

Espaces à connexion affine tridimensionnels, qui admettent la notion d'aire.

Dédié à Monsieur O. Varga à l'occasion de son cinquantième anniversaire.

Par ADOLF HAIMOVICI (Jassy).

I. On a étudié avec des méthodes diverses les espaces généraux qui admettent la notion d'aire. C'est E. CARTAN [1] qui a posé le problème d'une manière tout-à-fait générale; le même problème peut être étudié dans le cadre de la théorie des espaces considérés par M. KAWAGUCHI [4] (voir une bibliographie dans [3] et [5]) et dont des belles recherches ont été conduites par M. O. VARGA [5].

Dans un cas particulier, nous avons étudié [2] des espaces à connexion affine, qui admettent la notion d'aire d'un triangle, celle-ci étant définie par une certaine fonction des composantes des deux vecteurs qui sont des côtés du triangle.

Nous nous proposons maintenant de trouver les espaces à connexion affine tridimensionnels qui admettent la notion d'aire d'un triangle déterminé par deux vecteurs X^i et Y^i , issus d'un même point M de l'espace; cette aire sera définie comme une fonction satisfaisant aux axiomes suivants:

- A) elle est indépendante du système de coordonnées;
- B) elle est invariante par rapport au transport parallèle des deux vecteurs;
- C) elle est homogène du premier degré par rapport aux composantes X^i et Y^i des deux vecteurs, séparément;
- D) si N et P sont les extrémités de X^i et Y^i respectivement et Q un point du segment NP , alors on a

$$(*) \quad \text{aire } MNP = \text{aire } MNQ + \text{aire } MQP.$$

Évidemment ces axiomes peuvent servir de définition pour la notion d'aire dans un espace à un nombre quelconque de dimensions; nous nous occupons seulement des espaces tridimensionnels parce que les espaces à un nombre plus grand de dimensions conduisent à des systèmes d'équations aux dérivées partielles plus compliquées.

La recherche de ces invariants se poursuivra d'une manière analogue à celle que nous avons utilisée pour les invariants au transport parallèle d'une n -uple [3] de vecteurs.

2. Soient L_3 un espace à connexion affine tridimensionnel, Γ_{ij}^k les coefficients de sa connexion, supposée non-symétrique, R_{ijk}^j les composantes du tenseur de courbure, et $f(x^i; X^i; Y^i)$ la fonction cherchée. Les conditions B et C conduisent aux équations

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} - \Gamma_{hi}^k \left(X^h \frac{\partial f}{\partial X^k} + Y^h \frac{\partial f}{\partial Y^k} \right) = 0,$$

$$(2) \quad X^i \frac{\partial f}{\partial X^i} - f = 0,$$

$$(3) \quad Y^i \frac{\partial f}{\partial Y^i} - f = 0.$$

Si l'on introduit la fonction

$$(4) \quad F = f - f(x^i; X^i; Y^i)$$

le système de plus haut devient :

$$(5) \quad \frac{\partial F}{\partial x^i} - \Gamma_{hi}^k \left(X^h \frac{\partial F}{\partial X^k} + Y^h \frac{\partial F}{\partial Y^k} \right) = 0,$$

$$(6) \quad X^i \frac{\partial F}{\partial X^i} + f \frac{\partial F}{\partial f} = 0,$$

$$(7) \quad Y^i \frac{\partial F}{\partial Y^i} + f \frac{\partial F}{\partial f} = 0.$$

Les équations qui complètent ce système sont, comme on s'en assure aisément

$$(8) \quad \begin{cases} R_{ijk}^j \left(X^i \frac{\partial F}{\partial X^j} + Y^i \frac{\partial F}{\partial Y^j} \right) = 0, \\ R_{ijk,m}^j \left(X^i \frac{\partial F}{\partial X^j} + Y^i \frac{\partial F}{\partial Y^j} \right) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ (R_{\alpha hk}^j R_{i pq}^{\alpha} - R_{\alpha pq}^j R_{i hk}^{\alpha}) \left(X^i \frac{\partial F}{\partial X^j} + Y^i \frac{\partial F}{\partial Y^j} \right) = 0. \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

3. On voit qu'une fonction de x^i et du bivecteur X^i, Y^i satisfait à l'axiome D . Soit

$$(**) \quad f = \varphi(x^i; X^2 Y^3 - X^3 Y^2, \dots)$$

cette fonction.

