

Über die Divergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

Einleitung

In dieser Arbeit werden wir die folgenden Sätze beweisen.

Satz 1. *Damit die Orthogonalreihe*

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_i(x)\}$ im Grundintervall $[a, b]$ fast überall konvergiert, ist es notwendig, daß die Bedingung

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log_+^2 \frac{1}{a_i^2} < \infty^1)$$

gilt.

Satz 2. *Damit die Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_i(x)\}$ in $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$ -summierbar ist, ist es notwendig, daß die Bedingung*

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_i^2 \log_+^2 \frac{1}{A_i^2} < \infty$$

mit $A_i^2 = a_{2^{i-1}+1}^2 + \dots + a_{2^i}^2$ ($i = 1, 2, \dots$) gilt.

Der Satz 1 gibt eine Antwort auf ein Problem von G. ALEXITS²⁾. Nach dem bekannten Satz von D. MENCHOFF und H. RADEMACHER³⁾ folgt aus

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 i < \infty,$$

¹⁾ In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis e verwendet. Es sei weiterhin

$$\log_+ \frac{1}{a_i^2} = \begin{cases} \log \frac{1}{a_i^2} & \text{für } a_i^2 \leq \frac{1}{e}, \\ 1 & \text{für } a_i^2 > \frac{1}{e} \text{ oder } a_i = 0. \end{cases}$$

²⁾ G. ALEXITS, Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, *Budapest*, 1960, S. 101.

³⁾ D. MENCHOFF, Sur les séries des fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.* **4** (1923), 92–105; H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.* **87** (1922), 112–138.

daß die Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_i(x)\}$ in $[a, b]$ fast überall konvergiert und nach dem Satz 1 ergibt sich, daß die Bedingung (2) aus (4) folgt. Es sei $a_i^2 \geq a_{i+1}^2$ ($i = 1, 2, \dots$). Ist die Bedingung (2) erfüllt, dann gilt $\{a_i\} \in l^2$, d. h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

Dann ist aber $a_i^2 = o(i^{-1})$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 i = O(1) \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 \frac{1}{a_i^2} < \infty.$$

Im Falle $a_i^2 \geq a_{i+1}^2$ ($i = 1, 2, \dots$) sind also die Bedingungen (2) und (4) gleichwertig. Satz 1 ist also eine Verallgemeinerung eines meiner vorherigen Resultate⁴⁾.

Nach dem bekannten Satz von S. KACZMARZ und D. MENCHOFF⁵⁾ folgt aus

$$(5) \quad \sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 (\log \log i)^2 < \infty,$$

daß die Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_i(x)\}$ in $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$ -summierbar ist und nach dem Satz 2 ergibt sich, daß die Bedingung (3) aus (5) folgt. Es sei $ia_i^2 \geq (i+1)a_{i+1}^2$ ($i = 1, 2, \dots$). Ist die Bedingung (3) erfüllt, dann gilt $\{A_i\} \in l^2$. Es kann leicht eingesehen werden, daß $A_i^2 = o(i^{-1})$ ist und die Abschätzung

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 (\log \log i)^2 = O(1) \sum_{i=2}^{\infty} A_i^2 \log^2 i = O(1) \sum_{i=2}^{\infty} A_i^2 \log^2 \frac{1}{A_i^2} < \infty$$

gilt. Im Falle $ia_i^2 \geq (i+1)a_{i+1}^2$ ($i = 1, 2, \dots$) sind also die Bedingungen (3) und (5) gleichwertig. Satz 2 ist also die Verallgemeinerung eines meiner vorherigen Resultate⁶⁾.

⁴⁾ K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I., *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957), 57—130, Satz I.

⁵⁾ S. KACZMARZ, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Z.* **26** (1927), 99—105; D. MENCHOFF, Sur les séries des fonctions orthogonales (Deuxième partie), *Fundamenta Math.* **8** (1926), 56—108.

⁶⁾ K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen II (Summation), *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957), 149—168, Satz II.

§ 1. Hilfssätze

Wir benötigen einige Hilfssätze.

Für eine endliche und reelle Zahlenfolge $c_1, \dots, c_n$ wird

$$M(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i(c_1^2, \dots, c_n^2)$$

gesetzt, wo

$$\lambda_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \log^2 \frac{x_1 + \dots + x_n}{x_i} & \text{für } x_1 + \dots + x_n > 8x_i > 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Offensichtlich gilt

$$c_1^2 + \dots + c_n^2 \leq M(c_1, \dots, c_n).$$

Hilfssatz 1. *Es gilt die Ungleichung*

$$(1.1) \quad M(c_1, \dots, c_n) \leq A M(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) \quad (c_i^2 \leq \bar{c}_i^2; i = 1, \dots, n),$$

wo A eine von der Folgen $\{c_i\}$, $\{\bar{c}_i\}$ und von n unabhängige, positive Konstante bedeutet.

BEWEIS. Die Ungleichung

$$(1.2) \quad \lambda_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq \lambda_j(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ (x_i \leq \bar{x}_i; i \neq j)$$

ist offensichtlich. Ist $x_1 + \dots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n \leq 8x_i$, dann gilt $x_1 + \dots + x_{i-1} + \bar{x}_i + x_{i+1} + \dots + x_n \leq 8\bar{x}_i$ für $x_i \leq \bar{x}_i$, und so hat man

$$(1.3) \quad x_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq \bar{x}_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \text{für } x_1 + \dots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n \leq 8x_i \text{ und } x_i \leq \bar{x}_i.$$

Da für $0 < 8x \leq c + x$

$$(1.4) \quad \left(x \log^2 \frac{c+x}{x} \right)' = \log \frac{c+x}{x} \left(\log \frac{c+x}{x} - 2 \frac{c}{c+x} \right) > 0$$

gilt, so ist

$$(1.5) \quad x_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq \bar{x}_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

für $x_1 + \dots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n > 8x_i > 0$, $x_1 + \dots + x_{i-1} + \bar{x}_i + x_{i+1} + \dots + x_n > 8\bar{x}_i$, $x_i \leq \bar{x}_i$.

