Über selbstkomplementäre Graphen*)

Von HORST SACHS (Halle/Saale)

Einleitung

1. Definitionen. Wir betrachten im Folgenden endliche ungerichtete Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten, welche wir kurz Graphen nennen. Die Anzahl der Knoten eines Graphen G wird stets mit n bezeichnet.

Das Komplement $\overline{G}$ eines Graphen G ist derjenige Graph mit den gleichen Knoten wie G, welcher G zum vollständigen Graphen V ergänzt; in $\overline{G}$ sind zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie in G nicht verbunden sind. Der Anschaulichkeit halber denken wir uns gelegentlich die Kanten von G schwarz und diejenigen von $\overline{G}$ rot gezeichnet.

G heißt selbstkomplementär (abgekürzt: sk.), wenn G zu seinem Komplement $\overline{G}$ isomorph ist, d. h. wenn G durch eine geeignete Permutation Q der Knoten in $\overline{G}$ übergeführt werden kann.

Der Grad eines Knotens K ist die Anzahl der von K ausgehenden Kanten. G heißt regulär vom Grade r, wenn jeder Knoten von G den Grad r hat.

G heißt zyklisch, wenn G eine zyklische Transformation in sich gestattet, d. h. wenn es eine zyklische Permutation Z sämtlicher Knoten gibt, welche G in sich überführt. Ein zyklischer Graph ist offenbar notwendig regulär.

2. Problemstellung. Betrachten wir zunächst ein Fünfeck F, das ist ein Graph mit den Knoten 1, 2, 3, 4, 5 und den Kanten (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1). Das Komplement $\overline{F}$ besitzt die Kanten (1, 3), (3, 5), (5, 2), (2, 4), (4, 1) und ist offenbar ebenfalls ein Fünfeck; das bedeutet:

(I) *F ist selbstkomplementär*

(F wird z. B. durch die Permutation $Q=(2354)$ in $\overline{F}$ übergeführt).

Ferner gilt:

(II) *F ist regulär*,

denn jeder Knoten hat den Grad 2, und

(III) *F ist zyklisch*,

denn die Permutation (12345) führt F in sich über.

---

*) Ende Oktober 1962 teilte mir Herr Prof. Dr. G. RINGEL mit, daß er ebenfalls eine Arbeit über selbstkomplementäre Graphen in Druck gegeben habe, welche unter dem Titel „Selbstkomplementäre Graphen" im *Archiv der Mathematik* erscheinen soll. Beide Arbeiten, welche sich in einer Reihe von Punkten überschneiden, sind völlig unabhängig voneinander entstanden. (Zusatz bei der Korrektur.)

Gegenstand dieser Arbeit sind Graphen, welche die Eigenschaft (I) besitzen, insbesondere solche, welche außerdem die Eigenschaft (II) oder sogar (III) haben.

I. Selbstkomplementäre Graphen

1. Eigenschaften selbstkomplementärer Graphen. Es sei G ein sk. Graph mit n Knoten und m Kanten. Das Komplement $\bar{G}$ hat ebenfalls m Kanten, und die Anzahl der Kanten des vollständigen Graphen $V = G + \bar{G}$ ist einerseits gleich $2m$, andererseits gleich $\binom{n}{2}$, so daß

$$m = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4} \tag{1}$$

ist. Hieraus folgt:

(A) *Die Knotenanzahl n eines sk. Graphen ist entweder von der Form $n = 4k$ oder von der Form $n = 4k+1$.*

Die Permutation Q führe G in $\bar{G}$ über. Wir denken uns den vollständigen Graphen $V = G + \bar{G}$ aus den schwarzen Kanten von G und den roten Kanten von $\bar{G}$ bestehend; dann werden durch Q gerade die roten und die schwarzen Kanten miteinander vertauscht.

