

## Eine Charakterisierung der vierdimensionalen elliptischen Geometrie durch Quaternionen.

Prof. Dr. O. Varga anlässlich seines 50-ten Geburtstages mit Zuneigung und Verehrung gewidmet.

Von L. GYARMATHI (Debrecen).

Es ist bekannt, daß die ebene elliptische Geometrie  $E^2$  auf der gewöhnlichen Sphäre realisierbar ist. Auf ähnliche Weise kann die vierdimensionale elliptische Geometrie  $E^4$  auf der Hypersphäre  $G^4$  des fünfdimensionalen Raumes realisiert werden. Dabei entsprechen die Punkte, die Geraden, die Ebenen und die Hyperebenen von  $E^4$ , der Reihe nach, den Punkten, den Hauptkreisen, den Hauptsphären und den Hauptsphären dritter Ordnung der Hypersphäre, falls die diametralen Punkte von  $G^4$  identifiziert werden.

Die Bewegungen von  $E^4$  sind auf dem üblichen Wege definiert. Unter einer Bewegung von  $E^4$  verstehen wir eine Homographie von  $G^4$ , welche die diametralen Punkte in ebensolche überführt. Folglich müssen wir im wesentlichen die Drehungen<sup>1)</sup> von  $G^4$  untersuchen.

Nach E. CARTAN ([1], S. 87)<sup>2)</sup> ist  $E^2$  die Invariantentheorie einer Untergruppe der projektiven Geometrie der komplexen Geraden. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß  $E^4$  durch die projektive Geometrie  $Q$  der Quaternionengeraden charakterisiert werden kann, ferner wird diejenige Untergruppe der Transformationen dieser Geometrie bestimmt, deren Invariantentheorie die Geometrie  $E^4$  ist.

Nach den Untersuchungen von E. STUDY ([3], S. 79) und J. BILO ([2], S. 111) ist die  $Q$ -Geometrie mit den Homographien der Hypersphäre des fünfdimensionalen Raumes äquivalent, daher ist es möglich die Drehungen von  $G^4$  mit Hilfe der Quaternionen auszudrücken.

Bei der Lösung der Aufgabe stützen wir uns auf einen Gedankengang, welcher von E. CARTAN bei der Lösung des Problems bezüglich  $E^2$  benützt

---

<sup>1)</sup> Eine Spiegelung bezüglich einer Hauptsphäre wird als eine Drehung betrachtet.

<sup>2)</sup> Die Nummer in eckigen Klammern weist auf die entsprechende Stelle des Literaturverzeichnisses.

wurde. Da die Multiplikation der Quaternionen nicht kommutativ ist, konnte das Verfahren von E. CARTAN nicht angewandt werden. Die auftretenden Schwierigkeiten wurden bei uns durch Anwendung eines Resultates von E. STUDY beseitigt. Am Ende der Arbeit werden wir zeigen, wie sich die schon erwähnten Feststellungen von CARTAN aus unserem Resultate ergeben.

Es bezeichne die reelle Quaternion

$$(1) \quad z = \xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k \quad ^3)$$

die inhomogene Koordinate eines Punktes der sogenannten Quaternionengeraden ( $Q$ -Gerade). Der einzige unendlich ferne Punkt der  $Q$ -Geraden sei mit dem Symbol  $z = \infty$  bezeichnet.

Die  $Q$ -Gerade ist am einfachsten in einem vierdimensionalen Möbius-schen Raum  $M^4$  darstellbar, in dem ein vierdimensionales, rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt wird. Dem Punkte  $z$  wird als Bild in  $M^4$  der Punkt mit den Koordinaten  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  zugeordnet. Es sei nun  $G^4$  als die Riemannsche Sphäre des fünfdimensionalen Raumes betrachtet, auf welcher Quaternionenkoordinaten durch stereographische Projektion des Koordinatensystems in  $M^4$  auf  $G^4$  eingeführt werden. Dem Punkte  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  auf  $G^4$  werden wir die Quaternion (1) zuordnen. Das Zentrum der Projektion sei der Punkt  $z = \infty$ .

Nach den Ergebnissen von E. STUDY und J. BILO sind die  $Q$ -Geometrie der Quaternionengeraden und gleichzeitig die Homographien von  $G^4$  durch

$$(2) \quad z' = (az + b)(cz + d)^{-1}$$

und

$$(3) \quad z' = (a\bar{z} + b)(c\bar{z} + d)^{-1}$$

gegeben. Hier ist  $z$  die Koordinate eines Punktes der  $Q$ -Geraden, bzw. von  $G^4$ ,  $\bar{z}$  bedeutet die Konjugierte von  $z$ , ferner ist

$$(4) \quad \nabla_e = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\bar{a}d\bar{d} - a\bar{c}d\bar{b} - b\bar{d}c\bar{a} + b\bar{b}d\bar{d} \neq 0,$$

wobei  $a, b, c$  und  $d$  reelle Quaternionen bedeuten.

