

## Bestimmung aller Spiegelkurven, die für parallelen Lichteinfall untereinander ähnliche oder kongruente Brennlinien erzeugen

Von W. WUNDERLICH (Wien)

**Zusammenfassung.** Durch Zurückführung einer Funktionalgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung wird gezeigt, daß nur die folgenden reellen Kurven der Ebene die Eigenschaft haben, ein Büschel paralleler Lichtstrahlen so zu reflektieren, daß die entstehende Brennlinie sich bei Wechsel der Lichtrichtung bloß ähnlich oder kongruent verändert: Die logarithmische Spirale, der Kreis, die dreispitzige Hypozykloide und die Parabel. Die zugehörigen Brennlinien sind der Reihe nach: Ähnliche Spiraloiden, kongruente Nephroiden, kongruente Astroiden und ähnliche Tschirnhauskubiken.

**1. Vorbereitung.** Sei  $k$  eine beliebige, spiegelnd gedachte Kurve der Ebene, gegeben durch ihre *Tangentengleichung* in kartesischen Koordinaten

$$(1) \quad x \sin \tau - y \cos \tau = h(\tau).$$

Die „Stützfunktion“  $h(\tau)$ , die den Zentralabstand  $h$  der Tangente in Abhängigkeit vom Richtungswinkel  $\tau$  festlegt, sei viermal differenzierbar vorausgesetzt. Ableitung nach dem Parameter  $\tau$  liefert zunächst die *Kurvennormale*

$$(2) \quad x \cos \tau + y \sin \tau = h',$$

anschließend die *Evolutennormale*

$$(3) \quad -x \sin \tau + y \cos \tau = h''.$$

Im Abstand der parallelen Geraden (1) und (3) hat man dann den *Krümmungsradius*

$$(4) \quad \varrho = h'' + h.$$

Die Funktion  $\varrho = \varrho(\tau)$  legt die Kurve  $k$  bis auf Parallelverschiebungen fest, die Funktion  $\bar{\varrho} = \lambda \cdot \varrho(\tau - \mu)$  analog jene Schar zu  $k$  ähnlicher Kurven  $\bar{k}$ , die aus  $k$  durch Maßstabsänderung  $\lambda:1$ , Drehung um den Winkel  $\mu$  und Parallelverschiebung hervorgehen.

Trifft ein *paralleles Lichtstrahlenbüschel* mit dem Richtungswinkel  $\alpha$  auf die Kurve  $k$ , dann erhält man das System der reflektierten Strahlen einfach durch

Bildung der Linearkombination von (1) und (2) mittels der Faktoren  $\cos(\tau - \alpha)$  und  $\sin(\tau - \alpha)$ . Die so gewonnene Gerade

$$(5) \quad x \sin(2\tau - \alpha) - y \cos(2\tau - \alpha) = H(\tau) \equiv h \cos(\tau - \alpha) + h' \sin(\tau - \alpha)$$

enthält nämlich den im Schnitt von (1) und (2) liegenden Kurvenpunkt  $T(\tau)$  und hat den vom Reflexionsgesetz vorgeschriebenen Richtungswinkel  $2\tau - \alpha$  (Abb. 1).

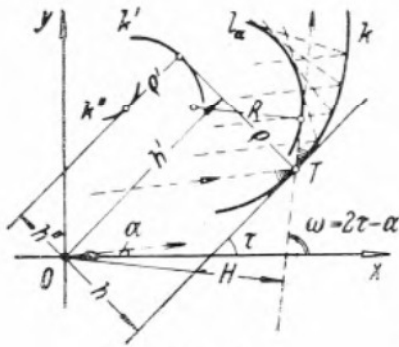


Abb. 1

Die von den reflektierten Lichtstrahlen eingehüllte *Brennlinie* (*Kaustik*)  $l_\alpha$  wird nun durch die Funktion  $H(\tau)$ , in ihrer Abhängigkeit vom Richtungswinkel  $\omega = 2\tau - \alpha$  betrachtet, ebenso beschrieben wie die Spiegelkurve  $k$  durch  $h(\tau)$ . Demzufolge ergibt sich analog zu (4) der *Krümmungsradius*  $R$  von  $l_\alpha$  durch

$$(6) \quad R = \frac{1}{4} H'' + H = \frac{1}{4} (h''' + h') \cdot \sin(\tau - \alpha) + \frac{3}{4} (h'' + h) \cos(\tau - \alpha).$$