Es sei $x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n = c > 0$. Da

$$\lim_{x_i \rightarrow \frac{1}{7}c-0} x_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \frac{1}{7} c \log^2 8$$

ist, so folgt aus (1.4)

$$x_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) < \frac{1}{7} (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n) \log^2 8$$

für $x_i < \frac{1}{7} (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n)$. Daraus ergibt sich:

$$(1.6) \quad x_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) < \log^2 8 \bar{x}_i \lambda_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

für $x_1 + \dots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n > 8x_i$, $x_1 + \dots + x_{i-1} + \bar{x}_i + x_{i+1} + \dots + x_n = 8\bar{x}_i$, $x_i < \bar{x}_i$.

Da $\bar{c}_1^2 + \dots + \bar{c}_{i-1}^2 + \bar{c}_i^2 + \bar{c}_{i+1}^2 + \dots + \bar{c}_n^2 \leq 8\bar{c}_i^2$ höchstens für 8 Indizes i erfüllt sein kann, ergibt sich (1.1) auf Grund von (1.2), (1.3), (1.5) und (1.6) durch einfache Rechnung.

Hilfssatz 2. Damit

$$(1.7) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 \frac{1}{a_i^2} < \infty$$

gilt, ist es notwendig und hinreichend, daß

$$(1.8) \quad \sum_{k=0}^{\infty} M(a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) < \infty$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ gilt.

BEWEIS. Aus (1.7) folgt (1.8) offensichtlich für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$. Es wird angenommen, daß (1.8) für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ erfüllt ist. Dann gilt $\{a_n\} \in l^2$, und so kann eine Indexfolge $(0=)m_0 < \dots < m_k < \dots$ angegeben werden, für die

$$A_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i^2 \leq \frac{1}{2^{2k}} \quad (k=1, 2, \dots)$$

erfüllt ist. Es wird mit I_k bzw. I'_k die Menge derjenigen Indizes i ($m_k < i \leq m_{k+1}$) bezeichnet, für die $|a_i| \leq A_k$ bzw. $|a_i| > A_k$ gilt. Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$(1.9) \quad \sum_{i \in I_k} a_i^2 \log^2 \frac{1}{a_i^2} = \sum_{i \in I_k} a_i^2 \log^2 \frac{1}{a_i^2} = 4 \sum_{i \in I_k} a_i^2 \log^2 \frac{1}{|a_i|} \leq 4 \sum_{i \in I_k} a_i^2 \log^2 \frac{A_k}{a_i^2} \leq \\ \leq 32 M(a_{m_k+1}, \dots, a_{m_{k+1}})$$

und

$$(1.10) \quad \sum_{i \in I_k} a_i^2 \log^2 \frac{1}{a_i^2} \leq A_k \log^2 \frac{1}{A_k^2} \leq B \frac{1}{2^k}$$

für $k > 1$, wo B eine von k unabhängige, positive Konstante bedeutet. Aus (1.9) und (1.10) folgt (1.7).

Damit haben wir Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. Es sei $\{f_i(x)\}$ ($i = 1, \dots, n$) ein im Intervall $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen⁷⁾, $c_1, \dots, c_n$ reelle Zahlen und $I_1, \dots, I_\sigma (\subseteq [0, 1])$ paarweise disjunkte Intervalle, für die

$$(1.11) \quad \max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| \geq \varrho_s (> 0) \quad (x \in I_s; s = 1, \dots, \sigma)$$

gilt. Dann gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{q_i(x)\}$ ($i = 1, \dots, n$) derart, daß

$$(1.12) \quad \max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} q_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} q_{i_2}(x)| \geq 1$$

auf einer einfachen Menge⁸⁾ $E (\subseteq [0, 1])$ gilt, für die

$$(1.13) \quad \text{mes}(E) = \min \left(\sum_{s=1}^{\sigma} \text{mes}(I_s), \sum_{s=1}^{\sigma} \varrho_s^2 \text{mes}(I_s) \right)$$

ist.

BEWEIS. Es sei $I_s = [a_s, b_s]$ ($s = 1, \dots, \sigma$). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $0 \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_\sigma < b_\sigma \leq \dots \leq a_\sigma < b_\sigma \leq 1$ angenommen werden; es seien weiterhin $a_0 = b_0 = 0$ und $a_{\sigma+1} = b_{\sigma+1} = 1$.

Ist

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \varrho_s^2 \text{mes}(I_s) \leq \sum_{s=1}^{\sigma} \text{mes}(I_s),$$

so setzen wir:

$$\begin{aligned} u_s &= \varrho_0^2(b_0 - a_0) + (a_1 - b_0) + \dots + \varrho_{s-1}^2(b_{s-1} - a_{s-1}) + (a_s - b_{s-1}) \quad (1 \leq s \leq \sigma + 1), \\ v_s &= \varrho_0^2(b_0 - a_0) + (a_1 - b_0) + \dots + \varrho_{s-1}^2(b_{s-1} - a_{s-1}) + (a_s - b_{s-1}) + \varrho_s^2(b_s - a_s) \\ &\quad (0 \leq s \leq \sigma). \end{aligned}$$

Nach der Annahme ist $0 = v_0 \leq u_1 < v_1 \leq \dots \leq u_\sigma < v_\sigma \leq u_{\sigma+1} \leq 1$. Es sei

$$q_i(x) = \begin{cases} f_i(b_s + x) & x \in (v_s, u_{s+1}) \quad (s = 0, \dots, \sigma), \\ \frac{1}{\varrho_s} f_i\left(a_s + \frac{x - a_s}{\varrho_s^2}\right) & x \in (u_s, v_s) \quad (s = 1, \dots, \sigma), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($i = 1, \dots, n$).