Nous nous bornerons dans cette Note à étudier les espaces qui admettent une aire, dont l'expression est donnée par une fonction de la forme (**). Si nous posons

$$u_1 = X^2 Y^3 - X^3 Y^2; \quad u_2 = X^3 Y^1 - X^1 Y^3; \quad u_3 = X^1 Y^2 - X^2 Y^1$$

et considérons φ donnée par :

$$g(x^i; u_i, \varphi) = \text{const.},$$

on déduit de (5), (6), (7), (8) que g doit satisfaire aux équations :

$$(9) \quad \frac{\partial g}{\partial x^i} - \Gamma_{hi}^k u_k \frac{\partial g}{\partial u_h} + \Gamma_i u_h \frac{\partial g}{\partial u_h} = 0,$$

$$(10) \quad u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} - \varphi \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(11_1) \quad R_{ihk}^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - S_{hk} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

$$(11_2) \quad R_{ihk,m}^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - S_{hk,m} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

.....

$$(11_3) \quad (R_{ahk}^j R_{ipq}^a - R_{apq}^j R_{ihk}^a) u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

.....

$$(i=1, 2, 3),$$

où nous avons posé :

$$(12) \quad \Gamma_i = \Gamma_{ai}^a, R_{ahk}^a = S_{hk}, \dots$$

Les équations (11) ont la forme générique

$$(13) \quad a_i^{(p)j} u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0; \quad \begin{pmatrix} i, j=1, 2, 3 \\ p=1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Il est évident que pour que le système (9), (10), ... admette une intégrale, il faut que, parmi les équations (13), il n'en existe que deux au plus, linéairement indépendantes; c'est-à-dire, si m_h^k, a_h^k, b_h^k sont trois systèmes différents de coefficients de trois équations (13) (par exemple $a_h^{(\alpha)k}, a_h^{(\beta)k}, a_h^{(\gamma)k}$), il faut avoir :

$$(14) \quad \Delta = \begin{vmatrix} m_1^j u_j & m_2^j u_j & m_3^j u_j \\ a_1^j u_j & a_2^j u_j & a_3^j u_j \\ b_1^j u_j & b_2^j u_j & b_3^j u_j \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons encore les matrices

$$A^{(p)} = \|a_i^{(p)j}\|$$

et remarquons que dans les équations du type (11₃) les coefficients de $u_j \frac{\partial g}{\partial u_i}$ sont des éléments de matrices du type :

$$(14') \quad A^{(p)} A^{(q)} - A^{(q)} A^{(p)}.$$

Remarquons encore que si l'on fait la transformation

$$(14'') \quad v_i = t_i^j u_j, \quad T = \|t_i^j\|, \quad \det T \neq 0,$$

t_i^j étant des fonctions de x^i , une équation de la forme

$$a_i^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0 \quad A = \|a_i^j\|$$

devient

$$b_i^j v_j \frac{\partial g}{\partial v_i} = 0,$$

où

$$\|b_i^j\| = T A T^{-1} \quad T^{-1} = \|s_i^j\|$$

et le système (9), (10), (11), ... devient :

$$(9') \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} - \gamma_{pi}^q v_q \frac{\partial g}{\partial v_p} + \gamma_i^a v_a \frac{\partial g}{\partial v_a} = 0,$$

$$(10') \quad u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} - \varphi \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(11'_1) \quad \varrho_{i \, hk}^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - \sigma_{hk} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

$$(11'_2) \quad \varrho_{i \, hk, m}^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} - \sigma_{hk, m} u_i \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

.....

$$(11'_3) \quad (\varrho_{a \, hk}^j \varrho_{i \, pq}^a - \varrho_{a \, pq}^j \varrho_{i \, hk}^a) u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0,$$

.....

où

$$(15) \quad \gamma_{pi}^q = \left(t_p^a \Gamma_{ai}^b - \frac{\partial t_p^b}{\partial x^i} \right) s_b^q$$

$$(15') \quad \gamma_i = \gamma_{ai}^a = \Gamma_{ai}^a = \Gamma_i,$$

$$(15'') \quad \varrho_{k \, ih}^j = \frac{\partial \gamma_{ki}^j}{\partial x^h} - \frac{\partial \gamma_{kh}^j}{\partial x^i} - \gamma_{ai}^j \gamma_{kh}^a + \gamma_{ph}^j \gamma_{ki}^p,$$

$$(15''') \quad \sigma_{ih} = \varrho_{a \, ih}^a.$$

Choisissons T de manière que la matrice associée à une équation du type (14)-soit $\|m_j^k\|$ -prenne la forme canonique de Jordan. Évidemment les autres matrices auront des formes du type général.