Zwischen den Krümmungsradien der Spiegelkurve  $k$  und der Brennlinie  $l_\alpha$  besteht mithin die für das Folgende grundlegende Relation:

$$(7) \quad R = \frac{1}{4} \rho' \sin(\tau - \alpha) + \frac{3}{4} \rho \cos(\tau - \alpha).$$

**2. Problemstellung und Ansatz.** Nimmt das Bündel der einfallenden Lichtstrahlen alle möglichen Richtungen  $\alpha$  an, so durchläuft die Brennlinie  $l_\alpha$  von  $k$  eine gewisse *Schar*  $\{l_\alpha\}$ . Es wird nun die Frage aufgeworfen, wann eine solche Schar aus lauter untereinander *ähnlichen* oder sogar *kongruenten Brennlinien* besteht?

Es liegt auf der Hand, daß dies sicher dann der Fall ist, wenn die Spiegelkurve  $k$  selbst eine kontinuierliche Gruppe von Ähnlichkeits- oder Kongruenztransformationen gestattet, also wenn  $k$  eine *logarithmische Spirale* bzw. ein *Kreis* ist. Merkwürdigerweise sind aber noch zwei weitere derartige Vorkommnisse bekannt, nämlich bei Annahme einer spiegelnden *Parabel* [1, 3] oder einer *Steinerzykloide* [2, 3]. Ob es darüber hinaus noch weitere Beispiele geben kann, war bis jetzt ungeklärt. In der vorliegenden Note soll nun gezeigt werden, daß mit den vier aufgezählten Fällen tatsächlich *alle Möglichkeiten* (im Reellen) erschöpft sind.

Beachtet man, daß die zur Spiegelkurve  $k$  gehörigen Brennlinien  $l_\alpha$  der Gestalt nach vollständig durch die Abhängigkeit  $R = R(\tau, \alpha)$  gemäß (7) charakterisiert sind, dann läuft die Forderung nach Ähnlichkeit irgend zweier Brennlinien  $l_\alpha$  und  $l_{\alpha+\beta}$  darauf hinaus, daß zwischen ihren „natürlichen“ Gleichungen  $R = R(\tau, \alpha)$  und  $\bar{R} = R(\tau, \alpha + \beta)$  nach einer oben gemachten Bemerkung eine Relation

$$(8) \quad R(\tau, \alpha + \beta) = \lambda \cdot R(\tau - \mu, \alpha)$$

besteht. Diese Beziehung muß identisch in  $\tau$  gelten, wobei  $\lambda$  und  $\mu$  noch in irgendeiner Weise von  $\alpha$  und  $\beta$  (jedoch nicht von  $\tau$ ) abhängen werden.

Zur Lösung dieser *Funktionalgleichung*, in welcher zufolge (7) neben der unbekannten Funktion  $q(\tau)$  auch noch deren Ableitung  $q'$  auftritt, lassen wir bei festem  $\alpha$  den Zuwachs  $\beta \rightarrow 0$  gehen. Hierbei wird  $\lambda \rightarrow 1$  und  $\mu \rightarrow 0$  streben, und wir setzen

$$(9) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\lambda - 1}{\beta} = n, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mu}{\beta} = m,$$

die Existenz dieser Grenzwerte hiermit annehmend. Formen wir die Beziehung (8) um in

$$\frac{R(\tau, \alpha + \beta) - R(\tau, \alpha)}{\beta} = \frac{\lambda - 1}{\beta} \cdot R(\tau - \mu, \alpha) + \frac{R(\tau - \mu, \alpha) - R(\tau, \alpha)}{\beta},$$

so erhalten wir mit  $\beta \rightarrow 0$  als Bedingung für die *infinitesimale Ähnlichkeit benachbarter Brennlinsen* die Gleichung

$$(10) \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha} + m \frac{\partial R}{\partial \tau} = nR.$$

Hierin hängen die Koeffizienten  $m$  und  $n$  nur mehr von  $\alpha$  ab.