Die  $Q$ -Geometrie und die Homographien von  $G^4$  sind dann nichts anderes, als die Invariantentheorie der zu den Transformationsgleichungen (2) und (3) gehörenden gemischten Gruppe.

Die durch (2) gegebene Beziehung wird eine eigentliche Homographie (in Zeichen:  $H$ ), die durch (3) gegebene Abbildung wird eine Antihomo-

<sup>3)</sup> Hier und im folgenden bedeuten lateinische Buchstaben reelle Quaternionen. Die griechischen Buchstaben stehen für reelle Zahlen.  $1, i, j, k$  sind die Quaternioneneinheiten.

graphie ( $\bar{H}$ ) genannt. Die durch (2) und (3) bestimmte gemischte Gruppe sei mit  $Q_l$  bezeichnet.

Die  $Q$ -Geometrie und die Homographien von  $G^4$  können auch durch die Transformationsgleichungen

$$(5) \quad z' = (z^* c^* + d^*)^{-1} (z^* a^* + b^*), \quad \nabla_r = \begin{Bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{Bmatrix} \neq 0$$

und

$$(6) \quad z^* = (\bar{z} + d^*)^{-1} (\bar{z} a^* + b^*), \quad \nabla_r = \begin{Bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{Bmatrix} \neq 0,$$

ausgedrückt werden. Wir bezeichnen diese gemischte Gruppe mit  $Q_r$ . Unter Beachtung der Tatsache, daß zusammen mit den Homographien und Antihomographien auch ihre Inversen (die immer in der anderen Form auftreten) zu derselben Gruppe gehören, sieht man leicht ein, daß  $Q_l = Q_r$  ist.

Diese gemeinsamen Geometrien werden mit  $Q$  bezeichnet. Dieselbe Bezeichnung wird benutzt, falls es sich um die Homographien von  $G^4$  handelt.

E. STUDY hat dafür, daß zwei, in verschiedenen Formen gegebene Abbildungen dieselbe Transformation darstellen, die folgende notwendige und hinreichende Bedingung gefunden ([3], S. 75).

Es sei  $z = z^*$ . Die durch (2) bzw. (3) und durch (5) bzw. (6) gegebenen Abbildungen stellen dann und nur dann dieselbe Transformation dar, d. h.

$$z = z^* \longleftrightarrow z' = z^{**}$$

falls die Relationen

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{a}a\bar{d} - \bar{b}a\bar{c} &= \nabla_l a^*, & \bar{d}c\bar{a} - \bar{c}c\bar{b} &= \nabla_l c^* \\ \bar{a}b\bar{d} - \bar{b}b\bar{c} &= \nabla_l b^*, & \bar{d}d\bar{a} - \bar{c}d\bar{b} &= \nabla_l d^* \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Aus (7) folgt, daß dann auch die Relationen

$$(7a) \quad \begin{aligned} \nabla_r a &= \bar{d}^* a^* \bar{a}^* - \bar{c}^* a^* \bar{b}^*, & \nabla_r b &= \bar{d}^* b^* \bar{a}^* - \bar{c}^* b^* \bar{b}^* \\ \nabla_r c &= \bar{a}^* c^* \bar{d}^* - \bar{b}^* c^* \bar{c}^*, & \nabla_r d &= \bar{a}^* d^* \bar{d}^* - \bar{b}^* d^* \bar{c}^* \end{aligned}$$

gültig sind. Ferner ist

$$(8) \quad \nabla_l \cdot \nabla_r = 1.$$

Die Drehungen der Hypersphäre sind, wie bekannt, Homographien, die die diametralen Punkte von  $G^4$  in ebensolche überführen. Es ist leicht zu sehen, daß diese Homographien eine Gruppe bilden. Daher ist diejenige Untergruppe von  $Q$  zu bestimmen, deren Elemente die diametralen Punkte von  $G^4$  wieder in diametrale Punkte abbilden. Wir erhalten leicht diese Unter-

gruppe, falls wir die sogenannte elliptische Antiinvolution  $A_e$  der  $Q$ -Geometrie betrachten, deren kanonische Gleichung

$$(9) \quad z' = -\bar{z}^{-1}$$

ist.

Kennzeichnend für diese Antiinvolution ist, daß die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte durch einen Punkt, im Falle der Homographien von  $G^4$  durch einen inneren Punkt,  $C$  von  $G^4$  gehen. Dieser Punkt wird das Zentrum von  $A_e$  genannt. Als  $C$  kann man auch den Mittelpunkt von  $G^4$  wählen. Dann bekommen wir die gesuchte Untergruppe  $Q_e$ , falls wir diejenigen Homographien von  $Q$  betrachten, bei denen  $A_e$  invariant bleibt.

