

Über die Konstruktion überall stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen I

Von S. KÁNTOR (Debrecen)

§ 1. Einleitung

In der Theorie der reellen Funktionen wurden auch noch in der letzten Zeit mehrere reelle Funktionen konstruiert¹⁾, die überall stetig und nirgends differenzierbar sind. Bei jeder der so konstruierten Funktionen $f(x)$ ergibt sich, daß der Unterschied $\theta_f(x)$ zwischen der größten und der kleinsten unter den Dinischen Ableitungszahlen in jedem Punkte x größer als eine gegebene Zahl bleibt.

Solche Funktionen werden wir stetige und stark nicht-differenzierbare Funktionen nennen.

Wir werden in dieser Arbeit eine Konstruktion geben, wodurch jede stetige und stark nicht-differentierbare Funktion mit passend gewählten Parametern darstellbar ist.

Wir haben den Grundgedanken aus der Untersuchung der auch historisch interessanten²⁾ Funktion von ZOÁRD GEŐCZE gewonnen [1]. GEŐCZE konstruierte schon im Jahre 1905 eine Funktion, von der er bewies, daß sie in einem gegebenen Intervall stetig ist, wobei es jedoch keinen rektifizierbaren Teilbogen ihres graphischen Bildes gibt. Im § 2. beweisen wir, daß diese Funktion nirgends differenzierbar ist [2]. So bekommt die Funktion von GEŐCZE unter den überall stetigen und nirgends differenzierbaren Funktionen einen vornehmen Platz, denn sie kommt in Hinsicht auf Einfachheit jeder verwandten Konstruktion gleich und indem GEŐCZE mit allgemeinen Parametern arbeitet, hebt er das wesentliche hervor und gibt auch ein einfaches Beispiel für eine nicht-rektifizierbare Kurve.

Die hier behandelte Klasse der stetigen und stark nicht-differenzierbaren Funktionen ist enger, als die Klasse der stetigen und nicht-differenzierbaren Funktionen. Ich möchte mich mit den Problemen der letzteren Klasse und mit der Konstruktion der betreffenden Funktionen in dem zweiten Teil dieser Abhandlung beschäftigen.

Wir wollen die Funktionen — ohne Beschränkung der Allgemeinheit — in dem Intervall³⁾ $[0, 1]$ definieren.

¹⁾ S. das Literatur von [3].

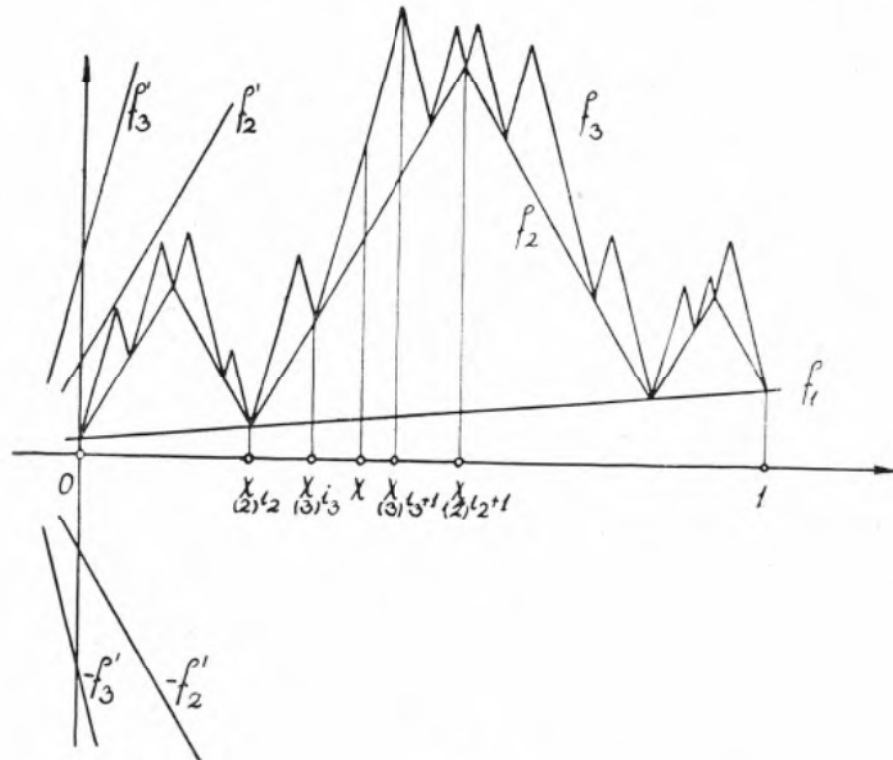
²⁾ Auf diese Funktion hat mich Herr DR. B. SZÉNÁSSY aufmerksam gemacht, wofür ich ihm meinen herzlichen Dank aussprechen möchte.