Setzen wir nunmehr für  $R$  den Ausdruck gemäß (7) ein, so erhalten wir eine *gewöhnliche, linear-homogene Differentialgleichung 2. Ordnung*:

$$(11) \quad m \sin(\tau - \alpha) \cdot q'' + [(4m - 1) \cos(\tau - \alpha) - n \sin(\tau - \alpha)] \cdot q' - 3[(m - 1) \sin(\tau - \alpha) + n \cos(\tau - \alpha)] \cdot q = 0.$$

(Zufolge der Voraussetzung über  $h$  ist  $q$  zweimal differenzierbar.)

Die unbekannte Funktion  $q(\tau)$  muß einer solchen Differentialgleichung genügen, stellt jedoch keineswegs ihr allgemeinstes Integral dar; sie ist vielmehr durch die Forderung eingeschränkt, eine ganze *einparametrische Schar* solcher Gleichungen mit geeignetem  $m = m(\alpha)$  und  $n = n(\alpha)$  befriedigen zu sollen. Umgekehrt führt jede derartige Lösung zu einer Antwort auf unsere Frage, da infinitesimale Ähnlichkeit an jeder Stelle der Schar  $\{I_\alpha\}$  gewißlich die finite Ähnlichkeit zwischen irgend zwei Scharkurven nach sich zieht.

**3. Lösung des Hauptfalls**  $m \neq 0$ . Für den Fall, daß  $m$  nicht identisch verschwindet, kann die Gleichung (11) mit Benützung der Abkürzungen

$$(12) \quad \frac{4m - 1}{m} = p, \quad \frac{n}{m} = q$$

einfacher geschrieben werden:

$$(13) \quad (q'' + 9q) + [p \operatorname{ctg}(\tau - \alpha) - q]q' - [p + q \operatorname{ctg}(\tau - \alpha)] \cdot 3q = 0.$$

Wir greifen nun aus der Gleichungsschar die beiden zu  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \pi/2$  gehörigen Teilgleichungen heraus, deren (konstante) Koeffizienten wir mit  $p_0, q_0$  bzw.  $p_1, q_1$  bezeichnen:

$$(14) \quad \begin{aligned} (q'' + 9q) + (p_0 \operatorname{ctg} \tau - q_0)q' - (p_0 + q_0 \operatorname{ctg} \tau) \cdot 3q &= 0, \\ (q'' + 9q) - (p_1 \operatorname{tg} \tau + q_1)q' - (p_1 - q_1 \operatorname{tg} \tau) \cdot 3q &= 0. \end{aligned}$$

Für die uns interessierende gemeinsame Lösung muß gelten

$$\begin{aligned} (q'' + 9q) : q' : 3q &= (p_0 p_1 + q_0 q_1)(\operatorname{ctg} \tau + \operatorname{tg} \tau) : \\ &: (p_0 - p_1 + q_0 \operatorname{ctg} \tau + q_1 \operatorname{tg} \tau) : (p_0 \operatorname{ctg} \tau + p_1 \operatorname{tg} \tau - q_0 + q_1), \end{aligned}$$

und zwar identisch in  $\tau$ . Setzen wir noch

$$(15) \quad p_0 - p_1 = a, p_0 + p_1 = A, q_0 - q_1 = b, q_0 + q_1 = B, p_0 p_1 + q_0 q_1 = D,$$

dann läßt sich auf Grund einfacher Umformungen mittels eines noch zu bestimmen-  
den *Proportionalitätsfaktors*  $f(\tau)$  der nachstehende Ansatz treffen:

$$\begin{aligned} (16) \quad 3q &= f \cdot (a \cos 2\tau - b \sin 2\tau + A), \\ q' &= f \cdot (a \sin 2\tau + b \cos 2\tau + B), \\ q'' + 9q &= f \cdot 2D. \end{aligned}$$

Differenziert man nun die ersten beiden Gleichungen nach  $\tau$  und vergleicht man die so erhaltenen Ausdrücke für  $3q'$  und  $q''$  mit den Ansätzen, so erhält man zwei *linear-homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung* für  $f(\tau)$ :

$$\begin{aligned} (17) \quad (a \cos 2\tau - b \sin 2\tau + A)f' - (5a \sin 2\tau + 5b \cos 2\tau + 3B)f &= 0, \\ (a \sin 2\tau + b \cos 2\tau + B)f' + (5a \cos 2\tau - 5b \sin 2\tau + 3A - 2D)f &= 0. \end{aligned}$$