Wir bezeichnen eine eigentliche Homographie der gesuchten Gruppe mit  $H$ , dann ist nach dem oben gesagten  $HA_eH^{-1} = A_e$ , oder

$$(10) \quad A_eHA_e^{-1} = H. \text{ 4)}$$

Es sei  $H$  in der Form

$$(11) \quad z' = (az + b)(cz + d)^{-1}, \quad \nabla_1 \neq 0$$

gegeben. Dann wird  $HA_e$  durch

$$(12) \quad z' = (-a\bar{z}^{-1} + b)(-c\bar{z}^{-1} + d)^{-1}$$

und  $A_e^{-1}HA_e$  durch

$$(13) \quad z' = (\bar{a} - z\bar{b})^{-1}(-\bar{c} + z\bar{d})$$

bestimmt. Nach unseren Forderungen sollen (11) und (13) dieselbe Transformation darstellen. Die Schwierigkeit der Vergleichung besteht darin, dass (11) zur  $Q_l$ , (13) aber zur  $Q_r$  gehört. Diese Schwierigkeit kann man mit Hilfe der Relationen (7) beseitigen. Nach diesen Relationen stellen (11) und (13) dann und nur dann dieselbe Transformation dar, falls die Relationen

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{a}a\bar{d} - \bar{b}a\bar{c} &= \nabla_1\bar{d}, & \bar{d}\bar{c}\bar{a} - \bar{c}c\bar{b} &= \nabla_1(-\bar{b}) \\ \bar{a}b\bar{d} - \bar{b}b\bar{c} &= \triangle_1(-\bar{c}), & \bar{d}d\bar{a} - \bar{c}d\bar{b} &= \nabla_1\bar{a} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Da der Wert von  $\nabla$  eine reelle Zahl ist, kann man die Koeffizienten der Transformation derart normieren, daß  $\nabla_1 = 1$  ist. Dann können wir (14) auch in der Form

$$(15) \quad \begin{aligned} (\alpha) \quad N(a)N(d) - \bar{b}a\bar{c}d &= N(d), \quad (\gamma) \quad -\bar{d}\bar{c}\bar{a}b + N(c)N(b) = N(b) \\ (\beta) \quad -\bar{a}b\bar{d}c + N(b)N(c) &= N(c), \quad (\delta) \quad N(a)N(d) - \bar{c}d\bar{b}a = N(a) \end{aligned}$$

4) (10) ist auch im Falle  $A_e^{-1}HA_e = H$  erfüllt.

5)  $N(z) = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$  bedeutet die Norm der Quaternion (1).

schreiben. In diesen Relationen sind die Normen nicht enthaltende Glieder reelle Zahlen. Unter Beachtung dessen, daß sich der reelle Teil eines Quaternionenproduktes nicht ändert, falls die Faktoren vertauscht werden, haben wir

$$(16) \quad \bar{b}a\bar{c}d = \bar{c}d\bar{b}a \quad \text{und} \quad \bar{a}b\bar{d}c = \bar{d}c\bar{a}b$$

woraus

$$(17) \quad N(a) = N(d) \quad \text{und} \quad N(b) = N(c)$$

folgt. Da die Summe der linken Seiten von (7) und (8) die normierte  $\nabla_i$  ist, erhalten wir

$$(18) \quad N(a) + N(b) = 1.$$

Aus der Tatsache, daß die Normen nicht enthaltenden Glieder reelle haben, können weitere Folgerungen gezogen werden. Wünscht man die Koeffizienten  $d$  und  $c$  in den Transformationsgleichungen der Gruppe  $Q_e$  mit  $a$  und  $b$  auszudrücken, so werden  $\bar{b}a\bar{c}d$  und die übrigen, Normen nicht enthaltenden Glieder dann und nur dann reell sein, falls

$$(19) \quad \bar{b}a = \sigma \bar{d}c$$

gilt.<sup>6)</sup> Also ist (14) auf Grund von (17), (18) und (19) dann und nur dann erfüllt, falls

$$(20) \quad \text{I: } d = l\bar{a} \text{ und } c = -la^{-1}\bar{b}a \quad \text{oder} \quad \text{II: } d = mb^{-1}\bar{a}b \text{ und } c = -m\bar{b}$$

ist, wobei  $N(l) = 1$  oder  $N(m) = 1$  ist.

Die Bedingungen (20) sind hinreichende Bedingungen, da wir im Falle I

$$(21) \quad \bar{d}c = -a\bar{l}la^{-1}\bar{b}a = -N(l)aa^{-1}\bar{b}a = -\bar{b}a$$

haben.