³⁾ Die offenen und die abgeschlossenen Intervalle werden — wie gewöhnlich — mit runden, bzw. mit eckigen Klammern bezeichnet.

§ 2. Über die Funktion von Geöcze

GEÖCZE definierte seine Funktion folgenderweise:⁴⁾ (Figur 1).

„Es sei $z=f_1$ linear und mit x monoton wachsend, und in $[0, 1]$ sei ihre Länge G . $z=f_2$ besitze dieselben Eigenschaften, sie soll aber die Länge $2G$ haben. Ist δ gegeben, so sieht man leicht ein, daß es eine solche Funktion $z=f_2$ gibt, deren geometrisches Bild ein aus einer geraden Anzahl von Strecken bestehender Linienzug ist, dessen gerade Strecken abwechselnd mit den Geraden $z=f_2$ und $z=-f_2$



Figur 1

parallel laufen und jede zweite Bruchstelle des Polygonzuges (von $x=0$ bis $x=1$) auf der Geraden f_1 liegt.

Die Abszissen der Bruchstellen seien

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2r} = 1.$$

Dabei kann $0 \leq f_2 - f_1 < \delta$ sein, wenn nur r genügend groß und $[x_i, x_{i+1}]$ genügend klein ist. Ebenso wie f_2 zu f_1 in $[0, 1]$, gibt es zu f_2 in jedem $[x_i, x_{i+1}]$ ein f_3 , dessen gerade Strecken mit der steigenden, bzw. sinkenden, in $[0, 1]$ $4G$ langen Geraden $z=f'_3$, $z=-f'_3$ parallel laufen, wobei im ganzen Intervall $[0, 1]$ $0 \leq f_3 - f_2 < \frac{\delta}{2}$

⁴⁾ Wir zitieren – abgesehen von unwesentlichen Änderungen – den Originaltext von GEÖCZE in deutscher Übersetzung. Vgl. [1] und [5].

gilt. Man bildet ähnlicherweise f_4 , usw.

$$f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i."$$

Die Funktion $f(x)$ ist stetig und die Länge der von ihr definierten Kurve ist in jedem noch so kleinen Intervall unendlich.

Wir wollen die Beweise wegen ihrer Einfachheit und der Vollständigkeit halber mitteilen.

Offensichtlich ist für jedes i die Funktion $f_i(x)$ stetig und aus den Bedingungen

$$(1) \quad 0 \leq f_{i+1}(x) - f_i(x) < \frac{\delta}{2^{i-1}}$$

folgt, daß die Folge $f_i(x)$ gleichmäßig konvergiert und so $f(x)$ stetig ist.

Das Bild von $f_i(x)$ besteht aus Geradenstücken, die entweder mit der Geraden $y = f'_i(x)$, oder mit $y = -f'_i(x)$ parallel sind. Die Länge dieser Strecken und so die Länge des Bildes von $f_i(x)$ beträgt in jedem Teilintervall $[u, v]$ des Intervalles $[0, 1]$ $(v-u) 2^{i-1} G$.

Das Bild von $f(x)$ ist also in keinem einzigen Intervall $[u, v]$ rektifizierbar, weil die Länge eines eingeschriebenen Polygons des Bildes von $f_i(x)$ für genügend große i größer als jede konstante Zahl ausfällt.

Die Tatsache, daß eine gewisse Funktion nicht differenzierbar ist, werden wir in dieser Arbeit immer mit Hilfe des folgenden, im Wesentlichen, wenn auch nicht in dieser Form, bekannten⁵⁾ Lemma beweisen:

Lemma. Die Funktion $f(x)$ ist in dem Punkt x_0 nicht differenzierbar, wenn es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, so daß zu jeder beliebigen Zahl $\eta > 0$ die Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ existieren, die den Bedingungen

$$\alpha \leq x_0 \leq \beta, \quad \alpha' \leq x_0 \leq \beta', \quad \beta - \alpha \leq \eta, \quad \beta' - \alpha' \leq \eta,$$

$$\left| \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} - \frac{f(\alpha') - f(\beta')}{\alpha' - \beta'} \right| \geq \varepsilon$$

genügen. Dann gilt $\vartheta_f(x_0) \geq \varepsilon$.

Das Lemma drückt folgendes aus: wenn der Unterschied der Differenzenquotienten in einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes x_0 über eine positive Schranke bleibt, dann ist $\vartheta_f(x_0)$ positiv.