Sollen diese beiden Gleichungen aber eine gemeinsame nichttriviale Lösung zulassen, so muß ihre *Determinante verschwinden*. Dies führt auf die *notwendige Identität*

$$\begin{aligned} (18) \quad (8aA + 8bB - 2aD) \cos 2\tau + (8aB - 8bA + 2bD) \sin 2\tau + \\ + (5a^2 + 5b^2 + 3A^2 + 3B^2 - 2AD) &= 0, \end{aligned}$$

die nur dann bestehen kann, wenn alle drei Klammerausdrücke verschwinden. Es muß mithin gelten:

$$\begin{aligned} (19) \quad (4A - D)a + 4Bb &= 0, \\ -4Ba + (4A - D)b &= 0, \\ 5(a^2 + b^2) + 3(A^2 + B^2) &= 2AD. \end{aligned}$$

Hinsichtlich des Verhaltens der zu den ersten beiden Gleichungen gehörigen *Determinante*

$$(20) \quad \Delta = (4A - D)^2 + 16B^2$$

sind nun zwei Unterfälle zu unterscheiden.

1. Unterfall:  $\Delta \neq 0$ .

Aus den ersten beiden Teilgleichungen (19) folgt zunächst  $a = b = 0$ , also gemäß (15)

$$(21) \quad p_0 = p_1, q_0 = q_1.$$

Die dritte Gleichung (19) nimmt dann mit  $A = 2p_0$  und  $B = 2q_0$  die Gestalt

$$(22) \quad D(p_0 - 3) = 0 \quad \text{mit} \quad D = p_0^2 + q_0^2$$

an. Nun ist aber  $D \neq 0$ , denn  $D=0$  wäre im Reellen nur durch  $p_0=q_0=0$  erfüllt, und dies würde entgegen der Voraussetzung auch  $\Delta=0$  nach sich ziehen. Es ist also  $p_0=3$  bei beliebigem  $q_0$ , und die Differentialgleichung (17) lautet

$$(23) \quad f' - q_0 f = 0.$$

Ihr Integral  $f = \frac{1}{2} C \cdot e^{q_0 \tau}$  führt über die erste Teilgleichung (16) auf die Lösung

$$(24) \quad \varrho = C \cdot e^{q_0 \tau}.$$

Man überzeugt sich sofort, daß diese Lösung auch die allgemeine Gleichung (13) befriedigt, wenn man in dieser  $p=3$  und  $q=q_0$  annimmt; wir schreiben daher von jetzt ab einfacher  $q$  statt  $q_0$ .

Die geometrische Interpretation der „natürlichen“ Gleichung (24) liegt auf der Hand: Die durch sie charakterisierte Spiegelkurve  $k$  ist für  $q_0=q \neq 0$  eine *logarithmische Spirale*

$$(25) \quad h = c \cdot e^{q\tau} \quad \text{mit} \quad c(1+q^2) = C.$$

Ihre Brennpunkte  $l_x$  werden gemäß (5) beschrieben durch

$$(26) \quad \begin{aligned} H &= c e^{q\tau} [\cos(\tau - \alpha) + q \sin(\tau - \alpha)] = \\ &= c' e^{q\omega/2} \sin \frac{\omega - \alpha + 2\gamma}{2}, \quad \text{wobei} \quad \text{ctg } \gamma = q. \end{aligned}$$

Diese Kurven gehören zu der bemerkenswerten Familie der „*Spiraloiden*“, die der Verfasser kürzlich näher untersucht hat [4]. Die Funktionalgleichung (8), welche die Beziehungen in der Ähnlichkeitsschar  $\{l_x\}$  regelt, besteht mit  $\lambda = e^{q\beta}$ ,  $\mu = \beta$ . — Im Grenzfall  $q_0=q=0$  kennzeichnet die Gleichung (24) einen Kreis vom Halbmesser  $\varrho = C$ , dessen Brennpunkte eine Drehschar aus kongruenten „*Nephroiden*“

$$(27) \quad H = C \cdot \cos(\tau - \alpha) = C \cdot \cos \frac{\omega - \alpha}{2}$$

bilden; es handelt sich hierbei um jene bekannten *zweispitzigen Epizykloiden*, die als Brennpunkte in jeder Kaffeetasse beobachtet werden können [5, 6].

