

Verallgemeinerung eines Satzes über assoziative Funktionen von mehreren Veränderlichen

Von E. VINCZE (Miskolc)

1. In einer früheren Arbeit [7] haben wir bewiesen, daß man eine in der Menge H definierte Operation

$$(1) \quad u = u_1 u_2 \cdots u_n \quad (u, u_1, \dots, u_n \in H)$$

von n Faktoren unter bestimmten Bedingungen mit Hilfe einer Operation von zwei Veränderlichen darstellen kann; es gilt nämlich der folgende

Satz 1. Wenn die in H definierte Operation (1) den folgenden Bedingungen genügt:

a) es gibt ein festes Elementsystem $c_2, \dots, c_{n-1} (\in H)$, für das die Abbildungen

$$\omega_k(u) = c_k \cdots c_2 u c_{n-1} \cdots c_k \quad (\omega_k(u): H \rightarrow H; k = 2, 3, \dots, n-1)$$

in H eindeutig umkehrbar sind, ($\omega_k^{-1} \omega_k(u) = \omega_k \omega_k^{-1}(u) = u$);

b) die Operation (1) ist assoziativ, d. h. es gilt

$$(2) \quad \begin{cases} (u_1 \cdots u_n) u_{n+1} \cdots u_{2n-1} = u_1 \cdots u_k (u_{k+1} \cdots u_{k+n}) u_{k+n+1} \cdots u_{2n-1} = \\ = u_1 \cdots u_{n-1} (u_n \cdots u_{2n-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, n-2; n \geq 3; u_1, \dots, u_{2n-1} \in H) \end{cases}$$

(vgl. [4]);

dann kann man die Operation (1) in der Form

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 u_2 \cdots u_n = u_1 * [\omega_{n-1}^{-1}(u_2) * [\omega_{n-2}^{-1}(u_3) * \cdots * [\omega_2^{-1}(u_{n-1}) * u_n] \cdots]] \\ (u_1, \dots, u_n \in H; \omega_{n-1}^{-1}(u_2), \dots, \omega_2^{-1}(u_{n-1}): H \rightarrow H) \end{cases}$$

angeben, wo die Operation

$$(4) \quad u * v = u c_{n-1} \cdots c_2 v$$

von zwei Faktoren in H assoziativ ist, also die Menge H bezüglich der Operation (4) eine Halbgruppe bildet.

J. ACZÉL [1] (vgl. [2]) bewies, daß jede eingliedrige streng monotone kontinuierliche Halbgruppe (mit oder ohne Einselement) mit einer Additions-Halbgruppe der reellen Zahlen isomorph ist, d. h. sämtliche stetige streng

monotone Lösungen der Funktionalgleichung

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \quad x, y, z, F \in (a, b)$$

von der Gestalt

$$(5) \quad F(x, y) = \varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)]$$

sind.

Einen ähnlichen, aber nicht so allgemeinen Satz haben wir in [7] für die der Gleichung (2) genügende reelle Funktion (1) formuliert. In dieser Arbeit werden wir diesen Satz verallgemeinern.

Wir bemerken, daß A. P. GUINAND [5] sich seit des Abschlusses der Arbeit [7] mit assoziativen Systemen beschäftigt und ohne Beweis die Behauptung ausgesprochen hat, daß jede nichttriviale assoziative Funktion von drei Veränderlichen in einer der Gestalten

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1}[\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)],$$

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(x)\varphi(z)}{\varphi(y)}\right],$$

$$F(x, y, z) = \varphi^{-1}\left[-\frac{\varphi(x)\varphi(z)}{\varphi(y)}\right]$$

darstellbar ist.

2. Wir brauchen die Lösung der Funktionalgleichung

$$(6) \quad g\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i),$$

die eine Verallgemeinerung der PEXIDERSchen Funktionalgleichung ist (vgl. [6]). Für diese Gleichung gilt der folgende

Satz 2. *Die Lösungen der Funktionalgleichung (6) in einer bezüglich der Addition geschlossenen Menge sind die Funktionen*

$$(7) \quad g(x) = h(x) + c_0, \quad g_i(x) = h(x) + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

wo die Funktion $h(x)$ auf einer bezüglich der Addition der reellen Zahlen geschlossenen Menge der CAUCHYSchen Funktionalgleichung

$$(8) \quad h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$$

genügt, und die Zahlen c_i ($i = 0, 1, \dots, n$) beliebige Konstanten mit der Beschränkung

$$(9) \quad c_0 = \sum_{i=1}^n c_i$$

sind.