Q läßt gewiß nicht zwei verschiedene Knoten a, b fest, denn wäre das der Fall, so würde ja die (schwarze oder rote) Kante (a, b) ebenfalls fest bleiben. Aus dem gleichen Grunde kommt unter den Zykeln von Q keine Transposition (ab) vor, denn auch in diesem Falle ginge die Kante (a, b) in sich über. Offenbar führt jede gerade Potenz von Q G in sich und jede ungerade Potenz von Q G in $\bar{G}$ über; also kann auch keine ungerade Potenz zwei verschiedene Knoten festlassen oder unter ihren Zykeln eine Transposition enthalten. Daraus folgt sogleich, daß unter den Zykeln von Q höchstens einer der Länge 1 und sonst keiner von ungerader Länge vorkommt sowie auch kein Zyklus, dessen Länge das Doppelte einer ungeraden Zahl ist:

(B) *Der sk. Graph G werde durch die Permutation Q seiner Knoten in sein Komplement $\bar{G}$ übergeführt. Dann gilt*

a) *im Falle $n = 4k$: Q läßt keinen Knoten fest, die Länge eines jeden Zyklus von Q ist durch 4 teilbar;*

b) *im Falle $n = 4k+1$: Q läßt genau einen Knoten fest, Q besitzt also genau einen Zyklus der Länge 1, die Länge jedes anderen Zyklus von Q ist durch 4 teilbar.*

Die Permutation $P = Q^2$ führt G in sich über, das bedeutet:

(C) *Ein sk. Graph besitzt eine nichttriviale Gruppe von Transformationen in sich, welche im Falle $n = 4k$ keinen und im Falle $n = 4k+1$ höchstens einen Knoten festlassen.*

Wir bemerken noch: Ist $n = 4k+1$ und G ein sk. Graph, welcher durch Q in $\bar{G}$ übergeführt wird, so läßt Q genau einen Knoten a fest. Von diesem Knoten gehen

offenbar ebensoviele schwarze wie rote Kanten aus, er hat also in G den Grad $2k$. Wir schließen daraus:

(D) *Ein sk. Graph ungerader Knotenzahl n besitzt mindestens einen Knoten vom Grade* $\frac{1}{2}(n-1)$.

Wird der Knoten a zusammen mit allen von ihm ausgehenden Kanten gelöscht, so geht hierdurch G in einen Graphen G' mit $4k$ Knoten über. G' ist ebenfalls selbstkomplementär, denn die Permutation Q', welche aus Q durch Streichung des eingliedrigen Zyklus (a) hervorgeht, führt ersichtlich G' in sein Komplement über. Desgleichen geht ein sk. Graph in einen ebensolchen über, wenn in ihm sämtliche Knoten, welche einem Zyklus von Q angehören, zusammen mit allen von ihnen ausgehenden Kanten gelöscht werden.

2. Konstruktion aller selbstkomplementären Graphen, welche durch eine beliebige, fest vorgegebene Permutation Q in ihr Komplement übergehen. Betrachten wir die durch eine Permutation Q der Knoten hervorgerufene Permutation $\mathfrak{Q}$ der (ungeordneten) Knotenpaare von G oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Kanten des zugehörigen vollständigen Graphen V. $\mathfrak{Q}$ ist definiert durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q}(a, b) = (Qa, Qb) \quad (a \neq b),$$

wo a und b unabhängig voneinander die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen. Wir denken uns $\mathfrak{Q}$ als Produkt elementfremder Zyklen geschrieben, etwa

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2 \cdots \mathfrak{Z}_q.$$

Wenn nun Q den Graphen G in sein Komplement $\bar{G}$ überführt, so geht durch $\mathfrak{Q}$ jede schwarze Kante in eine rote und jede rote in eine schwarze über. Innerhalb eines jeden Zyklus $\mathfrak{Z}_i$ $(i=1, \ldots, q)$ folgen also die roten und schwarzen Kanten alternierend aufeinander, und jeder Zyklus $\mathfrak{Z}_i$ hat daher notwendig eine gerade Länge.