2. Unterfall:  $\Delta=0$ .

Das Verschwinden der Determinante (20) bedingt im Reellen  $4A - D = B = 0$ . Die ersten beiden Teilgleichungen (19) sind damit von selbst erfüllt, und die dritte lautet jetzt:  $a^2 + b^2 = A^2$ . Mit Rücksicht auf  $q_0 = -q_1$  bedeutet das  $p_0 p_1 = q_0^2$ , also  $D=0$ . Mithin ist

$$(28) \quad A = B = a = b = p_0 = q_0 = 0.$$

Die Differentialgleichung (14) reduziert sich damit auf

$$(29) \quad \varrho'' + 9\varrho = 0,$$

und ihre Lösung

$$\varrho = C_1 \sin 3\tau + C_2 \cos 3\tau$$

befriedigt auch die allgemeine Gleichung (13), wenn man  $p=q=0$  setzt. Durch Drehung des Koordinatensystems läßt sich die Darstellung der Lösung übrigens vereinfachen zu

$$(30) \quad \varrho = C \cdot \sin 3\tau$$

Die dadurch charakterisierte Spiegelkurve  $k$  ist die bekannte *dreispitzige Hypozykloide* J. STEINERS, deren Stützfunktion angenommen werden kann mit

$$(31) \quad h = c \cdot \sin 3\tau, \quad \text{wobei} \quad C = -8c.$$

Die Brennlinienschar  $\{I_\alpha\}$  wird zufolge (5) dargestellt durch

$$(32) \quad H = 2c \cdot \sin(4\tau - \alpha) - c \cdot \sin(2\tau + \alpha) = 2c \cdot \sin(2\omega + \alpha) - c \cdot \sin(\omega + 2\alpha)$$

und besteht aus *kongruenten Astroiden* (vierspitzigen Hypozykloiden) mit dem Inkreisradius  $2c$ , deren Mittelpunkte den Kreis

$$x = -c \cdot \cos 2\alpha, \quad y = c \cdot \sin 2\alpha$$

erfüllen [2, 3]. Jede dieser Astroiden  $I_\alpha$  ist der Steinerzykloide  $k$  in dem Sinne „umschrieben“, daß sie durch deren drei Spitzen geht und sie überdies noch an einer Stelle berührt.<sup>1)</sup>

Die zugehörige Funktionalgleichung (8) gilt mit  $\lambda=1$  und  $\mu=\beta/4$ .

**4. Lösung des Sonderfalls  $m=0$ .** Im Falle der zurückgestellten Annahme, daß  $m$  identisch verschwindet, erniedrigt sich die Ordnung der Differentialgleichung (11) auf eins:

$$(33) \quad [\cos(\tau - \alpha) + n \sin(\tau - \alpha)] \cdot \varrho' + 3[n \cos(\tau - \alpha) - \sin(\tau - \alpha)] \varrho = 0.$$

Setzt man  $n = \operatorname{tg} v$ , so läßt sich die Gleichung umformen zu

$$(34) \quad \frac{\varrho'}{\varrho} = 3 \operatorname{tg}(\tau - \alpha - v),$$

und die Lösung lautet

$$\varrho = C \cdot \cos^{-3}(\tau - \alpha - v), \quad \text{wobei} \quad \alpha + v = \text{const},$$

da  $\alpha$  in  $\varrho(\tau)$  nicht auftreten darf. Durch Drehung des Koordinatensystems kann speziell  $\alpha + v = 0$  erreicht werden, sodaß wir uns auf die Normalform

$$(35) \quad \varrho = C \cdot \cos^{-3}\tau$$

<sup>1)</sup> Eine der Steinerzykloide  $k$  solcherart umschriebene Astroide  $I_\alpha$  ist mithin trotz vierfacher Stützung mit einem Freiheitsgrad starr *beweglich*. Die beim Durchlaufen der Scher  $[I_\alpha]$  vollführte Bewegung ist eine einfache Kreisrollung, d. h. die Kurven  $k$  und  $I_\alpha$  könnten bei Drehung um ihre festgehaltenen Mittelpunkte wie Zahnräder arbeiten. Es handelt sich um eine geometrisch ausgezeichnete Sonderform der dem Techniker geläufigen „Zykloidenverzahnung“, sowie um einen Spezialfall der merkwürdigen, von F. MORLEY entdeckten „adjustierbaren Zykloidenpaare“ [7], der sich auch den eigenartigen, unlängst vom Verfasser ermittelten, aus Radlinien bestehenden Gleitkurvenpaaren unterordnen läßt [8].