BEWEIS. Setzen wir in (6) $x_i = \alpha_i$ (konst.), dann ist

$$\beta_0 = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n g_i(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i,$$

also kann man mit der Bezeichnung $x_i = \alpha_i + \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) statt (6) die Gleichung

$$(10) \quad g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \xi_i\right) - \beta_0 = \sum_{i=1}^n [g_i(\alpha_i + \xi_i) - \beta_i]$$

schreiben. Bei

$$(11) \quad g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i + \xi\right) - \beta_0 = h(\xi)$$

und

$$(12) \quad g_i(\alpha_i + \xi) - \beta_i = h_i(\xi) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

folgt die Gleichung

$$(13) \quad h\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i(\xi_i)$$

aus (10). Aus der Gleichung (12) ergibt sich $h_i(0) = 0$ falls $\xi = 0$, also wenn man in (13)

$$\xi_1 = \dots = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = \dots = \xi_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

schreibt, dann erhält man

$$h_i(\xi_i) = h(\xi_i),$$

und (13) geht mit den Einsetzungen $\xi_3 = \dots = \xi_n = 0$ tatsächlich in die CAUCHYSche Gleichung (8) über; und die Formeln

$$g(x) = h\left(x - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) + \beta_0 = h(x) + h\left(-\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) + \beta_0 = h(x) + c_0$$

und

$$g_i(x) = h(x - \alpha_i) + \beta_i = h(x) + h(-\alpha_i) + \beta_i = h(x) + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

folgen aus den Gleichungen (11) und (12). Die Gleichung (9) ergibt sich, wenn man in der Gleichung (6) die Funktionen $g(x)$ und $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) einsetzt.

3. Es sei

$$(14) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$$

eine reelle Funktion von n Veränderlichen; wir können den in [7] ausgesprochenen Satz folgendermaßen verschärfen:

Satz 3. Die für reelle Zahlen definierte Funktion (14) genüge den folgenden Bedingungen:

- c) der Definitionsbereich und bei Konstanthalten von $n-1$ Veränderlichen auch der Wertevorrat der Funktion F ist für alle Veränderlichen dasselbe reelle Intervall $I \equiv (a, b)$;
 d) die Funktion F ist stetig und streng monoton in allen Veränderlichen;
 e) die Funktion F ist assoziativ, d. h. es gilt (2) für (14);

dann kann man die Funktion F für gerade n in der Form

$$(15) \quad F = x_1 x_2 \cdots x_n = \psi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \psi(x_i) \right]$$

darstellen, für ungerade n gilt eine der folgende Darstellungen

$$(16_1) \quad F = x_1 x_2 \cdots x_n = \psi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \psi(x_i) \right],$$

bzw.

$$(16_2) \quad F = x_1 x_2 \cdots x_n = \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \varphi(x_i) \right],$$

wo die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ($x \in I$; $\varphi, \psi: I \rightarrow I$), und folglich auch ihre Umkehrfunktionen $\varphi^{-1}(x)$, $\psi^{-1}(x)$ stetig und streng monoton sind.

BEMERKUNG. In [7] haben wir außer den Bedingungen c), d), e) auch die Bedingung gefordert, daß es ein festes Element $e(\in I)$ gibt, für das

$$F(e, e, \dots, e) = e$$

gilt, und dann folgt auch $\psi(e) = 0$.

