht aus der Faktorisierung (4), daß das Einselement e_{a^2} von F_{a^2} ein Linkseinselement von F ist, also gilt $a \bar{a} = \bar{a} a$. Wegen $a \bar{a} = \bar{a} a$ ist $(\bar{a} a) a = a(\bar{a} a) = e_{a^2}$. Also erzeugt a eine (zyklische) Gruppe in F . Nach b) gehört zu jedem idempotenten Element eine maximale Untergruppe in F , in der dieses Element das Einselement ist. So bekommt man nach a) die Zerlegung (2).

Da nach den gesagten ist F_a immer eine Gruppe, so sieht man leicht aus (3), daß das Einselement von F_a ein Linkseinselement von F ist.

Hat F eine Zerlegung (2) mit den gesagten Eigenschaften, so ist jedes F_a eine Gruppe. Gilt z. B. $a \in G_1$, so existiert ein Komplex C in F derart, daß $G_1 = F_a C$ gilt. Somit ist $F - F_a = F_a ((C - e_a) + G_2 + G_3 + \dots)$ eine Zerlegung (1). Damit haben wir den Satz bewiesen.

Korollar. *Hat die Halbgruppe $F(\neq 0)$ für jedes $A = F_a$ eine Faktorisierung (1) und sind die idempotenten Elemente von F miteinander vertauschbar, so ist F eine Gruppe.*

BEWEIS. Wir haben oben gesehen, daß für jedes a ($a \in F$) das zugehörige Einselement ein Linkseinselement von F ist. Sind e_a und e_b zwei Linkseinselemente von F , so ist $e_a = e_b$ wegen $e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_a$. F hat also ein einziges idempotentes Element, welches Einselement ist.

BEMERKUNG 1. Hat $F = A$ für alle $A = [a]$ eine Faktorisierung (1), so hat F eine Zerlegung

$$F = G_1 + G_2 + \dots$$

wo die G_i ($i = 1, 2, \dots$) paarweise fremde Untergruppen von F mit lauter Elementen endlicher Ordnung sind und für ihre Einselemente $e_1, e_2, \dots$ die Relationen $e_i e_k = e_k$ ($i, k = 1, 2, \dots$) gelten. Auch in diesem Fall gilt die Umkehrung.

Den Beweis dieser Bemerkung erhalten wir ebenso, wie den Satz.

BEMERKUNG 2. Fordern wir statt (1) die Faktorisierung

$$(1') \quad F = A = CA$$

für jedes $A = F_a$, so gilt der bewiesene Satz mit der folgenden Änderung für die Einselemente e_i von G_i ($i = 1, 2, \dots$): $e_i e_k = e_i$ ($i, k = 1, 2, \dots$).

Man kann leicht einsehen, daß F eine Gruppe ist, wenn für jedes F_a (1) und auch (1') gilt.

(Eingegangen am 1 Oktober, 1955.)