Nun beweisen wir, daß die Funktion von GEÖCZE nicht differenzierbar ist. Es sein die Abszissen der Bruchstellen von $y = f_i(x)$

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{s_i} = 1.$$

(i)
(i)
(i)

Es gilt für beliebiges $x_0 \in [0, 1]$

$$(2) \quad 0 = x_{k_1} \leq x_{k_2} \leq \dots \leq x_0 \leq \dots \leq x_{k_2+1} \leq x_{k_1+1} = 1.$$

(1)
(2)
(2)
(1)

Wir werden unter diesen Abszissenwerten die Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ wählen. Die Rich-

⁵⁾ Vgl. [4].

tungstangente der Geraden $y = f'_i(x)$ ist $m_i = \sqrt{(2^{i-1}G)^2 - 1}$. Aus den Ungleichungen

$$2m_i = \sqrt{(2^i G)^2 - 4} < \sqrt{(2^i G)^2 - 1}$$

folgt

$$(3) \quad m_1 \leq m_{i-1} < m_i - m_{i-1}$$

und nach (1) bekommt man:

$$\frac{\delta}{2^{i-1}} > \left| \frac{x_{k_i+1}}{(i)} - \frac{x_{k_i}}{(i)} \right| (m_i - m_{i-1})$$

Es ist also

$$\left| \frac{x_{k_i+1}}{(i)} - \frac{x_{k_i}}{(i)} \right| < \frac{\delta}{2^{i-1}m_1},$$

das heißt

$$(4) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{k_i+1}}{(i)} - \frac{x_{k_i}}{(i)} \right) = 0.$$

Es gibt also für jedes $\eta > 0$ ein von η abhängiges n , wofür

$$(5) \quad \left| \frac{x_{k_n+1}}{(n)} - \frac{x_{k_n}}{(n)} \right| < \eta$$

besteht.

Die Zahlen

$$\alpha = \frac{x_{k_n}}{(n)}, \quad \beta = \frac{x_{k_n+1}}{(n)}, \quad \alpha' = \frac{x_{k_{n+1}}}{(n+1)}, \quad \beta' = \frac{x_{k_{n+1}+1}}{(n+1)}, \quad \varepsilon = m_1$$

genügen — wegen (3) und (5) — den Bedingungen des Lemmas. Also gilt der

Satz 1. Die Funktion von Geöcze ist überall stetig und nirgends differenzierbar.

§ 3. Konstruktion für alle steige und stark nicht-differenzierbare Funktionen

Definitionen. Es wird die Funktion $f(x)$ eine *stark nicht-differenzierbare* Funktion genannt, wenn es eine Zahl $\lambda > 0$ existiert, so daß für jedes x $\vartheta_f(x) \geq \lambda$ gilt, wo $\vartheta_f(x)$ die Differenz der größten und kleinsten Dinischen Ableitungszahlen im Punkt x bezeichnet.

Die *Polygonfunktion* der nach wachsenden Abszissenwerten geordneten Punkte $P_i(p_i, p'_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ wird als

$$\Theta(x) = \frac{p'_i - p'_{i+1}}{p_i - p_{i+1}}(x - p_i) + p'_i, \quad p_i \leq x \leq p_{i+1}$$

definiert. Die Punkte P_i sind die *Eckpunkte*, die Strecken $\overline{P_i P_{i+1}}$ heißen die Strecken der Polygonfunktion.

Ist $t_i(x)$ eine Polygonfunktion und ist jede ihrer Eckpunkte auch ein Eckpunkt von $t_{i+1}(x)$, so wird die Funktion

$$t(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x)$$

eine *Polygongrenzfunktion* genannt.

Die Funktion $t(x)$ wird eine Polygongrenzfunktion mit den Parametern λ, q_i genannt, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

$$1^\circ \quad t(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x) \quad \text{ist für } x \in [0, 1]$$

eine Polygongrenzfunktion;

2° es gilt

$$|t_{i+1}(x) - t_i(x)| < q_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

und $\sum q_i$ ist konvergent;

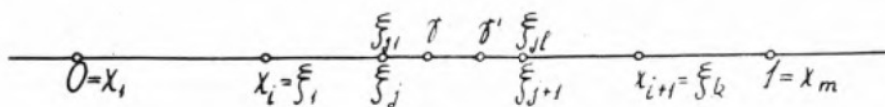
3° ist die orthogonale Projektion einer Strecke $\overline{AB}$ von $t_{i+1}(x)$ auf die x -Achse ein (nicht unbedingt echtes) Teilintervall der Projektion der Strecke $\overline{A'B'}$ von $t_i(x)$, so fällt die Differenz der Richtungstangenten von $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ für jedes i nicht kleiner als $\lambda > 0$ aus. Wir werden die Richtungstangenten der Geradenstrecken $((u, t(u)), (v, t(v)))$ und UV mit $\text{tg}_t(u, v)$, bzw. $\text{tg } UV$ bezeichnen.

Die Funktion von GEÖCZE ist ebenfalls eine Polygongrenzfunktion mit den Parametern $\lambda = m_1, q_i = \frac{\delta}{2^{i-1}}$.