⁷⁾ Für jedes $f_i(x)$ kann das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, derart, daß in jedem Teilintervalle $f_i(x)$ konstant ist.

⁸⁾ Die Menge E ist die Vereinigung endlich vieler Teilintervalle.

Offensichtlich sind diese Funktionen Treppenfunktionen. Ferner ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx &= \sum_{s=0}^{\sigma} \int_{v_s}^{u_{s+1}} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{s=1}^{\sigma} \int_{u_s}^{v_s} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \\ &= \sum_{s=0}^{\sigma} \int_{v_s}^{u_{s+1}} f_i(b_s + x) f_j(b_s + x) dx + \sum_{s=1}^{\sigma} \frac{1}{\varrho_s^2} \int_{u_s}^{v_s} f_i\left(a_s + \frac{x-a_s}{\varrho_s^2}\right) f_j\left(a_s + \frac{x-a_s}{\varrho_s^2}\right) dx = \\ &= \sum_{s=0}^{\sigma} \int_{b_s}^{a_{s+1}} f_i(x) f_j(x) dx + \sum_{s=1}^{\sigma} \int_{a_s}^{b_s} f_i(x) f_j(x) dx = \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx, \end{aligned}$$

also ist das System $\{\varphi_i(x)\}$ orthonormiert und für

$$E = \bigcup_{s=1}^{\sigma} (u_s, v_s)$$

gilt (1.13) offensichtlich. Ist $x \in (u_s, v_s)$, dann ist $a_s + (x-a_s)\varrho_s^{-2} \in (a_s, b_s)$ und es gilt

$$\max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} \varphi_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} \varphi_{i_2}(x)| = \frac{1}{\varrho_s} \max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| \geq 1,$$

wegen (1.11). (1.12) ist also erfüllt.

Es sei

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \varrho_s^2 \text{mes}(I_s) > \sum_{s=1}^{\sigma} \text{mes}(I_s).$$

Dann können positive Zahlen $\bar{\varrho}_1, \dots, \bar{\varrho}_{\sigma}$ angegeben werden, für die $\bar{\varrho}_s \leq \varrho_s$ ($s = 1, \dots, \sigma$) und

$$(1.14) \quad \sum_{s=1}^{\sigma} \bar{\varrho}_s^2 \text{mes}(I_s) = \sum_{s=1}^{\sigma} \text{mes}(I_s)$$

erfüllt werden. Aus (1.11) folgt, daß

$$\max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| \geq \bar{\varrho}_s \quad (x \in I_s; s = 1, \dots, \sigma)$$

ist. Auf Grund von (1.14) ergibt sich nach dem obigen, daß es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, \dots, n$) gibt, derart, daß (1.12) auf einer einfachen Menge $E (\subseteq [0, 1])$ mit

$$\text{mes}(E) = \sum_{s=1}^{\sigma} \text{mes}(I_s)$$

gilt. Also ist (1.13) auch in diesem Falle erfüllt.

Damit haben wir Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4. Für die positiven Zahlen $c_1, \dots, c_n$ kann ein in $[0, 1]$ ortho-normiertes System von Treppenfunktionen $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, \dots, n$) angegeben werden, derart, daß

$$(1.15) \quad \max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} \varphi_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} \varphi_{i_2}(x)| \geq 1$$

in einer einfachen Menge $E (\subseteq [0, 1])$ gilt, für die

$$(1.16) \quad \text{mes } (E) \geq K \min (1, M(c_1, \dots, c_n))$$

mit einer von der Folge $\{c_i\}$ und von n unabhängigen, positiven Konstante $K (< 1)$ ist.

BEWEIS. Für $n = 1$ ist $M(c_1, \dots, c_n) = c_1^2$. Es seien $E = [0, \min(1, c_1^2)]$ und

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} (\min(1, c_1^2))^{-1/2} & x \in [0, \min(1, c_1^2)], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\varphi_1(x)$ und E sind also (1.15) und (1.16) erfüllt. Im folgenden können wir also $n > 1$ annehmen. $c_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$) kann auch angenommen werden. Ist nämlich $c_{i_0} > 1$ für ein i_0 , dann gilt die Behauptung für $E = [0, 1]$ und $\varphi_1(x) = r_1(x), \dots, \varphi_{i_0-1}(x) = r_{i_0-1}(x), \varphi_{i_0}(x) = r_0(x), \varphi_{i_0+1}(x) = r_{i_0}(x), \dots, \varphi_n(x) = r_{n-1}(x)$, wo $r_i(x) = \text{sign} \sin 2^i \pi x$ die i -te Rademachersche Funktion bedeutet.

Es sei $c = \min(c_1, \dots, c_n)$. Mit m_k wird die Anzahl derjenigen c_i bezeichnet, für die $(k-1)c^2 < c_i^2 \leq kc^2$ gilt. Es sei

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} k m_k (\geq n).$$

Wir benützen das Funktionensystem von S. KACZMARZ⁹⁾. Es bezeichne p den ganzen Teil von $N/2$. Es sei

$$\bar{g}_k(x) = \frac{1}{l-p-k-1/2} \quad \text{für } x \in \left[\frac{l-1}{p}, \frac{l}{p} \right) \quad (l=1, \dots, 2N, k=1, \dots, N).$$

Diese Funktionen sind im Intervall $[0, \alpha)$ ($\alpha = \frac{2N}{p}$; $4 \leq \alpha \leq 6$) definiert.

Mit $B_1, B_2, \dots$ werden wir im folgenden von N unabhängige, positive Konstanten bezeichnen. Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$(1.17) \quad \int_0^{\alpha} \bar{g}_k^2(x) dx \leq \frac{B_1}{N} \quad (k=1, \dots, N)$$

⁹⁾ S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series II, *Studia Math.* 5 (1934), 103–106.

und

$$(1.18) \quad |\alpha_{k,l}| \leq \frac{B_2}{N^2} \quad (k \neq l),$$

wo

$$\alpha_{k,l} = \int_0^a \bar{g}_k(x) \bar{g}_l(x) dx$$

ist.