Si l'on désigne par B^i les matrices

$$B^{(i)} = \|\gamma_{hi}^k - \delta_h^k \gamma_i^h\| = \|\lambda_{hi}^k\|,$$

alors les coefficients des expressions $u_i \frac{\partial g}{\partial u_j}$ dans les équations (11') sont les éléments des matrices

$$(a) \quad C^{(i)} = \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x^j} + B^{(i)} A^{(k)} - B^{(k)} A^{(i)}$$

et ceux des mêmes expressions dans les équations (11'') sont les éléments des matrices

$$(b) \quad D^{ij} = \frac{\partial B^{(i)}}{\partial x^j} - \frac{\partial B^{(j)}}{\partial x^i} - B^{(i)} B^{(j)} + B^{(j)} B^{(i)}.$$

Évidemment ces coefficients placés dans la dernière ligne du déterminant de (14), doivent satisfaire (14). Dans la suite nous supposerons les transformations (14'') effectuées et nous continuerons à désigner les variables par u_i .

4. Considérons d'abord le cas où $\|m_i^j\|$, $\|a_i^j\|$ sont les matrices de deux homographies qui ont un même plan fixe. Soit u_3 ce plan. Les équations (13) correspondantes se réduisent alors à

$$\frac{\partial g}{\partial u_1} = \frac{\partial g}{\partial u_2} = 0,$$

c'est-à-dire le système (9)–(11) admet une intégrale de la forme

$$\varphi = o(x^i) u_3.$$

Les conditions (14) pour (a) et (b) donnent

$$\lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \frac{\partial \lambda_{3i}^3}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{3j}^3}{\partial x^i} = 0,$$

les équations (9') deviennent

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} - \lambda_{3i}^3 \sigma = 0$$

et conduisent à l'invariant

$$A = u_3 e^{\int \lambda_{3i}^3 dx^i}.$$

Nous supposerons dorénavant ce cas exclu.

5. Réduisons maintenant la matrice $\|m_i^j\|$ à la forme canonique de Jordan. Il peut se passer que, dans certains cas particuliers il y ait plusieurs transformations (14'') qui ramènent $\|m_i^j\|$ à la forme canonique; nous utiliserons alors celle qui permet de mettre la seconde matrice $\|a_i^j\|$ sous une forme plus convenable.

D'ailleurs, des deux matrices associées aux équations linéairement indépendantes qui entrent dans notre système (13), nous réduirons à la forme canonique celle qui a un nombre plus grand de racines caractéristiques distinctes et si ces nombres sont égaux nous réduirons celle qui a un nombre moindre de diviseurs élémentaires, si ces nombres sont différents; c'est-à-dire, si les deux matrices sont réductibles (chacune par une transformation convenable) à

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & 1 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \tau_2 & 1 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 1 \\ 0 & 0 & \tau_2 \end{vmatrix},$$

nous réduirons la seconde.

Remarquons encore que d'après la manière dont nous avons posé le problème, il faut que $\frac{\partial g}{\partial \varphi} \neq 0$.

Pour plus de brièveté, nous introduirons la notation déjà utilisé plus haut

$$\lambda_{ik}^j = \gamma_{ik}^j - \delta_i^j \gamma_k.$$

6. Supposons maintenant que $\|m_k^i\|$ peut être ramenée à la forme canonique

$$(A) \quad M = \begin{vmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{vmatrix},$$

τ_i étant les racines caractéristiques de $\|m_i^j\|$, qui sont évidemment des fonctions de x^i , et que la matrice associée à la troisième équation qui est utilisée en (14) — $\|b_i^j\|$ — est la matrice $\|m_i^j\| \|a_i^j\| - \|a_i^j\| \|m_i^j\|$; c'est-à-dire la matrice de l'équation du type (11'), formée à l'aide des équations

$$m_i^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_j} = 0, \quad a_i^j u_j \frac{\partial g}{\partial u_i} = 0.$$

Ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} \tau_1 u_1 & \tau_2 u_2 & \tau_3 u_3 \\ a_1^i u_i & a_2^i u_i & a_3^i u_i \\ (\tau_1 - \tau_j) a_1^j u_j & (\tau_2 - \tau_j) a_2^j u_j & (\tau_3 - \tau_j) a_3^j u_j \end{vmatrix} = 0$$

et conduit aux possibilités suivantes :

$$\text{I.} \quad a_1^2 = a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = a_3^1 = a_3^2 = 0$$

Dans ce cas on doit avoir

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ a_1^1 & a_2^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

afin que l'équation (10') ne se réduise pas à

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0,$$

ce qui conduirait à une impossibilité pour notre problème géométrique.