Ähnliches gilt auch im Falle II. ( $\sigma = -1$  folgt aus

$$N(a)^2 - 2\sigma N(a)N(b) + N(b)^2 = 1 = [N(a) + N(b)]^2.$$

Aus der Gültigkeit von (19) und den Voraussetzungen (16), (17) und (18) folgt aber die Notwendigkeit von I oder II.

Folglich kann (11) die Form

$$(22) \quad z' = (az + b)(-la^{-1}\bar{b}az + l\bar{a})^{-1}$$

und

$$(23) \quad z' = (az + b)(-m\bar{b}z + mb^{-1}\bar{a}b)^{-1}$$

haben.

<sup>6)</sup> Das Quaternionenprodukt  $pq$  ist dann und nur dann reell, falls  $p = \sigma \bar{q}$  ist.

Durch eine einfache Quaternionenrechnung stellt man fest, dass die Identität

$$(24) \quad l\bar{a}^{-1}\bar{b}az + l\bar{a} \equiv m\bar{b}z + mb^{-1}ab$$

besteht, und dass z. B.  $m$  mit Hilfe von  $a, b$  und  $l$  ausgedrückt werden kann. Daher unterscheiden sich die zu (22) und (23) gehörenden Transformationsgruppen nicht, folglich ist es hinreichend nur eine von ihnen zu betrachten.

Ziehen wir noch in Betracht, daß unter Benützung von (7a) die Gleichung (22) auch in der sog. rechtsseitigen Form geschrieben werden kann, und daß es ein ähnliches Verfahren auch im Falle der die Bewegungen von  $G^4$  gebenden Antihomographien gibt. Aus den obigen Betrachtungen folgt die Richtigkeit des folgenden Satzes.

**Satz 1.** *Die vierdimensionale elliptische Geometrie ist die Invariantentheorie der zu den Transformationsgleichungen*

$$(25) \quad z' = (az + b)(-la^{-1}\bar{b}az + l\bar{a})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad z' = (za\bar{b}a^{-1}l + \bar{a}l)^{-1}(za + b)$$

und

$$(26) \quad z' = (a\bar{z} + b)(-la^{-1}\bar{b}a\bar{z} + l\bar{a})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad z' = (-\bar{z}a\bar{b}a^{-1}l + \bar{a}l)^{-1}(\bar{z}a + b),$$

$$N(a) + N(b) = 1, \quad N(l) = 1,$$

*gehörenden gemischten Gruppe.*

Hinsichtlich des Satzes wollen wir betonen, daß die Transformationen (25) und (26) die Drehungen der Hypersphäre des fünfdimensionalen Raumes und auch die Spiegelungen bezüglich der Hauptsphären dritter Ordnung ergeben.

Es seien nun  $a, b$  und  $l$  in (25) und (26) gewöhnliche komplexe Zahlen. Dann bedeuten (25) und (26) die Homographien der komplexen Geraden bzw. der gewöhnlichen Sphäre. Wegen der Kommutativität der Multiplikation wird (25) in diesem Fall die Gestalt

$$(27) \quad z = \frac{az + b}{-l\bar{b}z + l\bar{a}}, \quad \text{mit} \quad N(a) + N(b) = 1 \quad \text{und} \quad N(l) = 1$$

haben. Die Determinante ist

$$(28) \quad J = l \begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = l[N(a) + N(b)] = l$$

Dividiert man die Koeffizienten der Transformation durch  $\sqrt{l}$ , dann wird  $J = 1$ , und folglich ist

$$(29) \quad l = 1.$$

Diese Normierung beeinflusst wegen  $N(l) = 1$  die Gültigkeit von (17), (18), (19) und daher auch von (14) nicht, also gehört (27) auch im Falle (29) zur Gruppe  $Q_e$ . Dasselbe gilt auch für (26).

Durch Anwendung des Satzes 1. auf  $E^2$  bekommen wir den folgenden, von E. CARTAN herrührenden Satz.

**Satz 2.** *Die ebene elliptische Geometrie ist die Invariantentheorie der zu den Transformationsgleichungen*

$$(30) \quad z' = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}, \quad N(a) + N(b) = 1,$$

und

$$(31) \quad z' = \frac{a\bar{z} + b}{-b\bar{z} + \bar{a}}, \quad N(a) + N(b) = 1,$$

*gehörenden gemischten Gruppe.*

Wir bemerken, daß (30) und (31) die ganze Transformationsgruppe von  $E^2$  geben, da diese, wie bekannt, von drei unabhängigen reellen Parametern abhängt.

#### Literatur.

- [1] E. CARTAN, Leçons sur la géométrie projective complexe, Paris, 1931.
- [2] J. BILO, Onderzoekingen betreffende de meetkundige grondslagen van de projectieve quaternionenmeetkunde, Brussel, 1949.
- [3] E. STUDY, Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen, I. Math. Z. 18 (1923), 55—86.

(Eingegangen am 4. März 1959.)