Wir könnten die Eigenschaft der Funktion von GEÖCZE, daß sämtliche Eckpunkte von $f_{i+1}(x)$ auf dem Bilde von $f_i(x)$ liegen, bei der allgemeinen Konstruktion nicht behalten. Es ist aber unnötig statt Polygonfunktionen kompliziertere stetige Funktionen zu verwenden,⁶⁾ denn im Raum der stetigen Funktionen bilden die Polygonfunktionen eine überall dichte Menge.

Satz 2. Die Polygongrenzfunktion $t(x)$ mit den Parametern λ, q_i ist stetig und stark nicht-differenzierbar.

BEWEIS. Es ist $t_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) offenbar stetig und so konvergiert wegen 2° die Folge $t_i(x)$ gleichmäßig, also ist $t(x)$ eine stetige Funktion.



Figur 2

Wir verwenden auch für die Abszissenwerte der Eckpunkte von $t_i(x)$ die Bezeichnungen

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{s_i} = 1.$$

So bleibt (2) für beliebiges $x_0 \in [0, 1]$ gültig. Wegen 3° und 2° galten die Rela-

⁶⁾ Vgl. [3] und [4].

tionen

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \left| \frac{t_i \left(\begin{smallmatrix} x_{k_i+1} \\ (i) \end{smallmatrix} \right) - t_i \left(\begin{smallmatrix} x_{k_i} \\ (i) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_i+1} - x_{k_i}} - \frac{t_{i+1} \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}}} \right| = \\ &= \left| \frac{t_i \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_i \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}}} - \frac{t_{i+1} \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right)}{x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}}} \right| \equiv \\ &\equiv \frac{\left| t_i \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}+1} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) \right| + \left| t_i \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) - t_{i+1} \left(\begin{smallmatrix} x_{k_{i+1}} \\ (i+1) \end{smallmatrix} \right) \right|}{\left| x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}} \right|} \equiv \frac{2q_i}{\left| x_{k_{i+1}+1} - x_{k_{i+1}} \right|}. \end{aligned}$$

Also besteht auch (4) und so genügen die Werte

$$\alpha = x_{k_n}, \quad \beta = x_{k_{n+1}}, \quad \alpha' = x_{k_{n+1}}, \quad \beta' = x_{k_{n+1}+1}, \quad \lambda = \varepsilon$$

offensichtlich den Bedingungen des Lemmas, d. h. $t(x)$ ist eine stark nicht-differenzierbare Funktion.

Auf grund des folgenden Satzes werden wir mit der Konstruktion von $t(x)$ die Klasse der stetigen und Stark nicht-differenzierbaren Funktionen charakterisieren.

Satz 3. Ist $t(x)$ eine stetige und stark nicht-differenzierbare Funktion und Σq_i eine beliebige konvergente Reihe mit positiven Gliedern, so ist $t(x)$ eine Poliongrenzfunktion mit den Parametern $\lambda = \frac{\inf \vartheta_i(x)}{10}$, q_i .

Es bezeichne H die Menge der Punkte x , in denen die Differenz der Dinischen linksseitigen Ableitungszahlen, sowie diejenige der rechtsseitigen, nicht kleiner als 10λ ist. Es gilt also

$$x \in H, \text{ wenn } D_t^-(x) - d_t^-(x) \geq 10\lambda \text{ und } D_t^+(x) - d_t^+(x) \geq 10\lambda$$

ist (0 und 1 werden zu H gerechnet).

Es folgt jetzt aus dem Satz von DENJOY — YOUNG — SAKS, daß fast alle Punkte des Intervalls $[0, 1]$ in H liegen, also ist H überall dicht in $[0, 1]$. Wir werden die Abszissenwerte der Eckpunkte der in der Konstruktion auftretenden Polygonfunktionen aus H wählen.

Die Eigenschaft 2° wird dadurch gesichert, daß bei der Konstruktion von $t_i(x)$ die Bedingung $|t(x) - t_i(x)| < q_i$ befriedigt wird, damit wird nämlich auch die Ungleichung $|t_i(x) - t_{i+1}(x)| < q_i$ bestehen, wenn nur die Eckpunkte von $t_{i+1}(x)$ auf dem Bild von $t(x)$ gewählt werden.

Das Erfülltsein der Eigenschaft 3° werden wir so erreichen, daß wir solche Sehnen auf dem Bild von $t(x)$ nehmen, deren Projektionen auf die x -Achse das Intervall $[0, 1]$ bedecken und deren Richtungstangenten von den Richtungstangenten der Strecken von $t_{i-1}(x)$ mindestens um 3λ abweichen. Daraus wird durch Anwendung eines Hilfssatzes folgen, daß $t_i(x)$ mit der Eigenschaft 3° existiert.