Les conditions pour que le déterminant (14), ayant dans sa dernière ligne les coefficients b_i^j d'une équation quelconque de (11'), soit nul, conduisent à

$$b_1^2 = b_1^3 = b_2^1 = b_2^3 = b_3^1 = b_3^2 = 0,$$

c'est-à-dire à :

$$\lambda_{ik}^j = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{D_i}{D} = p_i = \text{const.}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ik}^i}{\partial x^h} - \frac{\partial \lambda_{ih}^i}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{ne pas sommer})$$

si aucun des déterminants de deuxième ordre de la matrice

$$M = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ a_1^1 & a_2^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, D_i étant les compléments algébriques des éléments de la première ligne de D_3 ; ou bien à :

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \frac{D_i}{D} = p_i = \text{const.}$$

si

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ a_1^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

les autres déterminants de M étant, bien entendu, différents de zéro.

L'invariant cherché, qui s'obtient en intégrant le système (9'), et les autres transformées de (10'), (11'), ... est alors :

$$A = u_1^{p_1} u_2^{p_2} u_3^{p_3} \exp \int p_i \lambda_{ik}^i dx^k.$$

$$\text{II.} \quad a_1^2 = a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = 0, \quad a_1^1 = k\tau_1, \quad a_2^2 = k\tau_2.$$

(14) donne alors pour une matrice quelconque $\|b_i^j\|$:

$$b_1^2 = b_2^1 = b_2^3 = b_3^1 = \tau_1 b_2^2 - \tau_2 b_1^1 = 0.$$

Il faut avoir encore dans ce cas $\tau_1 \neq \tau_2$, car autrement on obtiendrait $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, ce qui est impossible. Les conditions de plus haut donnent alors

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} = \text{const.}, \quad \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} = \text{const.}, \quad \lambda_{2i}^1 = \lambda_{1i}^2 = 0, \\ \frac{\partial(\tau_2 \lambda_{1i}^1 - \tau_1 \lambda_{2i}^2)}{\partial x^j} - \frac{(\tau_2 \lambda_{1j}^1 - \tau_1 \lambda_{2i}^2)}{\partial x^i} = 0 \end{aligned}$$

et l'invariant cherché est

$$A = u_1^{\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}} u_2^{\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}} \exp \left(\int \frac{\tau_2 \lambda_{1i}^1 - \tau_1 \lambda_{2i}^2}{\tau_2 - \tau_1} dx^i \right).$$

III. Le cas

$$\begin{aligned} 2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3 = 0, \quad a_1^3 = a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = 0, \\ a_1^1 = k\tau_1, \quad a_2^2 = k\tau_2, \quad a_3^3 = k\tau_3, \end{aligned}$$

admet les trois possibilités suivantes:

$$\text{a)} \quad a_2^3 = 0, \quad b_2^1 = b_2^3 = b_3^1 = b_3^2 = \tau_3 b_2^2 - \tau_2 b_3^3 = 0, \quad a_1^2 = 1$$

qui conduit à:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_2} = \text{const.}, \quad \lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_2 \lambda_{3i}^3}{\tau_2 - \tau_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2j}^2 - \tau_2 \lambda_{3j}^3}{\tau_2 - \tau_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad a_1^2 = a_2^3 = 1, \quad b_1^3 = b_3^1 = 0, \quad b_1^1 = k\tau_1, \quad b_2^2 = k\tau_2, \\ b_3^3 = k\tau_3, \quad b_1^2 - b_2^3 = 0, \quad b_3^2 = b_2^1 = 0, \end{aligned}$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_2} = \text{const.}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}, \quad \lambda_{1i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = \lambda_{2i}^3, \\ \lambda_{1i}^1 + \lambda_{3i}^3 - 2\lambda_{2i}^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\tau_1} \left(\frac{\partial \lambda_{1k}^1}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{1j}^1}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\tau_2} \left(\frac{\partial \lambda_{2k}^2}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{2j}^2}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\tau_3} \left(\frac{\partial \lambda_{3k}^3}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{3j}^3}{\partial x^k} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad a_1^2 = a_2^3 = 1, \quad b_1^3 = b_3^1 = 0, \quad b_3^2 + b_2^3 = 0, \quad \tau_2 = b_2^2 = 0, \\ \tau_3 b_1^1 - \tau_1 b_3^3 = 0 \end{aligned}$$