Ist nun Q beliebig gegeben und so beschaffen, daß jeder Zyklus $\mathfrak{Z}_i$ der zugehörigen Permutation $\mathfrak{Q}$ der Ziffernpaare eine gerade Länge hat, so können wir leicht sämtliche sk. Graphen angeben, welche durch Q in ihr Komplement übergehen: Wir brauchen nur die Kanten innerhalb jedes der Zykeln $\mathfrak{Z}_i$ alternierend schwarz und rot zu färben, der aus den schwarzen Kanten bestehende Graph — wie auch der aus den roten Kanten bestehende — geht dann jedesmal durch die Permutation Q seiner Knoten in sein Komplement $\bar{G}$ über, und wir haben auf diese Weise auch alle sk. Graphen erhalten, welche durch Q in ihr Komplement übergehen. Da wir die Färbung der Kanten für jeden Zyklus $\mathfrak{Z}_i$ unabhängig vornehmen dürfen und da wir die Kanten eines Zyklus auf genau zwei verschiedene Weisen alternierend färben können, erhalten wir also zu festem Q genau 2^q verschiedene sk. Graphen (unter denen natürlich isomorphe vorkommen können).

Wir wollen nun zeigen:

(*) Wenn Q die in (B) ausgesprochene Bedingung erfüllt, d. h. wenn Q höchstens einen Zyklus der Länge 1 besitzt und die Länge jedes anderen Zyklus von Q durch 4 teilbar ist, so hat jeder Zyklus $\mathfrak{Z}_i$ von $\mathfrak{Q}$ eine gerade Länge.

Zum Beweis betrachten wir eine beliebige Kante (a, b) $(a \neq b)$. Durch iterierte Anwendung der Permutation $\mathfrak{Q}$ auf (a, b) entsteht der Zyklus $\mathfrak{Z}_i$ von $\mathfrak{Q}$, welcher

(a, b) enthält:

$$\mathfrak{Z}_i = ((a, b)(Qa, Qb)(Q^2a, Q^2b)\ldots(Q^{s-1}a, Q^{s-1}b)),$$

wo die Länge s des Zyklus $\mathfrak{Z}_i$ gleich der kleinsten natürlichen Zahl σ ist, für die entweder

$$(\alpha) \text{ zugleich } Q^\sigma a = a \text{ und } Q^\sigma b = b$$

oder

$$(\beta) \text{ zugleich } Q^\sigma a = b \text{ und } Q^\sigma b = a$$

ist. Der Fall (β) kann ersichtlich nur eintreten, wenn a und b dem gleichen Zyklus von Q angehören.

Gehören a und b verschiedenen Zyklen von Q an, etwa mit den Längen l' und l'', so ist s offenbar gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von l' und l'', und da nach Annahme mindestens eine dieser beiden Zahlen durch 4 teilbar ist, ist auch s durch 4 teilbar.

Gehören a und b dem gleichen Zyklus Z von Q mit der Länge l an, so ist nach Annahme l gewiß durch 4 teilbar, und wir schließen folgendermaßen: Wir dürfen die Numerierung der Knoten so gewählt denken, daß $Z = (12 \ldots l)$ ist. Der Fall (β) tritt offenbar genau dann ein, wenn $|b-a| = \frac{l}{2}$ ist; dann ist auch s gleich $\frac{l}{2}$, also gerade. In jedem anderen Falle ist ersichtlich s gleich l und folglich sogar durch 4 teilbar.

Damit ist die Behauptung $(*)$ bewiesen, und zugleich ist gezeigt, daß die in (B) ausgesprochene notwendige Bedingung auch hinreichend ist im folgenden Sinne:

(E) *Es sei Q eine beliebige Permutation der Ziffern* 1, ..., n *mit folgender Eigenschaft: Q besitzt höchstens einen Zyklus der Länge* 1, *die Länge jedes anderen Zyklus von Q ist durch* 4 *teilbar. Dann gilt:*

Es existiert mindestens ein sk. Graph G mit den Knoten 1, 2, ..., n, *welcher durch Q in sein Komplement $\overline{G}$ übergeführt wird.*

Alle und nur solche Graphen finden wir auf folgende Weise:

Wir wählen ein Knotenpaar a, b $(a \neq b)$ willkürlich aus und zeichnen die Kante (a, b), welche wir willkürlich schwarz oder rot färben. Darauf zeichnen wir die Kante (Qa, Qb) und versehen sie mit der Farbe rot oder schwarz, so daß die Kanten (a, b) und (Qa, Qb) verschiedenen gefärbt sind; sodann zeichnen wir die Kante (Q^2a, Q^2b) und geben ihr die gleiche Farbe wie der Kante (a, b), und so fahren wir fort, bis der Zyklus sich schließt, wobei die Farben rot und schwarz alternieren. Darauf wählen wir willkürlich ein neues Knotenpaar a', b' aus, welches noch nicht durch eine Kante verbunden ist, und wiederholen den oben angegebenen Prozeß mit der Kante (a', b') als Anfangskante. In dieser Weise fahren wir fort, bis schließlich je zwei Knoten durch eine rote oder schwarze Kante miteinander verbunden sind.