Es sei $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$ eine solche Teilmenge von H , dass die Differenz des Maximums und des Minimums von $t(x)$ in $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) kleiner als ϱ_1 ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $t(x)$ existieren solche Werte x_i . Die Polygonfunktion der Punkte $(x_i, t(x_i))$ ist $t_1(x)$. Offensichtlich gilt $|t(x) - t_1(x)| < \varrho_1$. Es sei $x_i = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = x_{i+1}$ (Figur 2.) eine Teilmenge von H , für welche die Differenz des Minimums und des Maximums von $t(x)$ in $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) kleiner als ϱ_2 ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $t(x)$ gibt es solche Werte ξ_j . Wir können – wie wir es beweisen werden – aus H zu jedem Wert j in dem Intervall $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ solche Werte

$$\xi_j = \xi_{j1} < \xi_{j2} < \dots < \xi_{jl} = \xi_{j+1}$$

bestimmen, für die

$$(6) \quad |\operatorname{tg}_t(\xi_{jh}, \xi_{j, h+1}) - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong \lambda$$

ist.

Die Polygonfunktion der in den Teilintervallen $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ aller Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ liegenden sämtlichen Werten ξ_{jh} entsprechenden Punkte $(\xi_{jh}, t(\xi_{jh}))$ ist $t_2(x)$. Wegen der Definition von ξ_j ist $|t(x) - t_2(x)| < \varrho_2$ und es ist wegen der Definition von ξ_{jh} nach (6) die Eigenschaft 3° für $i=1$ gültig. Wir wählen jetzt in $[\xi_{jh}, \xi_{j, h+1}]$ solche Elemente

$$\xi_{jh} = \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_s = \xi_{j, h+1}$$

von H , für welche die Differenz des Maximums und des Minimums von $t(x)$ in $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$ kleiner als ϱ_3 ist, und wir nehmen in $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$ solche Elemente

$$\zeta_i = \zeta_{i1} < \zeta_{i2} < \dots < \zeta_{ir} = \zeta_{i+1}$$

von H , für die

$$(7) \quad |\operatorname{tg}_t(\zeta_{ig} - \zeta_{i, g+1}) - \operatorname{tg}_t(\xi_{jh}, \xi_{j, h+1})| \cong \lambda$$

gilt. Die Polygonfunktion der zu sämtlichen ζ_{ig} gehörigen Punkte $(\zeta_{ig}, t(\zeta_{ig}))$ ist $t_3(x)$. Nach der Definition von ζ_i ist $|t(x) - t_3(x)| < \varrho_3$ und es gilt nach der Definition von ζ_{ig} wegen (7) die Eigenschaft 3° für $i=2$.

Auf derselben Weise, wie $t_2(x)$ zu $t_1(x)$ mit ϱ_2 und $t_3(x)$ zu $t_2(x)$ mit ϱ_3 definiert wurden, wird zu $t_i(x)$ mit ϱ_{i+1} die Funktion $t_{i+1}(x)$ definiert. Es ist eine evidente Folge dieses Verfahrens, dass die Funktion $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i(x)$ eine Polygongrenzfunktion mit den Parametern λ, ϱ_i ist. Sie ist nach dem Satz 2 stetig und stimmt mit der stetigen Funktionen $t(x)$ in den Abszissen der Eckpunkte der einzelnen $t_i(x)$, d. h. auf einer überall dichten Menge überein. Sie ist deshalb identisch mit $t(x)$.

Es fehlt noch zum Beweis des Satzes 3 die Bestätigung der Existenz der Punkte ξ_{jh} . Zu dieser Bestätigung fixieren wir zuerst in (ξ_j, ξ_{j+1}) zwei Elemente γ und γ' von H mit $\xi_j < \gamma < \gamma' < \xi_{j+1}$, für die die Ungleichungen

$$|\operatorname{tg}_t(\xi_j, \gamma) - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 3\lambda \quad \text{und} \quad |\operatorname{tg}_t(\gamma', \xi_{j+1}) - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \cong 3\lambda$$

gelten. Dies ist nach der Definition von H und wegen $\xi_j, \xi_{j+1} \in H$ möglich. Man

kann jeden Punkt x in $[\gamma, \gamma']$ mit einem Intervall (γ_x, γ'_x) bedecken, für das die Relationen

$$\gamma_x \in H, \gamma'_x \in H, \xi_j \leq \gamma_x < \gamma'_x \leq \xi_{j+1}$$

und

$$(8) \quad |\operatorname{tg}_t(\gamma_x, \gamma'_x) - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \geq 3\lambda$$

bestehen. Es ist nämlich $t(x)$ stark nicht-differenzierbar, also existiert zu $x \in [\gamma, \gamma']$ ein Wertepaar

$$x', x'' \in [\xi_j, \xi_{j+1}] \quad (x' \neq x, x'' \neq x), \quad \text{für welches}$$

