

Bemerkungen zu Sätzen von K. Tandori

Von LÁSZLÓ LEINDLER (Szeged)

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem und $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$. K. TANDORI hat die folgenden Sätze bewiesen:

Satz A¹). Es sei $N (\geq 1)$ eine beliebig angegebene natürliche Zahl. Mit $\{\mu_k\}$ wird die (wachsend angeordnete) Folge derjenigen natürlichen Zahlen bezeichnet, die in der Form $2^{v_1} \pm 2^{v_2} \pm \dots \pm 2^{v_r}$ mit ganzzahligen Exponenten $v_1 > \dots > v_r \geq 0$ ($1 \leq r \leq N$) geschrieben werden können. Sind die Bedingungen

$$c_n \geq c_{n+1} (> 0) \quad (n=0, 1, \dots),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

und

$$a_n^2 = O(c_n^2)$$

erfüllt, und ist die Orthogonalreihe

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

fast überall $(C, 1)$ -summierbar, so konvergiert die Folge $\{s_{\mu_k}(x)\}$ fast überall, wobei $s_n(x)$ die n -te Partialsumme der Reihe (1) bezeichnet.

Satz B²). Gibt es eine Indexfolge $\{n_k\}$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$), für die

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min \{c_{n_k} \sqrt{n_{k+1} - n_k}, c_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) \log^2 k\} < \infty$$

mit einer positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizientenfolge $\{c_n\}$ gilt, so ist die Orthogonalreihe (1) im Falle $a_n^2 = O(c_n^2)$ fast überall $(C, 1)$ -summierbar.

¹) K. TANDORI, Bemerkung zu einem Satz von A. N. KOLMOGOROFF, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), 133–135.

²) K. TANDORI, Ein Summationssatz für Orthogonalreihen mit monotoner Koeffizientenfolge, *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960), 15–18.

In dieser Note werden wir diese Sätze verallgemeinern. Diese Verallgemeinerungen lauten folgendermaßen

Satz I. *Gibt es eine Indexfolge $\{m_k\}$ ($m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$) und eine positive Koeffizientenfolge $\{c_k\}$, für die*

$$(2) \quad a_n^2 = O(c_k) \quad \text{für} \quad n = m_k + 1, \dots, m_{k+1}$$

und

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k (m_{k+1} - m_k) < \infty$$

bestehen, so gilt für beliebige Indexfolgen $\{v_l(k)\}$ und $\{p_k\}$, für die

$$(4) \quad \sum_{l=1}^{p_k} v_l(k) = O(m_{k+1} - m_k)$$

erfüllt sind, daß für jede l ($l \leq p_k$) mit $k \rightarrow \infty$

$$(5) \quad s_{m_k}(x) - s_{m_k + v_l(k)}(x) \rightarrow 0$$

und

$$(6) \quad s_{m_{k+1}}(x) - s_{m_{k+1} - v_l(k)}(x) \rightarrow 0$$

sind.

Aus diesem Satz ergibt sich der folgende

Satz II. *Gibt es eine fast überall konvergente Partialsummenfolge $\{s_{m_k}(x)\}$ der Orthogonalreihe (1) und eine positive Koeffizientenfolge $\{c_k\}$ mit Bedingungen (2) und (3), so ist die Reihe (1) fast überall $(C, 1)$ -summierbar.*

Zur Konvergenz der Partialsummenfolge $\{s_{m_k}(x)\}$ ist z. B. die Bedingung

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \min \left\{ \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2 \right) \log^2 k \right\} < \infty$$

hinreichend.

Es ist offensichtlich, daß die Bedingungen dieser Sätze schwächer als die Bedingungen der Tandorischen Sätze sind.

BEWEIS VON SATZ I. Wir setzen

$$\delta_k^2(x) = \sum_{l=1}^{p_k} (s_{m_k}(x) - s_{m_k + v_l(k)}(x))^2 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Auf Grund von (2) und (4) ergibt sich

$$\int_a^b \delta_k^2(x) dx = O(1) \sum_{l=1}^{p_k} c_k v_l(k) = O(1) c_k (m_{k+1} - m_k).$$

So ist nach (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \delta_k^2(x) dx = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k (m_{k+1} - m_k) < \infty.$$

Daraus ergibt sich durch Anwendung des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2(x)$$

fast überall konvergiert; also fast überall $\delta_k(x) \rightarrow 0$ besteht.