Die Menge $\mathfrak{M}$ der auf diese Weise erzeugten, jeweils aus den schwarzen Kanten bestehenden Graphen hat folgende Eigenschaften:

1. *Jeder Graph, welcher durch Q in sein Komplement übergeführt wird, ist in $\mathfrak{M}$ enthalten.*

2. *Jeder Graph von $\mathfrak{M}$ wird durch Q in sein Komplement übergeführt.*

II. Reguläre und möglichst-reguläre selbstkomplementäre Graphen

1. Zusammenhang zwischen regulären und möglichst-regulären selbstkomplementären Graphen. Es sei G ein regulärer sk. Graph vom Grade r. Wir betrachten den aus roten und schwarzen Kanten bestehenden vollständigen Graphen $V = G + \bar{G}$; V hat offenbar den Grad $2r$ und besitzt folglich $n = 2r + 1$ Knoten. Hieraus schließen wir in Verbindung mit (A):

(F) *Die Knotenanzahl n eines regulären sk. Graphen ist von der Form $n = 4k + 1$; der Grad ist $r = \frac{1}{2}(n-1) = 2k$.*

Obzwar also unter den sk. Graphen gerader Knotenanzahl $n = 4k$ kein regulärer Graph vorkommt, so kann man doch nach denjenigen unter ihnen fragen, welche von den regulären möglichst wenig abweichen. Dieser Fall liegt offenbar vor, wenn $2k$ der Knoten den Grad $\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n = 2k$ und die übrigen $2k$ Knoten den Grad $\frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n - 1 = 2k - 1$ haben. Einen sk. Graphen dieser Eigenschaft nennen wir möglichst-regulär. Einfachstes Beispiel ist der Graph mit den Knoten 1, 2, 3, 4 und den Kanten (1, 2), (2, 3), (3, 4).

Es sei G ein regulärer sk. Graph mit den Knoten 1, 2, ..., $4k + 1$, welcher durch die Permutation Q in $\bar{G}$ übergeführt wird; die Knoten seien so numeriert, daß Q den Knoten $4k + 1$ fest läßt. Wird dann der Knoten $4k + 1$ zusammen mit den $2k$ von ihm ausgehenden Kanten gelöscht, so geht G über in einen ebenfalls selbstkomplementären und zwar offenbar möglichst-regulären Graphen G' (vgl. die Bemerkung am Schluß von I. 1.).

Umgekehrt: Es sei G' ein möglichst-regulärer sk. Graph mit den Knoten 1, 2, ..., $4k$, welcher durch die Permutation Q' in $\bar{G}'$ übergeführt wird. Wird dann ein zusätzlicher Knoten $4k + 1$ mit den $2k$ Knoten von G', welche den Grad $2k - 1$ haben, durch je eine Kante verbunden, so entsteht ein regulärer Graph G vom Grade $2k$, welcher sebstkomplementär ist, denn die Permutation Q, welche aus Q' durch Hinzufügen des eingliedrigen Zyklus $(4k + 1)$ hervorgeht, führt, wie man leicht einsieht, G in sein Komplement $\bar{G}$ über:

(G) *Jeder reguläre sk. Graph geht durch Löschung eines geeigneten Knotens sowie der von diesem Knoten ausgehenden Kanten in einen möglichst-regulären sk. Graphen über.*

Jeder möglichst-reguläre sk. Graph mit $4k$ Knoten geht durch Hinzunahme eines Knotens und aller Kanten, welche diesen Knoten mit den Knoten vom Grade $2k - 1$ verbinden, in einen regulären sk. Graphen über.

