

Eine axiomatische Theorie der Dieudonnéschen Determinanten.

Herrn Professor Ottó Varga zur Gelegenheit seines
fünfzigsten Geburtstages gewidmet.

Von JULIUS GÁSPÁR (Miskolc).

Der Begriff der Determinante wurde von J. DIEUDONNÉ [1] auf die quadratischen Matrizen über einem Schiefkörper verallgemeinert. In dieser Abhandlung wollen wir eine axiomatische Einführung dieser Verallgemeinerung geben.

Im folgenden bezeichnen $K = \{a, b, \dots\}$ einen beliebigen Schiefkörper, K^* die multiplikative Gruppe von K , C die Kommutatorgruppe von K^* , K^*/C die Faktorkommutatorgruppe, $M_n = \{A, B, \dots\}$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren Matrizen n -ter Ordnung über K , $E_{ik}(t) \in M_n$ eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix $E = (\delta_{im})$ durch Ersetzung von δ_{ik} mit $t \in K$ entsteht, C_n die Gruppe¹⁾, die durch die Matrizen $P_{ik} = E_{ik}(1)E_{ki}(-1)E_{ik}(1)$ erzeugt ist, M_n/C_n die Faktorgruppe von M_n nach C_n .

Zwecks Beweis des Isomorphismus $M_n/C_n \approx K^*/C$ gab J. DIEUDONNÉ [1] die folgende rekursive Definition der Abbildung

$$X \rightarrow \Delta_n(X), (X = (x_{ik}) \in M_n; \Delta_n(X) \in K^*/C; n \geq 1):$$

$$\Delta_n(X) = \varphi_1 [(-1)^{i+1} x_{i1}] \Delta_{n-1}(X'), (n > 1), \Delta_1(x) = \varphi_1(x), (x_{i1} \neq 0).$$

In dieser Definition bedeutet $\varphi_1(y)$ jenes Element von K^*/C , in welchem das Element $y \in K^*$ enthalten ist, und die Matrix X' von der Ordnung $n-1$ entsteht aus der Matrix X von der Ordnung n folgendermaßen: wenn $x_{j1} = 0$, $j \neq i$ ist, so lassen wir die erste Spalte und die i -te Zeile der Matrix X weg; wenn $x_{j1} \neq 0$, $j \neq i$ ist, so multiplizieren wir (links) die i -te Zeile der Matrix X mit einem solchen Element $t_j \in K^*$, daß das j -te Element der ersten Spalte Null werde, wenn wir diese multiplizierte i -te Zeile aus der j -ten Zeile

¹⁾ Diese Gruppe ist die Kommutatorgruppe von M_n ausgenommen den Fall, in dem K nur zwei Elemente hat und $n = 2$ ist. (S. [1], S. 32.)

subtrahieren; erledigen wir diese Multiplikationen und Subtraktionen für alle Elemente $x_{ji} \neq 0$, $j \neq i$, so erhalten wir eine Matrix X_1 , welche in der ersten Spalte nur ein von Null verschiedenes Element hat, nämlich das Element x_{i1} , und dann lassen wir die erste Spalte und die i -te Zeile der Matrix X_1 weg.

Fügen wir der Gruppe K^*/C ein neues Element σ_0 mit der Multiplikationsvorschrift $\sigma_0 \sigma_0 = \sigma_0$, $\sigma_0 \sigma = \sigma \sigma_0 = \sigma_0$ [$\sigma \in K^*/C$] zu, so können wir diese Definition auf nichtinvertierbare Matrizen erweitern: $\Delta_n(X) = \sigma_0$, wobei X eine nichtinvertierbare Matrix n -ter Ordnung über K ist.

$\Delta_n(X)$ nennen wir die Dieudonné'sche Determinante von X .