Im Intervall $[a, 10]$ definieren wir die Funktionen $\bar{g}_k(x)$ folgenderweise. Wir teilen das Intervall $[a, 7)$ in $N(N-1)$ Teilintervalle gleicher Länge $I_{k,l}$ ($1 \leq k \leq N$, $1 \leq l \leq N$, $k \neq l$). Es sei

$$\bar{g}_k(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{N(N-1)}{2(7-a)}} |\alpha_{k,l}| & x \in I_{k,l}, \\ -\sqrt{\frac{N(N-1)}{2(7-a)}} |\alpha_{k,l}| \operatorname{sign} \alpha_{k,l} & x \in I_{l,k}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($k=1, \dots, N$). Aus (1.17) und (1.18) ergibt sich durch einfache Rechnung

$$(1.19) \quad \int_0^{10} \bar{g}_k^2(x) dx \leq \frac{B_3}{N} \quad (k=1, \dots, N).$$

Es wird

$$g_k(x) = \bar{g}_k(x) \left\{ \int_0^{10} \bar{g}_k^2(x) dx \right\}^{-1/2} \quad (k=1, \dots, N)$$

gesetzt.

Es kann leicht eingesehen werden, daß die Treppenfunktionen $g_k(x)$ in $[0, 10]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus der Definition von $g_k(x)$ und aus (1.19) bekommen wir nun die folgenden Abschätzungen. Ist für eine natürliche Zahl m ($0 \leq m < N$) $x \in \left[\frac{p+m}{p}, \frac{p+m+1}{p} \right)$, dann sind die Funktionenwerte $g_{m+1}(x), \dots, g_N(x)$ negativ und es gilt

$$(1.20) \quad \left| \sum_{k=\kappa}^N g_k(x) \right| \geq B_4 \sqrt{N} \sum_{k=\kappa}^N \frac{1}{k-m-1/2} \quad (\kappa \geq m+1),$$

sind hingegen die Funktionenwerte $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ positiv und gilt

$$(1.21) \quad \sum_{k=1}^{\kappa} g_k(x) \geq B_5 \sqrt{N} \sum_{k=1}^{\kappa} \frac{1}{m-k+1/2} \quad (\kappa < m+1).$$

Für jedes i ($1 \leq i \leq n$) bezeichne p_i die natürliche Zahl, für die $(p_i-1)c^2 < c_i^2 \leq p_i c^2$ gilt. Offensichtlich gilt $p_i \geq 1$ und $p_1 + \dots + p_n = N$. Es seien $s_1, \dots, s_q$

($0 \leq q \leq 8$) diejenigen Indizes i , für die $N \leq 8p_i$ gilt. Es seien $\bar{J}_{s_r} = \left[7 + \frac{p_{s_1} + \dots + p_{s_{r-1}}}{p}, 7 + \frac{p_{s_1} + \dots + p_{s_r}}{p} \right)$ und

$$\psi_{s_r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} c \sqrt{N} & x \in \bar{J}_{s_r}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($r = 1, \dots, q$). Da $7 + \frac{p_{s_1} + \dots + p_{s_q}}{p} \leq 7 + \frac{p_1 + \dots + p_n}{p} = 7 + \frac{N}{p} \leq 10$ ist, so gilt $\bar{J}_{s_r} \subseteq [7, 10]$ ($r = 1, \dots, q$). Da nach der Annahme $c_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$) und nach der Definition von p_i $c^2 N \frac{p_{s_r}}{p} \leq 3c^2 p_{s_r} \leq 6c_{s_r}^2 \leq 6$ ($r = 1, \dots, q$) gilt, so ist

$$\beta_r = \int_0^{10} \psi_{s_r}^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \quad (r = 1, \dots, q).$$

Wir setzen

$$\bar{f}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_{k=p_1+\dots+p_{i-1}+1}^{p_1+\dots+p_i} g_k(x) \quad (1 \leq i \leq n; i \neq s_1, \dots, s_q)$$

und

$$\bar{f}_{s_r}(x) = \frac{\sqrt{1-\beta_r}}{\sqrt{p_{s_r}}} \sum_{k=p_1+\dots+p_{s_r-1}+1}^{p_1+\dots+p_{s_r}} g_k(x) + \psi_{s_r}(x) \quad (r = 1, \dots, q).$$

Hier ist $\sqrt{1-\beta_r} \geq 1/\sqrt{2}$ ($r = 1, \dots, q$). Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\bar{f}_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) in $[0, 10]$ ein orthonormiertes System.

Es seien $J_1 = \left[1, \frac{p+p_1}{p} \right) \cap [1, 2)$, $J_s = \left[\frac{p+p_1+\dots+p_{s-1}}{p}, \frac{p+p_1+\dots+p_s}{p} \right)$ ($1 < s < n$) und $J_n = \left[\frac{p+p_1+\dots+p_{n-1}}{p}, \frac{p+p_1+\dots+p_n}{p} \right) \cap [2, 3)$. Es gelten $\text{mes}(J_1) = \min\left(\frac{p_1}{p}, 1\right)$, $\text{mes}(J_s) = \frac{p_s}{p}$ ($1 < s < n$) und $\text{mes}(J_n) = \min\left(\frac{p_n}{p}, 1\right)$ und so ist

$$(1.22) \quad \sum_{s=1}^n \text{mes}(J_s) \geq 1.$$

Im folgenden werden wir mit $C_1, C_2, \dots$ von der Folge $\{c_i\}$ und von n unabhängige, positive Konstanten bezeichnen. Ist $x \in J_s$ ($1 < s < n$), dann gibt es ein m ($p_1 + \dots + p_{s-1} \leq m < p_1 + \dots + p_s$), derart, daß $x \in \left[\frac{p+m}{p}, \frac{p+m+1}{p} \right)$