qui conduit à

$$\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^3 = \lambda_{1i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 + \lambda_{2i}^3 = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda_{1i}^1 + \lambda_{3i}^3)}{\partial x^j} - \frac{\partial(\lambda_{1j}^1 + \lambda_{3j}^3)}{\partial x^i} = 0.$$

Toutes ces possibilités conduisent à la formule

$$A = u_3 \left(\frac{u_2^2 - 2a_2^3 u_1 u_3}{u_3^2} \right)^{\frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1}} \exp \int \frac{\tau_3 \lambda_{1i}^1 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_3 - \tau_1} dx^i$$

de l'aire.

Dans tous ces cas l'hypothèse $\tau_1 = \tau_3$ conduirait à $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, c'est-à-dire à une impossibilité.

IV. $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 = 0$, $a_1^2 = a_2^1 = a_1^1 + a_2^2 = 0$, $a_1^3 = \mu a_3^2$, $a_2^3 = \mu a_3^1$.

μ étant un facteur quelconque. Ce cas conduit à :

$$b_1^2 = b_2^1 = b_1^1 + b_2^2 = b_3^3 = b_1^3 - \mu b_3^2 = b_2^3 - \mu b_3^1 = 0,$$

et, comme conséquence, à :

$$\lambda_{1i}^2 = \lambda_{2i}^1 = 0,$$

$$\lambda_{1i}^3 = \mu \lambda_{3i}^2 = \lambda_{2i}^3 - \mu \lambda_{3i}^1 = 0,$$

$$2\lambda_{3i}^3 - \lambda_{1i}^1 - \lambda_{2i}^2 = 0, \quad \mu = \text{const.}, \quad \frac{\partial \lambda_{3i}^3}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_{3j}^3}{\partial x^i} = 0.$$

L'invariant aréolaire cherché est dans ce cas :

$$A = (2u_1 u_2 - \mu u_3^2)^{1/2} \exp \int \lambda_{3i}^3 dx^i.$$

V. Le cas

$$\tau_2 - \tau_3 = 0,$$

$$a_1^2 = a_1^3 = a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = a_2^2 - a_3^3 = 0$$

amène :

$$b_3^1 = b_2^1 = b_3^2 = b_3^3 - b_2^2 = \tau_2 b_1^2 = \tau_2 b_1^3 = 0$$

$$(\tau_1 b_3^3 - \tau_2 b_1^1) a_2^3 - (\tau_1 a_2^2 - \tau_2 a_1^1) b_2^3 = 0, \quad \tau_2 \neq \tau_1,$$

d'où l'on déduit

$$\tau_2 \lambda_{1i}^2 = \tau_2 \lambda_{1i}^3 = \lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial(\lambda_{2i}^2 - \lambda_{3i}^3)}{\partial x^j} - \frac{\partial(\lambda_{2j}^2 - \lambda_{3j}^3)}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \log \frac{\tau_1 a_2^2 - \tau_2 a_1^1}{(\tau_2 - \tau_1) a_2^3} = \frac{\lambda_{3i}^3 - \lambda_{2i}^2}{\tau_2 - \tau_1}$$

et si l'on met :

$$A_i = \frac{\tau_2 \lambda_{1i}^1 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_2 - \tau_1} + \lambda_{2i}^3 \frac{\tau_1 a_2^2 - \tau_2 a_1^1}{(\tau_2 - \tau_1) a_2^3},$$

alors $A_i dx^i$ est une différentielle exacte.