Wiederholen wir das Obenstehende mit

$$\bar{\delta}_k^2(x) = \sum_{l=1}^{p_k} (s_{m_k+1}(x) - s_{m_k+1-v_l(k)}(x))^2,$$

so ergibt sich fast überall $\bar{\delta}_k(x) \rightarrow 0$. Aus den naheliegenden Ungleichungen

$$|s_{m_k}(x) - s_{m_k+v_l(k)}(x)| \leq \delta_k(x)$$

und

$$|s_{m_k+1}(x) - s_{m_k+1-v_l(k)}(x)| \leq \bar{\delta}_k(x)$$

ergeben sich die Behauptungen (5) und (6).

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

BEWEIS VON SATZ II. Wir wenden den Satz I mit $v_l(k) = 2^{\lfloor \log m_k \rfloor + l} - m_k$ und $p_k = \lfloor \log m_{k+1} \rfloor - \lfloor \log m_k \rfloor$ an³⁾. Offenbar erfüllt sich die Bedingung (4) mit diesem Zahlen $v_l(k)$ und p_k , also gilt

$$s_{2^l}(x) - s_{m_k}(x) \rightarrow 0 \quad (m_k < 2^l \leq m_{k+1})$$

fast überall. Damit haben wir bewiesen, daß die Folge $\{s_{2^n}(x)\}$ fast überall konvergiert. Daraus folgt nach einem bekannten Satz von S. KACZMARZ⁴⁾, daß die Reihe (1) fast überall $(C, 1)$ -summierbar ist.

Um auch die Hinlänglichkeit der Bedingung (7) für die Konvergenz der Partialsummenfolge $\{s_{m_k}(x)\}$ zu beweisen, bezeichnen wir $i_1 < i_2 < \dots < i_s < \dots$ die Indizes k , für die

$$\min \left\{ \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2 \right) \log^2 k \right\} = \left(\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2 \right)^{1/2}$$

ist, und $j_1 < j_2 < \dots < j_r < \dots$ die übrigen Indizes. Auf Grund von (7) ist

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \int_a^b |s_{m_{i_s+1}}(x) - s_{m_{i_s}}(x)| dx &\leq \sqrt{b-a} \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b (s_{m_{i_s+1}}(x) - s_{m_{i_s}}(x))^2 dx} = \\ &= \sqrt{b-a} \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=m_{i_s}+1}^{m_{i_s+1}} a_n^2} < \infty, \end{aligned}$$

³⁾ In dieser Note wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet, weiterhin bezeichnet $[a]$ den ganzen Teil von a .

⁴⁾ S. KACZMARZ, Über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.* **96** (1927), 148–151.

daraus folgt mit Anwendung des Satzes von B. LEVI, daß die Reihe

$$(8) \quad \sum_{s=1}^{\infty} (s_{m_{i_s+1}}(x) - s_{m_{i_s}}(x))$$

fast überall konvergiert. Wir setzen

$$b_k = \begin{cases} (a_{m_k+1}^2 + \dots + a_{m_{k+1}}^2)^{1/2} & \text{für } k = j_r \ (r = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{b_k} \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n \varphi_n(x) & \text{für } b_k \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{m_{k+1} - m_k}} \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \varphi_n(x) & \text{für } b_k = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Offenbar ist das System $\{\Phi_k(x)\}$ orthonormiert und die Koeffizientenfolge $\{b_k\}$ erfüllt nach (7) die Bedingung des Satzes von D. MENCHOFF und H. RADEMACHER⁵⁾; so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Phi_k(x),$$

d. h. die Reihe

$$(9) \quad \sum_{r=1}^{\infty} (s_{m_{j_r+1}}(x) - s_{m_{j_r}}(x))$$

fast überall konvergiert. Durch Addition von (8) und (9) ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_{m_{k+1}}(x) - s_{m_k}(x))$$

und folglich die Folge $\{s_{m_k}(x)\}$ fast überall konvergiert.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 15. Januar 1962.)

⁵⁾ D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82–105; H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonal-funktionen, *Math. Ann.*, **87**, (1922), 112–138.