erfüllt ist. Dann sind die Funktionenwerte $g_k(x)$ ($p_1 + \dots + p_s \leq k \leq N$) negativ bzw. die Funktionenwerte $g_k(x)$ ($1 \leq k \leq p_1 + \dots + p_{s-1}$) positiv und aus (1.20) bzw. aus (1.21) ergibt sich:

$$(1.23) \quad \left| \sum_{i=s+1}^n c_i \bar{f}_i(x) \right| = \left| \sum_{i=s+1}^n \frac{c_i}{\sqrt{p_i}} \sum_{k=p_1+\dots+p_{i-1}+1}^{p_1+\dots+p_i} g_k(x) \right| \geq \frac{c}{2} \left| \sum_{k=p_1+\dots+p_s+1}^N g_k(x) \right| \geq \\ \geq \frac{B_4}{2} c \sqrt{N} \sum_{k=p_1+\dots+p_s+1}^N \frac{1}{k-m+1/2} \geq C_1 c \sqrt{N} \log \frac{N-m}{p_s}$$

bzw.

$$(1.24) \quad \sum_{i=1}^{s-1} c_i \bar{f}_i(x) = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{c_i}{\sqrt{p_i}} \sum_{k=p_1+\dots+p_{i-1}+1}^{p_1+\dots+p_i} g_k(x) \geq \frac{c}{2} \sum_{k=1}^{p_1+\dots+p_{s-1}} g_k(x) \geq \\ \geq \frac{B_5}{2} c \sqrt{N} \sum_{k=1}^{p_1+\dots+p_{s-1}} \frac{1}{m-k+1/2} \geq C_2 c \sqrt{N} \log \frac{m}{p_s}.$$

Ist endlich $x \in J_1$, bzw. $x \in J_n$, dann ergibt sich ähnlicherweise, daß

$$(1.25) \quad \left| \sum_{i=2}^n c_i \bar{f}_i(x) \right| \geq C_1 c \sqrt{N} \log \frac{N-m}{p_1}$$

mit einem m ($0 \leq m < p$) bzw.

$$(1.26) \quad \sum_{i=1}^{n-1} c_i \bar{f}_i(x) \geq C_2 c \sqrt{N} \log \frac{m}{p_n}$$

mit einem m ($p \leq m < N$) gelten. Aus (1.23), (1.24), (1.25) und (1.26) folgt, daß

$$(1.27) \quad \max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} \bar{f}_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} \bar{f}_{i_2}(x)| \geq C_3 c \sqrt{N} \log \frac{N}{p_s} \quad \text{mit} \quad \frac{N}{p_s} > 8 \\ (x \in J_s; 1 \leq s \leq n, s \neq s_1, \dots, s_q)$$

gilt. Es gilt auch die Abschätzung

$$(1.28) \quad \max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} \bar{f}_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} \bar{f}_{i_2}(x)| \geq |\bar{f}_{s_r}(x)| = \frac{1}{12} c \sqrt{N} \quad (x \in \bar{J}_{s_r}; 1 \leq r \leq q).$$

Wir setzen $\bar{I}_s = J_s$ ($1 \leq s \leq n; s \neq s_1, \dots, s_q$) und $\bar{I}_{s_r} = \bar{J}_{s_r}$ ($r = 1, \dots, q$). Aus (1.22) ergibt sich leicht:

$$(1.29) \quad \sum_{s=1}^n \text{mes}(\bar{I}_s) \geq 1.$$

Es sei

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{10}} \bar{f}_i\left(\frac{x}{10}\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

und I_s bezeichne das mit der Lineartransformation $y = \frac{x}{10}$ erhaltende Bild von Intervall $\bar{I}_s$ ($s = 1, \dots, n$). Aus (1.27), (1.28) und (1.29) ergibt sich:

$$\max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |c_{i_1} f_{i_1}(x) + \dots + c_{i_2} f_{i_2}(x)| > \varrho_s \quad (x \in I_s; 1 \leq s \leq n)$$

und

$$(1.30) \quad \sum_{s=1}^n \text{mes}(I_s) \geq \frac{1}{10},$$

wo $\varrho_s = C_4 c \sqrt{N} \log \frac{N}{p_s}$ (mit $\frac{N}{p_s} > 8$) für $1 \leq s \leq n$, $s \neq s_1, \dots, s_q$ und $\varrho_{s_r} = C_4 c \sqrt{N}$ für $r = 1, \dots, q$ ist.

Unter Anwendung von Hilfssatz 3 ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\varphi_i(x)\}$, für die (1.15) in einer einfachen Menge $E (\subseteq [0, 1])$ erfüllt ist; dabei gilt

$$(1.31) \quad \text{mes}(E) = \min \left(\sum_{s=1}^n \text{mes}(I_s), \sum_{s=1}^n \varrho_s^2 \text{mes}(I_s) \right).$$

Nach den Definitionen von ϱ_s und I_s ergibt sich, daß

$$\varrho_s^2 \text{mes}(I_s) \geq \begin{cases} C_5 c^2 p_s \log^2 \frac{N}{p_s} \left(\text{mit } \frac{N}{p_s} > 8 \right) & (1 \leq s \leq n; s \neq s_1, \dots, s_q), \\ C_5 c^2 p_{s_r} & (s = s_r; r = 1, \dots, q) \end{cases}$$

gilt, woraus

$$\sum_{s=1}^n \varrho_s^2 \text{mes}(I_s) \geq C_6 \sum_{i=1}^n c^2 p_i \lambda_i(p_1, \dots, p_n) = C_6 \sum_{i=1}^n c^2 p_i \lambda_i(c^2 p_1, \dots, c^2 p_n)$$

folgt.

Da $c_i^2 \leq c^2 p_i$ ($i = 1, \dots, n$) ist, bekommen wir auf Grund von Hilfssatz 1:

$$(1.32) \quad \sum_{s=1}^n \varrho_s^2 \text{mes}(I_s) \geq C_7 M(c_1, \dots, c_n).$$

Aus (1.30), (1.31) und (1.32) folgt endlich (1.16).