Satz. Ist φ eine Abbildung von M_n in K^*/C , die den Axiomen

- (a) $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$,
 (b) $\varphi(A^{(t)}) = \varphi_1(t)\varphi(A)$, $(t \in K^*)$

genügt, wobei $A^{(t)}$ in (b) eine solche Matrix bezeichnet, die aus A entsteht, wenn wir eine Zeile von A mit einem Element $t \in K^*$ multiplizieren, während $\varphi_1(t)$ die kanonische Abbildung²⁾ von K^* auf K^*/C bezeichnet, so ist $\varphi(A)$ die Dieudonné'sche Determinante von A .

Corollarium. Ist K ein Körper, so ist $\varphi(A)$ die (gew.) Determinante von A , wenn man auch den Isomorphismus $K^*/C \approx K^*$ beachtet.

Im folgenden wird für die Ordnung von M_n $n > 1$ vorausgesetzt. Das ist erlaubt, da in dem Falle $n = 1$ die Richtigkeit unseres Satzes unmittelbar zu sehen ist.

Wir beginnen mit der folgenden Behauptung:

- (1) $\varphi[E_{ik}(t)] = \varepsilon$, $(i \neq k)$,

wobei ε das Einheitsselement von K^*/C bedeutet. (Man kann auch $\varepsilon = \varphi_1(1)$ schreiben.)

Ist $t = 0$, so folgt (1) aus (a): $\varphi(E) = \varphi(E E) = \varphi(E)\varphi(E)$, also $\varphi(E) = \varepsilon$.

Es sei nun $t \neq 0$. In diesem Falle gilt die Faktorisierung

$$E_{ik}(t) = E_{ii}(t^{-1})E_{ii}(t)E_{ik}(t).$$

Es folgt nach (a) und wegen der Kommutativität von K^*/C :³⁾

$$\begin{aligned} \varphi(E_{ik}(t)) &= \varphi(E_{ii}(t^{-1}))\varphi(E_{ii}(t))\varphi(E_{ik}(t)) = \\ &= \varphi(E_{ii}(t^{-1}))\varphi(E_{ik}(t))\varphi(E_{ii}(t)) = \varphi(E_{ik}(1)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

²⁾ $\varphi_1(t)$ bezeichnet also die Abbildung, die zu jedem Elemente t jene Nebenklasse nach C ordnet, die das Element t enthält.

³⁾ Diese Verkürzung des Beweises danke ich Herrn Dr. M. Hosszú.

Hat der Körper K mehr als zwei Elemente, so kann man $t', t'', t' + t'' \neq 0$ setzen. In diesem Falle erhalten wir wegen $E_{ik}(t') E_{ik}(t'') = E_{ik}(t' + t'')$ und (a):

$$\varphi(E_{ik}(t')) \varphi(E_{ik}(t'')) = \varphi(E_{ik}(t' + t'')),$$

also $\sigma^2 = \sigma$, $\sigma = \varepsilon$. Hat der Körper K nur zwei Elemente, so hat die Gruppe K^* nur das Einheitsselement, also ist unsere Behauptung trivial.

Wir beachten nun, daß jede matrix $A \in M_n$ sich folgendermaßen faktorisieren läßt⁴⁾:

$$(2) \quad A = BD(v),$$

wobei die Matrix B ein Produkt von Matrizen $E_{ik}(t)$ ist und $D(v) = (v_{ik})$, ($v_{ii} = 1$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $v_{nn} = v \in K^*$) eine Diagonalmatrix ist.

Die Anwendung von (a) und (b) auf $A = BD(v)$ ergibt nach (1):

$$\varphi(A) = \varphi(D(v)) = \varphi_1(v) \varphi(E) = \varphi_1(v).$$

Es braucht nur noch bewiesen zu werden, daß dieses Ergebnis von der Faktorisierung unabhängig ist: wenn $A = BD(v) = B'D(w)$ ist, so gilt $\varphi_1(v) = \varphi_1(w)$, also $v \equiv w \pmod{C}$; zu beweisen ist ferner, daß diese Abbildung φ eben die Dieudonné'sche Determinante ist. Wir werden diese letztere Behauptung beweisen, da die Eindeutigkeit nach einem Satz von J. DIEUDONNÉ schon folgt.⁵⁾