$$(9) \quad |\operatorname{tg}_t(x, x') - \operatorname{tg}_t(x, x'')| > 10\lambda - \lambda = 9\lambda$$

ist. Es besteht wenigstens eine der Ungleichungen

$$(10) \quad |\operatorname{tg}_t(x, x') - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| > 4\lambda$$

$$(11) \quad |\operatorname{tg}_t(x, x'') - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| > 4\lambda$$

denn sonst bekämen wir aus

$$|\operatorname{tg}_t(x, x') - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \leq 4\lambda$$

$$|\operatorname{tg}_t(x, x'') - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \leq 4\lambda$$

durch Addieren ein Resultat, das der Ungleichung (9) widerspricht.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (10) besteht, und daß $x < x'$ gilt. Man kann wegen der Stetigkeit von $t(x)$ eine Zahl δ mit

$$0 < \delta < \min(\gamma - \xi_j, \xi_{j+1} - \gamma')$$

so finden, dass sich die linke Seite von (10) nur wenig ändert statt x und x' die Werte $\gamma_x \in (x - \delta, x)$ und $\gamma'_x \in (x, x' + \delta)$ genommen werden, also wird dann (8) gültig sein.

Da die Menge H im Intervall $[0, 1]$ überall dicht ist, sind $\gamma_x \in H, \gamma'_x \in H$ erfüllbar. Nach dem Borelschen Satz wird das Intervall $[\gamma, \gamma']$ von endlich vielen der Intervalle (γ_x, γ'_x) bedeckt. Zur Bedeckung des Intervalls $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ benötigen wir noch höchstens die Intervalle $[\xi_j, \gamma]$ und $[\gamma', \xi_{j+1}]$. So wird $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ durch endlich viele Intervalle bedeckt.

Wählt man die bedeckenden abgeschlossenen Intervalle $[\gamma_r, \gamma'_r]$ ($r = 1, 2, \dots, s$) so, daß die Zahl s möglichst klein wird, so gelten

$$(12) \quad \xi_j = \gamma_1 < \gamma_2 \leq \gamma'_1 < \gamma_3 \leq \dots < \gamma_{s-1} \leq \gamma'_{s-2} < \gamma_s \leq \gamma'_{s-1} < \gamma'_s = \xi_{j+1}$$

und

$$(13) \quad |\operatorname{tg}_t(\gamma_r, \gamma'_r) - \operatorname{tg}_t(x_i, x_{i+1})| \geq 3\lambda.$$

Wir verwenden noch den folgenden

Hilfssatz. Es seien die Punkte $A_i(a_i, a'_i)$ und $B_i(b_i, b'_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) so gegeben, daß die Beziehungen

$$(14) \quad a_i < a_{i+1} \leq b_i < a_{i+2} \leq b_{i+1} < b_{i+2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2)$$

gelten, ferner, daß für ein gegebenes d

$$(15) \quad \left| \frac{b'_i - a'_i}{b_i - a_i} - d \right| \leq \kappa$$

mit gegebenem $\kappa > 0$ besteht. Dann können die Punkte $C_j(c_j, c'_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m \leq 2n$) aus den Punkten A_i, B_i so gewählt werden, daß

$$(16) \quad \left| \frac{c'_{j+1} - c'_j}{c_{j+1} - c_j} - d \right| \leq \frac{\kappa}{3}$$

und $A_1 = C_1, B_n = C_m, c_j < c_{j+1}$ gelten.

Wir können diesen Hilfssatz auf die Punkte

$$A_i = (\gamma_i, t(\gamma_i)), B_i = (\gamma'_i, t(\gamma'_i)) \quad \text{mit} \quad d = \text{tg}_t(x_i, x_{i+1}), \quad \kappa = 3\lambda$$

anwenden, da so wegen (12), (13) auch (14) und (15) gültig sein werden. Wir bekommen solche Punkte $C_h = (\zeta_{jh}, t(\zeta_{jh}))$, die wegen (16) der Bedingung (6) genügen.

Der Hilfssatz wird mit vollständiger Induktion bewiesen. Er gilt für $n = 1$, da $C_1 = A_1$ und $C_2 = B_1$ eine Lösung bedeuten. Nehmen wir an, daß die Behauptung für $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$) richtig ist.

Es genügt den Fall zu erledigen, wenn

$$(17) \quad |\text{tg } A_1 A_i - d| \leq \frac{\kappa}{3} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

gilt. Im entgegengesetzten Fall ist für ein l $|\text{tg } A_1 A_l - d| > \frac{\kappa}{3}$, und dann befriedigen die aus den Punkten

$$A_l, A_{l+1}, \dots, A_n, B_l, B_{l+1}, \dots, B_n$$

auf Grund der Induktionsannahme gewonnenen Punkte zusammen mit A_1 die Bedingungen des Hilfssatzes.