Damit haben wir Hilfssatz 4 vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz 1

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $[a, b] = [0, 1]$ angenommen werden. Ist die Bedingung (2) nicht erfüllt, dann gibt es auf Grund von Hilfssatz 2 eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$, für die

$$(2.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} M(a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) = \infty$$

ist.

Wir werden ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_i(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $E_k (\subseteq [0, 1])$ definieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Es bestehen die Relationen

$$(2.2) \quad \max_{\mu_k < i_1 \leq i_2 \leq \mu_{k+1}} |a_{i_1} \Phi_{i_1}(x) + \dots + a_{i_2} \Phi_{i_2}(x)| \geq 1 \quad (x \in E_k; k = 1, 2, \dots),$$

$$(2.3) \quad \text{mes}(E_k) \geq K \min(1, M(a_{\mu_k+1}, \dots, a_{\mu_{k+1}})) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(wo K die in (1.16) stehende positive Konstante ist) und die Mengen E_k stochastisch unabhängig sind.

Es seien $\mu_1, \dots, \mu_p$ bzw. $m_1, \dots, m_q$ diejenigen Indizes i ($1 \leq i \leq n_1$), für die $a_i = 0$ bzw. $a_i \neq 0$ ist. Wir setzen

$$\Phi_{\mu_k}(x) = r_k(x) \quad (k = 1, \dots, p).$$

Dann können wir das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle I_r ($1 \leq r \leq \varrho$) einteilen, derart, daß in jedem I_r jede Funktion $\Phi_{\mu_k}(x)$ ($k = 1, \dots, p$) konstant ist.

Mit Anwendung von Hilfssatz 4 auf $|a_{m_1}|, \dots, |a_{m_q}|$ ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_i(x)$ ($i = 1, \dots, q$), für die

$$(2.4) \quad \max_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq q} ||a_{m_{j_1}}| \varphi_{j_1}(x) + \dots + |a_{m_{j_2}}| \varphi_{j_2}(x)| \geq 1$$

auf einer einfachen Menge $E (\subseteq [0, 1])$ gilt, wobei

$$(2.5) \quad \text{mes}(E) \geq K \min(1, M(|a_{m_1}|, \dots, |a_{m_q}|))$$

ist. Wir setzen

$$\Phi_{m_k}(x) = \text{sign } a_{m_k} \cdot \sum_{r=1}^{\varrho} \varphi_k(x; I_r) \quad (k = 1, \dots, q)$$

und

$$E_1 = \bigcup_{r=1}^{\varrho} E(I_r)^{10}.$$

¹⁰⁾ Es sei $f(x)$ eine in $[0, 1]$ definierte Funktion und $E \subseteq [0, 1]$. Für ein endliches Intervall $I = [u, v]$ wird

$$f(x; I) = \begin{cases} f\left(\frac{x-u}{v-u}\right) & u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt; mit $E(I)$ wird das mit der Lineartransformation $y = u + (v-u)x$ erhaltene Bild von E bezeichnet. Es besteht $\text{mes}(E(I)) = \text{mes}(I) \cdot \text{mes}(E)$. Sind $f(x)$ und $g(x)$ in $[0, 1]$ quadratisch-integrierbare Funktionen, dann gilt

$$\int_u^v f(x; I) \cdot g(x; I) dx = \text{mes}(I) \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Die Treppenfunktionen $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq n_1$) bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. Da für $x \in E_1$

$$\max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n_1} |a_{i_1} \Phi_{i_1}(x) + \dots + a_{i_2} \Phi_{i_2}(x)| = \max_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq q} ||a_{m_{j_1}} \varphi_{j_1}(y) + \dots + a_{m_{j_2}} \varphi_{j_2}(y)|$$

mit $y \in E$ gilt, ergibt sich aus (2.4), daß (2.2) für $k=1$ erfüllt ist. Da $M(|a_{m_1}|, \dots, |a_{m_q}|) = M(a_1, \dots, a_{n_1})$ ist, folgt aus (2.5), daß (2.3) für $k=1$ gilt.

Es sei $\varkappa (> 1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq n_{\varkappa-1}$) und die einfachen Mengen $E_1, \dots, E_{\varkappa-1} (\subseteq [0, 1])$ schon definiert sind, derart, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind und (2.2), (2.3) für $k=1, \dots, \varkappa-1$ erfüllt sind. Dann können wir das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle J_s ($1 \leq s \leq \sigma$) einteilen, derart, daß jede Funktion $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq n_{\varkappa-1}$) in jedem J_s konstant ist. Es seien $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{\bar{p}}$ bzw. $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{\bar{q}}$ diejenigen Indizes i ($n_{\varkappa-1} < i \leq n_{\varkappa}$), für die $a_i = 0$ bzw. $a_i \neq 0$ gilt. Wir setzen

$$\Phi_{\mu_k}(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} r_k(x; J_s) \quad (k=1, \dots, \bar{p}).$$

Dann teilen wir das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_r$ ($1 \leq r \leq \bar{q}$) ein, derart, daß in jedem $\bar{I}_r$ jede Funktion $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq n_{\varkappa-1}$), $\Phi_{\mu_k}(x)$ ($k=1, \dots, \bar{p}$) konstant ist und jede Menge E_k ($1 \leq k \leq \varkappa-1$) die Vereinigung einiger $\bar{I}_r$ ist.