BEWEIS. Die den Bedingungen c), d), e) genügende Funktion kann man nach dem Satz 1 und der Gleichung (5) in der Form

$$(17) \quad F = \varphi^{-1} \left[\varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_i) + \varphi(x_n) \right]$$

schreiben, wo

$$f_i(x_i) = \varphi \omega_{n-i+1}^{-1}(x_i) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

ist. Setzen wir die Funktion (17) in die Gleichung (2) ein, dann erhalten wir die Gleichung

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi^{-1} \left\{ \varphi \varphi^{-1} \left[\varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_i) + \varphi(x_n) \right] + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_{n-1+i}) + \varphi(x_{2n-1}) \right\} = \\ & = \varphi^{-1} \left\{ \varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{k-1} f_i(x_i) + f_k \varphi^{-1} \left[\varphi(x_k) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_{k-1+i}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varphi(x_{k+n-1}) \right] + \sum_{i=k+1}^{n-1} f_i(x_{n-1+i}) + \varphi(x_{2n-1}) \right\} \\ & \quad (k = 2, 3, \dots, n-1), \end{aligned} \right.$$

d. h. die Gleichung

$$(19) \quad \begin{cases} f_k \varphi^{-1} [\varphi(x_k) + \sum_{i=2}^{n-1} f_i(x_{k-1+i}) + \varphi(x_{k+n-1})] = \\ = \sum_{i=k}^{n-1} f_i(x_i) + \varphi(x_n) + \sum_{i=2}^k f_i(x_{n-1+i}) \end{cases} \quad (k=2, 3, \dots, n-1).$$

Nimmt man in (19) $k=2$ und

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi^{-1}(y_1), \quad x_{n+1} = \varphi^{-1}(y_n), \\ x_{i+1} &= f_i^{-1}(y_i), \quad (i=2, 3, \dots, n-1) \end{aligned}$$

dann kann man statt (19) die Gleichung

$$(20) \quad f_2 \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n y_i \right] = f_2 \varphi^{-1}(y_1) + \sum_{i=3}^{n-1} f_i f_{i-1}^{-1}(y_{i-1}) + \varphi f_{n-1}^{-1}(y_{n-1}) + f_2 \varphi^{-1}(y_n)$$

schreiben, die von der Gestalt (6) ist.

Aus der Bedingung d) folgt, daß die Funktionen f_i und f_i^{-1} ($i=2, 3, \dots, n-1$) stetig und streng monoton sind; darum genügt es, wenn man nur die stetige und streng monotone Lösung der Gleichung (8) sucht. Es ist bekannt [3], daß die Gleichung (8) als einzige stetige und streng monotone Lösung die Funktion $h(x) = cx$ ($c \neq 0$, konst.) besitzt. Darum sind die in der Gleichung (20) stehenden Funktionen nach dem Satz 2 die folgenden:

$$\begin{aligned} (21) \quad & f_2 \varphi^{-1}(y) = cy + c_0, \\ (22) \quad & f_2 \varphi^{-1}(y_1) = cy_1 + c_1, \\ (23) \quad & f_i f_{i-1}^{-1}(y_{i-1}) = cy_{i-1} + c_{i-1}, \quad (i=3, 4, \dots, n-1) \\ (24) \quad & \varphi f_{n-1}^{-1}(y_{n-1}) = cy_{n-1} + c_{n-1}, \\ (25) \quad & f_2 \varphi^{-1}(y_n) = cy_n + c_n. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (9), (21), (22), (25) ergibt sich

$$(26) \quad c_0 = c_1 = c_n = \sum_{i=1}^n c_i.$$

Aus den Gleichungen (24), bzw. (23) folgen

$$(27) \quad \varphi(y) = c f_{n-1}(x) + c_{n-1},$$

bzw.

$$(28) \quad \begin{cases} f_i(x) = c f_{i-1}(x) + c_{i-1} = c[c f_{i-2}(x) + c_{i-2}] + c_{i-1} = \dots \\ \dots = c^{i-2} f_2(x) + \sum_{r=0}^{i-3} c^r c_{i-1-r} \end{cases} \quad (i=3, 4, \dots, n-1).$$

Da laut (22)

$$f_2(x) = c\varphi(x) + c_1$$

gilt, folgt

$$(29) \quad f_i(x) = c^{i-1}\varphi(x) + \sum_{r=0}^{i-2} c^r c_{i-1-r} \quad (i=2, 3, \dots, n-1)$$

aus (28). Ist $i=n-1$ in (29), und setzen wir dies in die Gleichung (27) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$(30) \quad \varphi(x) = c^{n-1}\varphi(x) + \sum_{r=-1}^{n-3} c^{r+1} c_{n-2-r}.$$