Es wird genügen uns mit dem Fall

$$(18) \quad \text{tg } A_1 B_1 \leq d$$

zu beschäftigen, da — wie man es aus dem Beweise sehen wird — der Fall $\text{tg } A_1 B_1 \geq d$ in ähnlicher Weise behandelt werden kann.

Ebenfalls mit vollständiger Induktion werden wir beweisen, daß es genügt uns mit dem Fall zu beschäftigen, wenn für $i \leq n-1$ die folgenden Behauptungen gelten:

$$1_i \quad \text{tg } A_i B_i \leq d.$$

2_i Wir bezeichnen mit h bzw. mit g die Halbgeraden mit den Richtungstangenten d bzw. $d - \frac{\kappa}{3}$, die in der Richtung der wachsenden x von dem Punkt A_1 hinausgehen, und ebenso mit e_i die aus B_i gezogene Halbgerade mit Richtungstangente $d + \frac{\kappa}{3}$ (Figur 3). Der Schnittpunkt von g und e_i sei $P_i(x_i, y_i)$ ($P_0 = A_1$).

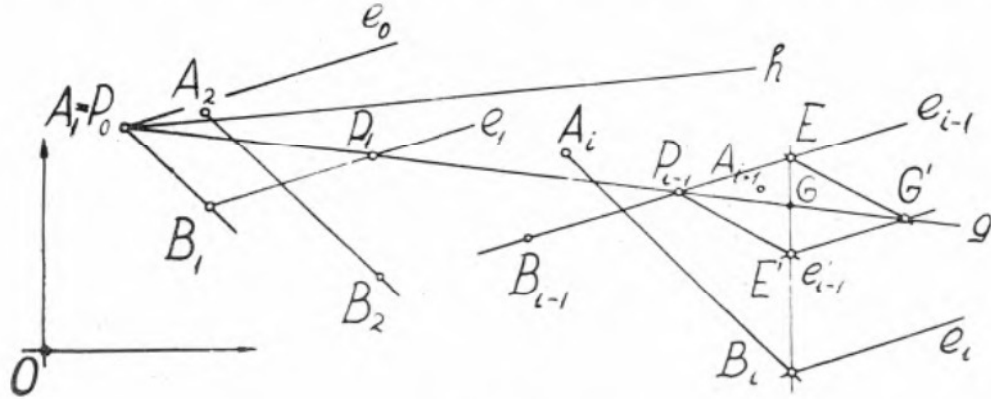
Behauptung: der Punkt A_{i+1} liegt in dem Winkel, der für Scheitelpunkt P_{i-1} , für Schenkel die Halbgeraden g und e_{i-1} hat.

$$3_i \quad b_i \cong x_{i-1}.$$

$$4_i \quad b'_i \cong (d - \kappa)(b_i - x_{i-1}) + y_{i-1}.$$

3_i und 4_i drücken anschaulich aus, daß der Punkt B_i unter der aus P_{i-1} mit Richtungstangente $d - \kappa$ ausgehenden Geraden e'_{i-1} liegt.

Wir betrachten zuerst den Fall $i=1$. Nach (18) stellten wir fest, daß es genügt uns mit dem in 1_1 vorausgesetzten Fall zu beschäftigen. Es ist 2_1 die Ungleichung



Figur 3

(17) für $i=2$. 3_1 folgt aus der Bedingung (14) des Hilfssatzes. 4_1 ist eine triviale Folge von 1_1 und von der Bedingung (15).

Nehmen wir an, daß $1_j - 2_j - 3_j - 4_j$ für $j=1, 2, 3, \dots, i$ gültig sind.

Besteht $\text{tg } A_{i+1}B_{i+1} > d$, so folgt nach (17) $|\text{tg } A_1A_{i+1} - d| \cong \frac{\kappa}{3}$, und so liegt A_{i+1} über (oder an) der Geraden g , und es liegt B_i nach 3_i und 4_i unter (oder an) dieser Geraden, also ist

$$\text{tg } A_{i+1}B_{i+1} \cong \text{tg } B_iB_{i+1},$$

d. h. (vgl. (15))

$$\kappa \cong \text{tg } A_{i+1}B_{i+1} - d \cong \text{tg } B_iB_{i+1} - d.$$

Dies bedeutet zusammen mit der aus 4_i herleitbaren Ungleichung

$$|\text{tg } A_1B_i - d| \cong \frac{\kappa}{3},$$

daß die aus den Punkten

$$B_i, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots, A_n, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, \dots, B_n$$

nach der Induktionsannahme gewonnenen Punkte zusammen mit A_1 die Forderung des Hilfssatzes befriedigende Punkte ergeben. Es genügt also uns mit dem Fall zu beschäftigen, wo 1_{i+1} gilt.