La formule de l'aire est alors

$$A = u_1^{\frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}} u_2^{\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}} \exp \left\{ \frac{\tau_1 a_2^2 - \tau_2 a_1^1}{(\tau_2 - \tau_1) a_2^3} \frac{u_2}{u_3} + \int A_i dx^i \right\}.$$

7. Si la matrice M a la forme canonique

$$(B) \quad M = \begin{vmatrix} \tau_1 & 1 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{vmatrix} \quad \sigma = \tau_1 - \tau_3$$

l'équation (14) devient

$$\begin{vmatrix} \tau_1 u_1 + u_2 & \tau_1 u_2 & \tau_3 u_3 \\ a_1^i u_i & a_2^i u_i & a_3^i u_i \\ a_2^1 u_1 + (a_2^2 - a_1^1) u_2 + \sigma a_1^3 & -a_2^1 u_2 + \sigma a_2^3 u_3 & -a_3^1 u_1 - (a_3^1 + \sigma a_3^2) u_2 \end{vmatrix} = 0$$

et conduit aux possibilités suivantes :

$$VI. \quad a_2^1 = a_2^2 = a_3^1 = a_3^2 = 0, \quad a_2^3 = k\tau_1, \quad a_3^3 = k\tau_3.$$

Ce cas implique :

$$b_2^1 = b_2^2 = b_3^1 = b_3^2 = \tau_1 b_3^3 - \tau_3 b_1^1 = 0, \quad \tau_1 \neq \tau_3,$$

et par suite :

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^2 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_3 - \tau_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2j}^2 - \tau_1 \lambda_{3j}^3}{\tau_3 - \tau_1} \right) = 0.$$

La formule de l'aire, obtenue par l'intégration du système correspondant est :

$$A = u_2^{\frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1}} u_3^{\frac{\tau_1}{\tau_3 - \tau_1}} \exp \int \frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_3 - \tau_1} dx^i.$$

$$VII. \quad a_1^2 = 1, \quad a_1^3 = a_2^1 = a_2^2 = a_3^1 = a_3^2 = \tau_1 a_3^3 - \tau_3 a_1^1 = a_1^1 - a_2^2 = 0.$$

Ce cas conduit à :

$$b_3^2 = b_3^1 = b_2^3 = b_2^1 = \tau_1 b_3^3 - \tau_3 b_1^1 = 0, \quad \tau_1 \neq \tau_3$$

ce qui implique:

$$\frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}, \quad \lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_3 - \tau_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2j}^2 - \tau_1 \lambda_{3j}^3}{\tau_3 - \tau_1} \right) = 0.$$

L'aire s'exprime alors par la formule

$$A = u_2^{\frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1}} u_1^{\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_3}} \exp \int \frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_3 - \tau_1} dx^i.$$

VIII. $a_1^2 = 1, \quad a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = a_3^1 = a_3^2 = a_1^1 - a_2^2 = 0.$

On obtient alors les relations

$$b_1^3 = b_2^1 = b_2^3 = b_3^1 = b_3^2 = b_1^1 - b_2^2 = 0,$$

$$b_1^2(\tau_1 a_3^3 - \tau_3 a_1^1) + a_1^2(\tau_3 b_1^1 - \tau_1 b_3^3) - b_1^1 a_3^3 + b_3^3 a_1^1 = 0,$$

dont on tire

$$\lambda_{1i}^3 = \lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0,$$

$$\frac{\tau_3 - a_3}{\tau_1 - a_1} = k = \text{const.}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \log(k\tau_1 - \tau_3) - (\lambda_{1i}^1 - \lambda_{2i}^2) = 0, \quad k \neq 1,$$

et la condition pour que

$$dA = \frac{-\lambda_{1i}^2(\tau_3 - k\tau_1) - k\lambda_{2i}^2 + \lambda_{3i}^3}{1 - k} dx^i$$

soit une différentielle exacte. On déduit alors la formule de l'aire

$$A = (u_2^{-k} u_3)^{\frac{1}{1-k}} \exp \left\{ \frac{k\tau_1 - \tau_3}{1-k} \frac{u_1}{u_2} - \int A_i dx^i \right\}.$$

IX. $a_2^1 = a_2^3 = a_3^1 = a_3^2 = 0,$

$$a_1^1 = \tau_1 a_1^2, \quad a_2^2 = \tau_1 a_1^2, \quad a_3^3 = \tau_3 a_1^2.$$