beschränken können. Für die zugehörige Stützfunktion findet man durch Integration der Gleichung (4):

$$(36) \quad h = \frac{C}{2 \cos \tau},$$

was, wie man durch Auflösung der Gleichungen (1) und (2) bestätigt, eine *Parabel*

$$x = C \cdot \operatorname{tg} \tau, \quad y = \frac{C}{2} (\operatorname{tg}^2 \tau - 1)$$

kennzeichnet, die ihren Brennpunkt im Ursprung hat.<sup>2)</sup> Die Brennninienschar  $\{l_\alpha\}$  wird zufolge (5) dargestellt durch

$$(37) \quad H = \frac{C \cos \alpha}{2 \cos^2 \tau} = \frac{C \cos \alpha}{1 + \cos (\omega + \alpha)}.$$

Sie besteht aus untereinander ähnlichen *Tschirnhauskubiken*, das sind spezielle rationale Kurven 3. Ordnung (4. Klasse), die die Ferngerade zur Wendetangente haben.<sup>3)</sup>

Die einschlägige Funktionalgleichung (8) besteht mit  $\lambda = \cos (\alpha + \beta) / \cos \alpha$  und  $\mu = 0$ .

Damit ist die vollständige Diskussion der Schlüsselgleichung (11) abgeschlossen. Sie lieferte alle bisher bekannten Lösungen des aufgeworfenen Spiegelproblems, lehrte aber darüber hinaus, daß es (im Reellen) keine weiteren, vielleicht noch unentdeckten gibt.

### Literatur

- [1] E. LAGUERRE, Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles, *Nouv. Ann. Math.* 2 (1883), 16–34, insb. 27.
- [2] E. KÖSTLIN, Über eine Transformation ebener Kurven, *Math.-natw. Mitt. Württemberg* 8 (1906), 72–99, insb. 88.
- [3] E. STÜBLER, Über Brennnlinien durch Reflexion, *Z. math. natw. Unterricht* 39 (1908), 121–144, insb. 135 und 139.
- [4] W. WUNDERLICH, Sur une certaine généralisation des cycloïdes, *Simon Stevin* (im Druck).
- [5] H. WIELEITNER, Spezielle ebene Kurven, (Sammlung Schubert 56), Leipzig, 1908.
- [6] G. LORIA, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Bd. II, Leipzig, 1908.
- [7] F. MORLEY, On adjustable cycloïdal and trochoidal curves, *Amer. J. Math.* 16 (1894), 188–204.
- [8] W. WUNDERLICH, Über Gleitkurvenpaare aus Radlinien, *Math. Nachr.* 20 (1954), 373–380.

(Eingegangen am 19. Januar 1962.)

<sup>2)</sup> Faßt man  $h$  und  $\tau$  als Polarkoordinaten des Fußpunkts des aus dem Ursprung  $O$  auf die Spiegeltangente (1) gefällten Lotes auf, dann besagt die Gleichung (36), daß die Fußpunktkurve der Spiegelkurve  $k$  eine *Gerade* ist, wodurch  $k$  auch als Parabel mit dem Brennpunkt  $O$  gekennzeichnet wird.

<sup>3)</sup> Faßt man  $H$  und  $\omega$  als Polarkoordinaten des Fußpunkts des aus dem Ursprung  $O$  auf die Brennnlinientangente (5) gefällten Lotes auf, dann besagt die Gleichung (37), daß die Fußpunktkurve der Brennnlinie  $l_\alpha$  eine *Parabel* mit dem Brennpunkt  $O$  ist, wodurch  $l_\alpha$  auch als *Tschirnhauskubik* gekennzeichnet wird [5, 6].