Nach 4_i existiert der Punkt P_i .

Gilt 2_{i+1} nicht, so liegt A_{i+2} unter der Halbgeraden A_1P_i , oder über der Halbgeraden B_iP_i (natürlich schließen sich diese Fälle nicht aus). Im ersten Falle wäre

$|\text{tg } A_1A_{i+2} - d| > \frac{\kappa}{3}$, im Gegensatz zu (17.). Im zweiten Fall ist $|\text{tg } B_iA_{i+2} - d| > \frac{\kappa}{3}$,

und dies bedeutet, dass die aus den Punkten

$$A_{i+2}, A_{i+3}, \dots, A_n, B_{i+2}, B_{i+3}, \dots, B_n$$

nach der Induktionsannahme aus gewählten Punkte mit den Punkten A_i und B_i wegen der aus 4_i herleitbaren Ungleichung $|\operatorname{tg} A_i B_i - d| \geq \frac{\varkappa}{3}$ den Forderungen des Hilfssatzes genügen.

Wegen 2_{i+1} ist $a_{i+2} \geq x_i$, aber es ist $b_{i+1} \geq a_{i+2}$, also gilt $b_{i+1} \geq x_i$, d. h. es besteht 3_{i+1} .

Die Gerade $b_i = x$ schneidet die Geraden g, e_{i-1} , und e'_{i-1} in den — wegen 3_i existierenden — Punkten G, E, E' . Infolge der Bedingungen, die den Richtungstangenten der Geraden g, e_{i-1}, e'_{i-1} auferlegt wurden, wird die Strecke EE' vom Punkt G halbiert.

Deshalb liegt der Schnittpunkt $G'(g_1, g_2)$ der durch E mit $P_{i-1}E'$, bzw. durch E' mit $P_{i-1}E$ parallel gezogenen Geraden an der Geraden g ($P_{i-1}EG'E'$ ist ein Parallelogramm).

Der Punkt A_{i+1} liegt wegen 2_i im Inneren (oder an der Grenze) des Dreiecks $P_{i-1}GE$, und so liegt B_{i+1} — infolge der Ungleichung $d - \operatorname{tg} A_{i+1}B_{i+1} \geq \varkappa$ — unter (oder an) der von E herausgehenden Halbgeraden EG' .

Nach 4_i ist die Ordinate des Punktes E' nicht kleiner als b'_i , und deshalb ist $x_i \geq g_1$. Daraus folgt (wegen 3_{i+1}) $g_1 \leq b_{i+1}$. Liegt also B_{i+1} unter (oder an) der Halbgeraden EG' , so ist er umsomehr unter (oder an) der Halbgeraden e'_i , d. h. es gilt 4_{i+1} .

Somit haben wir die Behauptungen für $i \leq n-1$ bewiesen. Der vorige Beweis von 1_{i+1} gilt auch noch für $i = n-1$, und so besteht 1_n . Verwendet man ferner die vorigen Beziehungen für $i = n-1$, so liegt A_n wegen 2_{n-1} in dem Dreieck $P_{n-2}GE$, und B_n ist — infolge von 1_n und (15) — unter der Geraden EG' . Liegt B_n unter der Geraden GG' , so ist $|\operatorname{tg} A_1 B_n - d| \geq \frac{\varkappa}{3}$ und somit bedeuten $C_1 = A_1, C_2 = B_n$ den Beweis des Hilfssatzes. Liegt B_n über der Geraden GG' , so ist er umsomehr über $E'G'$, und so ist $|\operatorname{tg} B_{n-1} B_n - d| \geq \frac{\varkappa}{3}$, also bedeutet $C_1 = A_1, C_2 = B_{n-1}$ und $C_3 = B_n$ den Beweis des Hilfssatzes.

Literatur

- [1] Z. GEÖCZE, Polytonos rendszert képező síkgörbék ívhosszáról, *Az Ungvári Állami Reáliskola 1904/5 évi Értésítője*, 1—32.
- [2] S. KÁNTOR, Über die Funktion von Z. Geöcze, *Mat. Lapok*, 8 (1957), 264—268 (ungarisch).
- [3] M. MIKOLÁS, Constructions des familles de fonctions partout continues non dérivables, *Acta Sci. Math. Szeged*, 17 (1956), 49—62.
- [4] P. SZÁSZ, Einfache Herstellung einer Klasse von nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen auf Grund eines elementaren Satzes der analytischen Geometrie, *Publ. Math. Debrecen* 7 (1960), 1—19.
- [5] B. SZÉNÁSSY, Geöcze Zoárd matematikai munkássága és a felszínmérés újabb eredményei, *A Szt. István Akadémia Értésítője* 28 (1943), 118—142.

(Eingegangen am 15. Januar 1962.)