On obtient d'ici

$$b_2^1 = b_2^3 = b_3^1 = b_3^2 = \tau_1 b_3^3 - \tau_3 b_1^1 = 0,$$

et par suite, vu que $\tau_1 \neq \tau_3$,

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2k}^2 - \tau_1 \lambda_{3k}^3}{\tau_3 - \tau_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\tau_3 \lambda_{2h}^2 - \tau_1 \lambda_{3h}^3}{\tau_3 - \tau_1} \right) = 0.$$

On tire ensuite la formule de l'aire :

$$A = u_2^{\frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1}} u_3^{\frac{\tau_1}{\tau_3 - \tau_1}} \exp \int \frac{\tau_3 \lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{3i}^3}{\tau_3 - \tau_1} dx^i.$$

X. $a_1^3 = a_2^1 = a_2^3 = a_1^1 - a_2^2 = a_1^1 - \tau_1 a_1^2 = 0;$

celui-ci impose les conditions

$$b_1^3 = b_2^1 = b_2^3 = b_1^1 - b_2^2 = b_1^1 - \tau_1 b_1^2 = 0,$$

dont on tire

$$\lambda_{1i}^3 = \lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = 0, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial x^i} - (\lambda_{1i}^1 - \lambda_{2i}^2) \tau_1 = 0,$$

$$\frac{\partial (\lambda_{1i}^1 - \lambda_{2i}^2)}{\partial x^j} - \frac{\partial (\lambda_{1j}^1 - \lambda_{2j}^2)}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial (\lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{1i}^2)}{\partial x^j} - \frac{\partial (\lambda_{2j}^2 - \tau_1 \lambda_{1j}^2)}{\partial x^i} = 0.$$

L'expression de l'aire est alors :

$$A = u_2 \exp \left(-\tau_1 \frac{u_1}{u_2} + \int (\lambda_{2i}^2 - \tau_1 \lambda_{1i}^2) dx^i \right)$$

XI. $\tau_1 = \tau_3 = 0, \quad a_1^2 = a_1^1 = a_3^1 = a_3^2 = 0, \quad a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = 0;$

ce cas conduit à :

$$b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_2^2 - b_3^3 = a_2^3 b_3^3 - a_1^1 b_2^3 = 0$$

et ces relations donnent :

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\lambda_{3h}^3 - \lambda_{2h}^2) - \frac{\partial}{\partial x^h} (\lambda_{3k}^3 - \lambda_{2k}^2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{a_2^3 \lambda_{3h}^3 - a_1^1 \lambda_{2h}^3}{a_2^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{a_2^3 \lambda_{3k}^3 - a_1^1 \lambda_{2k}^3}{a_2^3} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \log \left(\frac{a_1^1}{a_2^3} \right) = \lambda_{3i}^3 - \lambda_{2i}^2.$$

L'aire est donnée par

$$A = u_3 \exp \left\{ -\frac{a_1^1}{a_2^3} \frac{u_2}{u_3} + \int \frac{a_2^3 \lambda_{3i}^3 - a_1^1 \lambda_{2i}^3}{a_2^3} dx^i \right\}.$$

8. Si la matrice $\|m_i^j\|$ a la forme

$$(C) \quad \begin{vmatrix} \tau & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 1 \\ 0 & 0 & \tau \end{vmatrix},$$

l'équation (14) devient

$$\begin{vmatrix} \tau u_1 + u_2 & \tau u_2 + u_3 & \tau u_3 \\ a_1^i u_i & a_2^i u_i & a_3^i u_i \\ a_2^1 u_1 + (a_2^2 - a_1^1) u_2 + (a_2^3 - a_1^2) u_3 & a_3^1 u_1 + (a_3^2 - a_2^1) u_2 + (a_3^3 - a_2^2) u_3 & -a_3^1 u_1 - a_3^2 u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est satisfaite dans les cas suivants :

$$XII. \quad a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = 0, \quad a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = \tau a_2^3.$$

De cette condition on tire ensuite

$$b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_3^3 - b_2^2 = b_3^3 - \tau b_2^3 = 0,$$

qui imposent les relations :

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0,$$

et les conditions que

$$d\sigma = (\lambda_{2i}^2 - \lambda_{3i}^3) dx^i,$$

$$d\gamma = (\lambda_{3i}^3 - \tau \lambda_{2i}^3) dx^i,$$

soient les différentielles exactes.

