

О ПОЛУГРУППЕ ПОДМНОЖЕСТВ ПОЛУГРУППЫ

Ш. Лайош (Будапешт)

Профессору Б. С.-Надь к его пятидесятилетию

В книге [1] Е. С. Ляпин обращает внимание на важность исследования полугруппы подмножеств полугруппы. В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с этим направлением.

В дальнейшем предполагаются известными следующие понятия общей теории полугрупп: подполугруппа, левый идеал, двусторонний идеал, идемпотентный элемент, нуль полугруппы, регулярная полугруппа, полуструктура, гомогруппа (см. например, книгу Е. С. Ляпина [1]).

Пусть S есть произвольная полугруппа и A, B — два подмножества полугруппы S . Произведением подмножеств A и B полугруппы S называется множество, состоящее из всех элементов вида ab , где $a \in A, b \in B$. Оно обозначается через AB .

Обозначим через $\bar{S}$ совокупность всех непустых подмножеств полугруппы S . Легко доказать, что множество $\bar{S}$ является полугруппой относительно описанного действия. Ясно, что полугруппа S коммутативна, если $\bar{S}$ коммутативна, и $\bar{S}$ идемпотентна, если S идемпотентна. (Полугруппа S называется идемпотентной, если все элементы S идемпотентны.) Следуя Ш. Шварца [2], полугруппу S называем нормальной, если выполняется соотношение

$$(1) \quad xS = Sx,$$

для всех $x \in S$.

Теорема 1. Если полугруппа S нормальная, тогда полугруппа $\bar{S}$ также является нормальной.

Доказательство. Нужно доказать, что

$$A\bar{S} = \bar{S}A,$$

где A произвольное непустое подмножество полугруппы S . а) Мы докажем,

что $AS \subseteq SA$. Так как полугруппа S нормальная, имеем

$$aB \subseteq aS = Sa \subseteq SA \subseteq \bar{S}A,$$

где $a \in A$, $B \in \bar{S}$. Итак $A\bar{S} \subseteq \bar{S}A$.

б) Аналогично доказывается, что $\bar{S}A \subseteq A\bar{S}$. Из а) и б) следует, что $AS = SA$, для всех $A \in S$, т. е. полугруппа S является нормальной, что и требовалось доказать.

Определение. Подполугруппа A полугруппы S называется $(1, 1)$ -идеалом, если выполняется соотношение

$$(2) \quad ASA \subseteq A.$$

Понятие $(1, 1)$ -идеала является специальным случаем понятия (m, n) -идеала [3]. Докажем, что совокупность всех $(1, 1)$ -идеалов любой полугруппы S является полугруппой, и полугруппа всех $(1, 1)$ -идеалов полугруппы S есть двусторонний идеал полугруппы $\bar{S}$.

Лемма. Произведение $(1, 1)$ -идеала и непустого подмножества полугруппы S является $(1, 1)$ -идеалом полугруппы S .

Доказательство. Пусть A есть $(1, 1)$ -идеал и B — непустое подмножество полугруппы S . Докажем, что произведение AB является $(1, 1)$ -идеалом полугруппы S . Так как

$$ABA \subseteq ASA \subseteq A,$$

следует, что

$$(AB)(AB) = (ABA)B \subseteq AB,$$

т. е. произведение AB есть подполугруппа полугруппы S . Так как $BS \subseteq S$, получаем, что

$$(AB)S(AB) = A(BS)A \cdot B \subseteq ASA \cdot B \subseteq AB,$$

т. е. произведение AB удовлетворяет условию (2), итак AB является $(1, 1)$ -идеалом полугруппы S .

Аналогично доказывается, что произведение BA также является $(1, 1)$ -идеалом полугруппы S .

Следствие.¹⁾ Произведение двух $(1, 1)$ -идеалов полугруппы S является $(1, 1)$ -идеалом полугруппы S . Из этого следует

Теорема 2. Множество S_1 всех $(1, 1)$ -идеалов любой полугруппы S является полугруппой.

¹⁾ Из этого следствия и теоремы 3.2 статьи автора [3] вытекает, что произведение двух квазиидеалов регулярной полугруппы S является квазиидеалом полугруппы S .

Очевидно, что полугруппа всех $(1, 1)$ -идеалов коммутативной полугруппы является коммутативной, и полугруппа всех $(1, 1)$ -идеалов идемпотентной полугруппы является идемпотентной, т. е. имеет место

Теорема 3. Полугруппа всех $(1, 1)$ -идеалов полуструктуры сама является полуструктурой.

Теорема 4. Множество всех $(1, 1)$ -идеалов регулярной полугруппы является регулярной полугруппой.

Доказательство. Пусть S есть регулярная полугруппа, и обозначим через S_1 множество всех $(1, 1)$ -идеалов полугруппы S . В смысле теоремы 2 множество S_1 является полугруппой. Докажем, что уравнение

$$(3) \quad AXA = A \quad (A \in S_1)$$

разрешимое в полугруппе S_1 . Пусть $a \in A$, и $x \in S$ одно решение уравнения $axa = a$. Пусть X' обозначит множество этих решений x , когда элемент a пробегает A . Пусть X обозначит $(1, 1)$ -идеальную оболочку множества X' :

$$X = X' \cup X'X' \cup X'SX'.$$

Так как A есть $(1, 1)$ -идеал полугруппы S , поэтому имеет место $AXA \subseteq A$. С другой стороны, так как $a = axa \in AXA$, следует, что $A \subseteq AXA$. Следовательно, $A = AXA$, т. е. X является решением уравнения (3), итак полугруппа S_1 является регулярной, что и требовалось доказать.

Замечание. Аналогично доказывается, что множество всех $(1, 1)$ -идеалов (m, n) -регулярной полугруппы тоже является (m, n) -регулярной полугруппой, где m и n — целые положительные числа. Полугруппу S назовем (m, n) -регулярной, если для всех элементов $a \in S$ существует такой, элемент $x \in S$ что $a^m x a^n = a$, где m, n — целые неотрицательные числа (a^0 означает пустой символ, см. [1]).

Теорема 5. Множество всех $(1, 1)$ -идеалов гомогруппы является гомогруппой. Точнее: Если H -гомогруппа, тогда полугруппа всех $(1, 1)$ -идеалов гомогруппы H является полугруппой с нулем.

Доказательство. Пусть H есть гомогруппа, и G — ее двусторонний идеал, являющийся группой. Множество всех $(1, 1)$ -идеалов гомогруппы H обозначим через H_1 . Очевидно, что G является $(1, 1)$ -идеалом гомогруппы H , т. е. $G \in H_1$. Согласно теореме 2 множество H_1 есть полугруппа. Так как $GA \subseteq G$, где $A \in H_1$, и группа не имеет собственного $(1, 1)$ -идеала (см. [3]), далее, так как произведение GA является $(1, 1)$ -идеалом гомогруппы

H , поэтому $GA = G$. Аналогично следует, что $AG = G$, для всех $A \in H_1$, т. е. G является нулем полугруппы H_1 . Следовательно, H_1 является гомогруппой. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Е. С. Ляпин, Полугруппы, Москва, 1960.
- [2] Š. SCHWARZ, A theorem on normal semigroups, *Czechoslovak Math. J.* **10** (85), (1960), 197—200.
- [3] S. LAJOS, Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), 217—222.

(Поступило 26. I. 1962.)