Die Gleichung (30) kann für beliebige x nur dann gelten, wenn

$$(31) \quad c^{n-1} = 1$$

und

$$(32) \quad \sum_{r=-1}^{n-3} c^{r+1} c_{n-2-r} = 0$$

ist. Bei beliebigem ganzem $n(\geq 3)$ ist $c=1$ eine Lösung von (31), und dann geht die Gleichung (32) in (26) über. Setzen wir in der Gleichung (29) $c=1$, dann ist

$$(33) \quad f_i(x) = \varphi(x) + \sum_{r=1}^{i-1} c_r \quad (i=2, 3, \dots, n-1).$$

Man kann leicht einsehen, daß die Funktionen (33) der Gleichung (18) tatsächlich genügen. Schreiben wir die Funktionen (33) in (17) ein, dann erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} F &= \varphi^{-1} \left\{ \varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[\varphi(x_i) + \sum_{r=1}^{i-1} c_r \right] + \varphi(x_n) \right\} = \\ &= \varphi^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\varphi(x_k) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{r=1}^{i-1} c_r \right] - \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{r=1}^{i-1} c_r \right\}, \end{aligned}$$

woraus die Darstellungen (15), bzw. (16₁) mit der Bezeichnung

$$\varphi(x) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{r=1}^{i-1} c_r = \psi(x)$$

tatsächlich folgen.

Ist $n(\geq 3)$ eine ungerade Zahl, dann besitzt die Gleichung (31) auch die Lösung $c=-1$, also folgt

$$(34) \quad f_i(x) = (-1)^{i-1} \varphi(x) + \sum_{r=0}^{i-2} (-1)^r c_{i-1-r} \quad (i=2, 3, \dots, n-1)$$

aus (29). Setzen wir die Funktionen (34) in die Gleichung (19) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-1} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^{\nu} c_{i-1-\nu} + \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^{\nu} c_{k-1-\nu} = \\ & = \sum_{i=k}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^{\nu} c_{i-1-\nu} + \sum_{i=2}^k \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^{\nu} c_{i-1-\nu}, \end{aligned}$$

d. h. es ist

$$[(-1)^{k-1} - 1] \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^{\nu} c_{i-1-\nu} = 0.$$

Diese Gleichung kann für jedes k ($= 2, 3, \dots, n-1$) nur dann gelten, wenn

$$(35) \quad \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^{\nu} c_{i-1-\nu} = 0$$

ist. Schreiben wir die Funktionen (34) in die Gleichung (17) ein und beachten dabei (35), dann erhalten wir mit der Umformung

$$\begin{aligned} F &= \varphi^{-1} \left\{ \varphi(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[(-1)^{i-1} \varphi(x_i) + \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^{\nu} c_{i-1-\nu} \right] + \varphi(x_n) \right\} = \\ &= \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \varphi(x_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i-2} (-1)^{\nu} c_{i-1-\nu} \right] = \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \varphi(x_i) \right] \end{aligned}$$

tatsächlich die Darstellung (16₂).

Damit ist der Satz 3 vollständig bewiesen.

Literatur

- [1] J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bull. Soc. Math. France* **76** (1949), 59—64.
- [2] J. ACZÉL, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel und Stuttgart*, 1961.
- [3] A. L. CAUCHY, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1. Analyse algébrique, *Paris*, 1821; Oeuvres II^e série t. III, *Paris*, 1897, 98—113.
- [4] W. DÖRNTE, Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, *Math. Z.* **29** (1928), 1—19.
- [5] A. P. GUINAND, Les équations fonctionnelles de la loi d'associativité ternaire, *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959), 23—24.
- [6] W. PEXIDER, Notiz über Funktionaltheoreme, *Monatsh. Math.* **14** (1902), 293—301.
- [7] E. VINCZE, Über die Charakterisierung der assoziativen Funktionen von mehreren Veränderlichen, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 241—253.

(Eingegangen am 15. August 1959;
in veränderter Gestalt am 10. April 1960.)