Unter Anwendung von Hilfssatz 4 auf $|a_{\bar{m}_1}|, \dots, |a_{\bar{m}_{\bar{q}}}|$ ergibt sich ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_i(x)$ ($i=1, \dots, \bar{q}$), für die

$$(2.6) \quad \max_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \bar{q}} ||a_{\bar{m}_{j_1}} \bar{\varphi}_{j_1}(x) + \dots + a_{\bar{m}_{j_2}} \bar{\varphi}_{j_2}(x)| \geq 1$$

in einer einfachen Menge $\bar{E}$ ($\subseteq [0, 1]$) gilt, wo

$$(2.7) \quad \text{mes}(\bar{E}) \geq K \min(1, M(|a_{\bar{m}_1}|, \dots, |a_{\bar{m}_{\bar{q}}}|))$$

ist. Wir setzen

$$\Phi_{\bar{m}_k}(x) = \text{sign } a_{\bar{m}_k} \cdot \sum_{r=1}^{\bar{q}} \bar{\varphi}_k(x; \bar{I}_r) \quad (k=1, \dots, \bar{q})$$

und

$$E = \bigcup_{r=1}^{\bar{q}} \bar{E}(\bar{I}_r).$$

Die Treppenfunktionen $\Phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq n_{\varkappa}$) bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. Da für $x \in E_{\varkappa}$

$$\max_{n_{\varkappa-1} < i_1 \leq i_2 \leq n_{\varkappa}} |a_{i_1} \Phi_{i_1}(x) + \dots + a_{i_2} \Phi_{i_2}(x)| = \max_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \bar{q}} ||a_{\bar{m}_{j_1}} \bar{\varphi}_{j_1}(y) + \dots + a_{\bar{m}_{j_2}} \bar{\varphi}_{j_2}(y)|$$

mit $y \in \bar{E}$ gilt, so ergibt sich aus (2.6), daß (2.2) für $k = \infty$ gilt. Da $M(|a_{m_1}|, \dots, |a_{m_q}|) = M(a_{n_{k-1}+1}, \dots, a_{n_k})$ ist, folgt aus (2.7), daß (2.3) für $k = \infty$ gilt. Offensichtlich sind die Mengen $E_1, \dots, E_\infty$ stochastisch unabhängig.

Mit vollständiger Induktion bekommen wir ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_i(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{E_k\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Ist $x \in \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} E_k}$, dann besteht (2.2) für unendlich viele k und so divergiert die Reihe

$$(2.8) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i(x)$$

im Punkt x . Aus (2.1), (2.3) und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen E_k , ergibt sich unter Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß

$$\text{mes}(\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} E_k}) = 1$$

ist. Also divergiert die Orthogonalreihe (2.8) fast überall.

Damit haben wir Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 3. Beweis von Satz 2

Da im Falle $\{a_n\} \notin l^2$ die Rademachersche Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(x)$$

in $[0, 1]$ fast überall nicht $(C, 1)$ -summierbar ist¹¹⁾, darf $\{a_n\} \in l^2$ angenommen werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann auch $[a, b] = [0, 1]$ angenommen werden. Ist die Bedingung (3) nicht erfüllt, dann gibt es auf Grund von Hilfssatz 2 eine Indexfolge $(0 =) n_0 < \dots < n_k < \dots$, für die

$$(3.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} M(A_{n_k+1}, \dots, A_{n_{k+1}}) = \infty$$

ist. Es seien b_i ($i = 1, 2, \dots$) rationale Zahlen mit $a_i^2 < b_i^2$, $|c_i| \leq i^{-2}$ ($c_i = a_i - b_i$; $i = 1, 2, \dots$). Dann ist $A_i^2 < B_i^2 = b_{2^{i-1}+1}^2 + \dots + b_{2^i}^2$ ($i = 1, 2, \dots$). Auf Grund von Hilfssatz 1 und (3.1) bekommen wir:

$$(3.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} M(B_{n_k+1}, \dots, B_{n_{k+1}}) = \infty.$$

¹¹⁾ A. ZYGMUND, On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamenta Math.* **16** (1930), 90–107.

Wegen (3.2) gibt es nach Satz 1 ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_i(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $E_k (\subseteq [0, 1])$ derart, daß

$$(3.3) \quad \max_{n_k < i_1 \leq i_2 \leq n_{k+1}} |B_{i_1} \Phi_{i_1}(x) + \dots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x)| \geq 1 \quad (x \in E_k; k = 1, 2, \dots)$$

und

$$(3.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}(E_k) = \infty$$

gelten.

Wir werden ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\psi_i(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_k (\subseteq [0, 1])$ mit folgenden Eigenschaften definieren:

Es gelten

$$(3.5) \quad \max_{n_k < i_1 \leq i_2 \leq n_{k+1}} |b_{2^{i_1-1}+1} \psi_{2^{i_1-1}+1}(x) + \dots + b_{2^{i_2}} \psi_{2^{i_2}}(x)| \geq 1 \quad (x \in F_k; k = 1, 2, \dots),$$

$$(3.6) \quad \text{mes}(F_k) = \text{mes}(E_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

und die Mengen F_k sind stochastisch unabhängig.

Es sei $\psi_1(x) \equiv 1$. Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $b_n^2 B_i^{-2} (2^{i-1} < n \leq 2^i; 1 \leq i \leq n_1)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_i^2} = \frac{p_n}{q}.$$

Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in q Teilintervalle gleicher Länge $I_r = [u_r, v_r]$ ($1 \leq r \leq q$). Es sei

$$\psi_n(x) = \frac{B_i}{b_n} \sum_{r=p_{2^{i-1}+1}+\dots+p_{n-1}+1}^{p_{2^{i-1}+1}+\dots+p_n} \Phi_i(x; I_r) \quad (2^{i-1} < n \leq 2^i; 1 \leq i \leq n_1)$$

und

$$F_1 = \bigcup_{r=1}^q E_1(I_r).$$

Diese Funktionen $\psi_n(x)$ sind Treppenfunktionen und bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. F_1 ist eine einfache Menge und (3.6) ist für $k=1$ erfüllt. Ist $x \in F_1$, so gibt es ein r ($1 \leq r \leq q_1$) derart, daß $x \in E_1(I_r)$ gilt. Dann ist $y = (x - u_r)(v_r - u_r)^{-1} \in E_1$, und so gilt nach (3.3) und nach $\Phi_i(y) = \Phi_i(x; I_r)$

$$(3.7) \quad \max_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n_1} |B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; I_r) + \dots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; I_r)| \geq 1.$$

Nach der Definition von $\psi_i(x)$ ist aber

$$b_{2^{i_1-1}+1} \psi_{2^{i_1-1}+1}(x) + \dots + b_{2^{i_2}} \psi_{2^{i_2}}(x) = B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; I_r) + \dots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; I_r)$$

für jedes $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n_1$. Daraus und aus (3.7) folgt, daß (3.5) für $k=1$ erfüllt ist.