Es gilt

$$\mathcal{A}_1(a) = \varphi_1(a), \quad (a \in K^*).$$

Wir setzen voraus, daß

$$\varphi(A') = \mathcal{A}_{n-1}(A'), \quad (A' \in M_{n-1})$$

ist, und beweisen

$$\varphi(A) = \mathcal{A}_n(A), \quad (A \in M_n).$$

Die invertierbare Matrix $A = (a_{ik})$ hat in der ersten Spalte ein von Null verschiedenes Element a_{i1} . Wenn nötig, können wir links und rechts die Matrix A mit Matrizen $E_{ik}(t)$ multiplizieren und so die Matrix

$$B_1 A B_2 = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{i-1,2} & \cdots & a'_{i-1,n} \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{i+1,2} & \cdots & a'_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

bekommen, wobei B_1, B_2 die Produkte der $E_{ik}(t)$ bezeichnen.

⁴⁾ S. [1], S. 30.

⁵⁾ S. [1], S. 33.

Es gilt aus (a) und (1):

$$(3) \quad \varphi(A_1) = \varphi(B_1 A B_2) = \varphi(A).$$

Wir können die Matrix A_1 mit Hilfe der Matrizen $P_{ik} = E_{ik}(1)E_{ki}(-1)E_{ik}(1)$ folgendermaßen transformieren:

$$P_{12} \cdots P_{i-2, i-1} P_{i-1, i} A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} (-1)^{i-1} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{i-1, 2} & \cdots & a'_{i-1, n} \\ 0 & a'_{i+1, 2} & \cdots & a'_{i+1, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Es folgt aus (a) und (1):

$$(4) \quad \varphi(A_2) = \varphi(P_{12} \cdots P_{i-2, i-1} P_{i-1, i} A_1) = \varphi(A_1),$$

also nach (3): $\varphi(A_2) = \varphi(A)$.

Wir schreiben die Matrix A_2 in der Form

$$A_2 = \begin{bmatrix} (-1)^{i+1} a_{i1} & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix},$$

wobei

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i-1, 2} & \cdots & a'_{i-1, n} \\ a'_{i+1, 2} & \cdots & a'_{i+1, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

ist und die Nullen Nullmatrizen von geeigneten Typus bezeichnen.

Es folgt in diesem Falle nach (b):

$$\varphi(A_2) = \varphi_1[(-1)^{i+1} a_{i1}] \varphi(A_3),$$

wobei

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}$$

ist.

Nun nehmen wir die Faktorisierung $A_3 = B_3 D(v)$ nach (2). Dann können wir dieser eine Faktorisierung $A' = B' D'(v')$ zuordnen, in der Weise, daß jeder Matrix $E_{ik}(t)$, ($i, k > 1$) im Produkt B_3 , eine Matrix $E'_{i-1, k-1}(t)$ in B' ent-

spricht. In diesem Falle folgt $v = v'$, es gilt also nach (a), (1) und (b):

$$\begin{aligned}\varphi(A_3) &= \varphi(D(v)) = \varphi_1(v), \\ \Delta_{n-1}(A') &= \Delta_{n-1}(D'(v')) = \varphi_1(v') = \varphi_1(v).\end{aligned}$$

Endlich bekommen wir:

$$\varphi(A) = \varphi_1[(-1)^{i+1}a_{i1}]\Delta_{n-1}(A') = \Delta_n(A),$$

w. z. b. w.

Ist K ein Körper, so folgt nach dem Isomorphismus $K^*/C \approx K^*$, daß $\Delta_n(A)$ (bis auf einen Isomorphismus) die (gew.) Determinante von A ist.

Die Erweiterung dieses Begriffes auf eine nichtinvertierbare Matrix haben wir schon erwähnt.

Literatur.

- [1] J. DIEUDONNÉ, Les déterminants sur un corps non commutatif, *Bull. Soc. Math. France* 71 (1943), 27—45.

(Eingegangen am 26. November 1958.)