Wir haben damit eine Zuordnung zwischen den regulären sk. Graphen auf der einen und den möglichst-regulären sk. Graphen auf der anderen Seite gefunden: Jede Aussage über reguläre sk. Graphen zieht eine solche über möglichst-reguläre nach sich, und umgekehrt.

2. Eine spezielle Klasse regulärer bzw. möglichst-regulärer selbstkomplementärer Graphen. Wir beantworten zunächst die Existenzfrage durch explizite Angabe spezieller sk. Graphen.

(H) *Zu jeder natürlichen Zahl k existiert mindestens ein möglichst-regulärer sk. Graph mit $4k$ Knoten und mindestens ein regulärer sk. Graph mit $4k + 1$ Knoten.*

Zum Beweis betrachten wir die Knoten $1, 2, \ldots, 4k$ und verbinden zwei (verschiedene) Knoten a und b durch eine schwarze Kante, wenn die Summe $a+b$ entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \bmod 4$ ist, und durch eine rote Kante in den beiden anderen Fällen $a+b \equiv 2$ oder $\equiv 3 \bmod 4$. Der aus den schwarzen Kanten bestehende Graph G_0' ist 1) selbstkomplementär und 2) möglichst-regulär:

1) Durch die zyklische Permutation $Z=(12\ldots4k)$ der Knoten wird jede schwarze in eine rote und jede rote in eine schwarze Kante übergeführt.

2) Jeder Knoten $i \equiv 1 \bmod 4$ ist mit allen Knoten $j \equiv 0 \bmod 4$ sowie mit allen Knoten $j' \equiv 3 \bmod 4$, also insgesamt mit $2k$ Knoten durch je eine schwarze Kante verbunden. Entsprechend schließen wir für die Knoten $i \equiv 3 \bmod 4$: Jeder Knoten mit ungerader Nummer hat also in G_0' den Grad $2k$.

Jeder Knoten $i \equiv 0 \bmod 4$ ist mit allen Knoten $j \equiv 1 \bmod 4$ sowie mit allen von i verschiedenen Knoten $j' \equiv 0 \bmod 4$, also insgesamt mit $2k-1$ Knoten durch je eine schwarze Kante verbunden. Entsprechend schließen wir für die Knoten $i \equiv 2 \bmod 4$: Jeder Knoten mit gerader Nummer hat also in G_0' den Grad $2k-1$.

Aus G_0' erhalten wir einen regulären sk. Graphen G_0, indem wir einen weiteren Knoten mit der Nummer $4k+1$ mit sämtlichen Knoten mit gerader Nummer durch je eine Kante verbinden.

Damit ist (H) bewiesen.

Bemerkung 1. Jede der vier folgenden Konstruktionsvorschriften:
(1) a und b werden genau dann durch eine Kante verbunden,

wenn $a+b \equiv 0$ oder $\equiv 1 \bmod 4$ ist;

(2) ..., wenn $a+b \equiv 3$ oder $\equiv 0 \bmod 4$ ist;

(3) ..., wenn $a+b \equiv 2$ oder $\equiv 3 \bmod 4$ ist;

(4) ..., wenn $a+b \equiv 1$ oder $\equiv 2 \bmod 4$ ist

führt zu einem möglichst-regulären sk. Graphen, jedoch sind, wie man leicht einsieht, die nach den verschiedenen Verfahren gewonnenen Graphen untereinander isomorph.

Bemerkung 2. Jeder der beiden Graphen G_0' und G_0 wird ersichtlich durch die Permutation $P=Z^2=(1\ 3\ \ldots\ 4k-1)\ (2\ 4\ \ldots\ 4k)$ sowie durch jede Transposition (ij) mit $i \leqq 4k$, $j \leqq 4k$, $i \equiv j \bmod 4$ in sich transformiert. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Transformationen von G_0' oder G_0 in sich enthält also die Permutation P sowie das direkte Produkt $\mathfrak{D}$ der Gruppen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, wo $\mathfrak{S}_i$ die symmetrische Gruppe mit den Ziffern $\{i, 4+i, \ldots, 4(k-1)+i\}$ bezeichnet.