Es sei $z(>1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\psi_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2^{n_{k-1}}$) und die einfachen Mengen $F_1, \dots, F_{k-1}$ schon derart definiert sind, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind und (3.5), (3.6) für $k=1, \dots, z-1$ erfüllt sind.

Dann kann das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle J_s ($1 \leq s \leq \sigma$) zerlegt werden, derart, daß in jedem J_s die Funktionen $\psi_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2^{n_{k-1}}$) konstant sind und jede Menge F_k ($1 \leq k \leq z-1$) die Vereinigung gewisser J_s ist. Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen $b_n^2 B_i^{-2}$ ($2^{i-1} < n \leq 2^i$; $n_{k-1} < i \leq n_k$) als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$\frac{b_n^2}{B_i^2} = \frac{\bar{p}_n}{\bar{q}}.$$

Wir teilen jedes J_s in $\bar{q}$ Teilintervalle gleicher Länge $J_{s,r} = [u_{s,r}, v_{s,r}]$ ($1 \leq s \leq \sigma$, $1 \leq r \leq \bar{q}$) ein und wir setzen

$$\psi_n(x) = \frac{B_i}{b_n} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{r=\bar{p}_{2^{i-1}+1} + \dots + \bar{p}_{n-1} + 1}^{\bar{p}_{2^{i-1}+1} + \dots + \bar{p}_n} \Phi_i(x; J_{s,r})$$

($2^{i-1} < n \leq 2^i$; $n_{k-1} < i \leq n_k$) und

$$F_k = \bigcup_{s=1}^{\sigma} \bigcup_{r=1}^{\bar{q}} E_k(J_{s,r}).$$

Die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ ($1 \leq n \leq 2^{n_k}$) bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes Funktionensystem, die einfachen Mengen $F_1, \dots, F_k$ sind stochastisch unabhängig und (3.6) ist für $k=z$ offensichtlich erfüllt. Ist $x \in F_k$, dann gibt es Werte s, r ($1 \leq s \leq \sigma$, $1 \leq r \leq \bar{q}$), derart, daß $x \in E_k(J_{s,r})$ gilt. Dann ist $y = (x - u_{s,r})(v_{s,r} - u_{s,r}) \in E_k$ und so gilt nach (3.8) und nach $\Phi_i(x; J_{s,r}) = \Phi_i(y)$

$$(3.8) \quad \max_{n_{k-1} < i_1 \leq i_2 \leq n_k} |B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; J_{s,r}) + \dots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; J_{s,r})| \geq 1.$$

Nach der Definition von $\psi_i(x)$ ist aber

$$b_{2^{i_1-1}+1} \psi_{2^{i_1-1}+1}(x) + \dots + b_{2^{i_2}} \psi_{2^{i_2}}(x) = B_{i_1} \Phi_{i_1}(x; J_{s,r}) + \dots + B_{i_2} \Phi_{i_2}(x; J_{s,r})$$

für jedes $n_{k-1} < i_1 \leq i_2 \leq n_k$. Daraus und aus (3.8) folgt, daß (3.5) für $k=z$ erfüllt ist.

Mit vollständiger Induktion ergibt sich ein orthonormiertes System $\{\psi_i(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_k\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Ist $x \in \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} F_k}$, dann gilt (3.5) für unendlich viele k , also divergiert die Folge der 2^i -ten Partialsummen der Reihe

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i \psi_i(x)$$

in $[0, 1]$ fast überall. Aus (3.4), (3.6) und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $\{F_k\}$ ergibt sich, daß $\text{mes}(\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} F_k}) = 1$ ist. Also divergiert die

Folge der 2^i -ten Partialsummen der Reihe (3.9) fast überall. Da nach unseren Annahmen $\{b_i\} \in l^2$ ist, folgt daraus auf Grund eines bekannten Satzes¹²⁾, daß die Reihe (3.9) fast überall nicht $(C, 1)$ -summierbar ist. Aus unserer Annahme folgt, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) \psi_i(x)$$

fast überall konvergiert. So bekommen wir, daß die Reihe

$$(3.10) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(x)$$

in $[0, 1]$ fast überall nicht $(C, 1)$ -summierbar ist.

Damit haben wir Satz 2 vollständig bewiesen.

Bemerkung. In obigen haben wir folgendes gezeigt. *Ist die Bedingung (3) nicht erfüllt, dann gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\psi_i(x)\}$ derart, daß die Folge der 2^i -ten Partialsummen von (3.10) fast überall divergiert.*

Ähnlicherweise kann die folgende, allgemeinere Behauptung bewiesen werden. Für eine Indexfolge $(0 =) \mu_0 < \dots < \mu_k < \dots$ wird $A_i^2(\{u_k\}) = a_{\mu_i+1}^2 + \dots + a_{\mu_{i+1}}^2$ ($i = 1, 2, \dots$) gesetzt.

Satz 3. *Damit die Folge der μ_i -ten Partialsummen der Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_i(x)\}$ fast überall konvergiert, ist es notwendig, daß*

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l^2(\{u_k\}) \log^2 A_l^{-2}(\{u_k\}) < \infty$$

gilt.

(Eingegangen am 30. Januar 1961.)

¹²⁾ A. N. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.* 5 (1924), 96—97.