La formule de l'aire est dans ce cas

$$A = u_3 \exp \left\{ -\tau \frac{u_2}{u_3} + \int (\lambda_{3i}^3 - \tau \lambda_{2i}^3) dx^i \right\}.$$

$$XIII. \quad a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = a_2^1 = a_3^1 = a_3^2 = a_1^2 - b a_2^3 = 0.$$

Ce cas nous conduit aux deux possibilités suivantes :

$$a) \quad a_1^2 = 0,$$

$$b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_2^2 - b_3^3 = \tau b_2^3 - b_3^3 = 0, \quad \tau \neq 0,$$

c'est-à-dire à :

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \tau (\lambda_{2i}^2 - \lambda_{3i}^3), \quad \frac{\partial (\lambda_{3h}^3 - \tau \lambda_{2h}^3)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\lambda_{3k}^3 - \tau \lambda_{2k}^3)}{\partial x^h} = 0,$$

$$b) \quad b_2^1 = b_3^1 = b_3^2 = b_2^2 - b_3^3 = b_1^2 - b_2^2 = b_1^3 - b_3^3 = 0,$$

$$a_1^3 (\tau b_2^3 - b_3^3) - \tau b_1^3 a_1^2 = 0,$$

c'est-à-dire, si l'on suppose $a_1^3 = 1$,

$$\lambda_{2i}^1 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^2 = 0, \quad \lambda_{1i}^1 + \lambda_{3i}^3 - 2\lambda_{2i}^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \tau [\tau (\lambda_{2i}^2 - \lambda_{3i}^3) - a_1^2 (\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^3)],$$

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial x^i} = a_1^2 [(\lambda_{1i}^1 + \lambda_{2i}^2 - 2\lambda_{3i}^3) + a_1^2 (\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^3)],$$

$$\frac{\partial}{\partial x^h} (\lambda_{3h}^3 + \tau \lambda_{1h}^3) - \frac{\partial}{\partial x^k} (\lambda_{3h}^3 + \tau \lambda_{1h}^3) = 0.$$

La formule de l'aire est dans ces cas

$$A = u_3 \exp \left\{ -\tau \frac{a_1^1 u_2^2 + 2u_2 u_3 - 2a_1^2 u_1 u_3}{2u_3^2} + \int (\lambda_{3i}^3 + \tau \lambda_{1i}^3) dx^i \right\}.$$

XIV.

$$\tau = 0,$$

$$a_1^1 = a_1^2 = a_1^3 = a_2^2 = a_2^3 = a_3^1 = a_3^3 = 0,$$

$$a_2^1 = a_3^2 = 1.$$

On tire d'ici :

$$b_2^2 = b_3^1 = b_1^3 = b_2^1 = b_3^2 = b_1^2 = b_2^3 = b_1^1 = b_3^3 = 0;$$

et comme une conséquence :

$$\lambda_{1i}^2 = \lambda_{1i}^3 = \lambda_{2i}^1 = \lambda_{2i}^3 = \lambda_{3i}^1 = \lambda_{3i}^3 = 0,$$

$$2\lambda_{2i}^2 - \lambda_{1i}^1 - \lambda_{3i}^3 = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_{2h}^2}{\partial x^k} - \frac{\partial \lambda_{2k}^2}{\partial x^h} = 0$$

et la formule de l'aire est :

$$A = (2u_1 u_3 - u_2^2) \exp \int (\lambda_{1i}^1 + \lambda_{3i}^3) dx^i.$$

Évidemment, si parmi les équations (10), (11), ... il y a une seule qui soit linéairement indépendante, il y aura deux invariants aréolaires. Nous laissons de côté ce cas, son étude étant banale.

Bibliographie.

- [1] E. CARTAN, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, *Actualités scientifiques et industrielles* (Paris) **72** (1933).
- [2] A. HAIMOVICI, Spații cu conexiune afină care admit noțiunea de arie, *Acad. R. P. R., Filiala Iași, Studii și cerc. științifice*, **6** (1955), 123—133.
- [3] A. HAIMOVICI, Su alcuni invarianti negli spazi tridimensionali a connessione affine, *Rend. Mat. e Appl. Serie V*, **15** (1956), 385—452.
- [4] A. KAWAGUCHI, Ein metrischer Raum der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist, *Monatsh. Math. Phys.* **45** (1946), 289—297.
- [5] O. VARGA, Eine Charakterisierung der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse mittels eines Satzes über derivierte Matrizen, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 418—430.

(Reçu le 20 janvier 1959.)