Es sei $\mathfrak{H}$ die von P und $\mathfrak{D}$ erzeugte Permutationsgruppe. Durch eine Permutation der Gruppe $P^{-1}\mathfrak{D}P$ wird jede Ziffer durch eine solche aus der gleichen Restklasse mod 4 ersetzt; daraus folgt $P^{-1}\mathfrak{D}P=\mathfrak{D}$, P ist also mit $\mathfrak{D}$ vertauschbar, und da weiter

$$P^2 = (1\ 5\ \ldots\ 4k-3)\ (3\ 7\ \ldots\ 4k-1)\ (2\ 6\ \ldots\ 4k-2)\ (4\ 8\ \ldots\ 4k)$$

in $\mathfrak{D}$ enthalten ist, schließen wir

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{D} \cup P\mathfrak{D}.$$

Es ist $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$; daß sowohl der Fall $\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$ als auch der Fall $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$ eintreten kann,

zeigt schon das Beispiel $k=1$, in welchem $\mathfrak{H}$ nur aus den beiden Permutationen $P=(13)\,(24)$ und $P^2=(1)$ besteht: Im Falle des zugehörigen Graphen G_0' mit 4 Knoten ist $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}$, im Falle des zugehörigen Graphen G_0 mit 5 Knoten — es ist dies ein Fünfeck mit den Kanten (1, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 4), (4, 1) — enthält $\mathfrak{S}$ die nicht in $\mathfrak{H}$ vorkommende zyklische Permutation (13254). — Wir wollen auf weitere hiermit zusammenhängende Fragen nicht näher eingehen.

Bemerkung 3. Die hochgradige Symmetrie der Graphen G_0' und G_0 hat zur Folge, daß diese nicht nur bei der Permutation $Z=(1\,2\,\ldots\,4k)$ und ihren ungeraden Potenzen, sondern, wie man unmittelbar einsieht, überhaupt bei jeder Permutation Q mit den folgenden beiden Eigenschaften

1) Q läßt keine der Ziffern $1, 2, \ldots, 4k$ fest.

2) Innerhalb sämtlicher Zykeln von Q, welche mehr als eine Ziffer enthalten, ist die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Ziffern stets $\equiv 1 \bmod 4$ oder stets $\equiv 3 \bmod 4$

in ihr Komplement übergehen. Hieraus ergibt sich sogleich in trivialer Weise der folgende allgemeine Existenzsatz:

(I) *Es sei Q eine beliebige Permutation der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ mit folgender Eigenschaft: Q besitzt höchstens einen Zyklus der Länge 1, die Länge jedes anderen Zyklus von Q ist durch 4 teilbar. Dann gilt:*

Es existiert im Falle $n\equiv 0 \bmod 4$ mindestens ein möglichst-regulärer und im Falle $n\equiv 1 \bmod 4$ mindestens ein regulärer sk. Graph mit den Knoten $1, 2, \ldots, n$, welcher durch Q in sein Komplement übergeführt wird.

Um das einzusehen, braucht man nur die Ziffern von Q so umzunumerieren, daß höchstens die Ziffer n fest bleibt und in jedem Zyklus die Ziffern in ihrer natürlichen Reihenfolge aufeinander folgen: Eine solche Permutation führt G_0' bzw. G_0 in sein Komplement über.

Im allgemeinen existieren aber viele weitere, nicht zu G_0' bzw. G_0 isomorphe möglichst-reguläre bzw. reguläre sk. Graphen, welche durch Q ihr Komplement übergehen; vgl. den folgenden Paragraphen, insbesondere die Bemerkung am Schluß.

3. Konstruktion sämtlicher möglichst-regulären selbst-komplementären Graphen, welche durch eine zyklische Permutation in ihr Komplement übergehen. Die im vorangehenden Paragraphen konstruierten möglichstregulären sk. Graphen G_0' werden durch die zyklische Permutation $Z=(1\,2\,\ldots\,4k)$ in ihr Komplement übergeführt. Wir stellen uns die Aufgabe, alle möglichst-regulären sk. Graphen zu ermitteln welche durch Z in ihr Komplement übergehen.

Zu diesem Zweck gehen wir zunächst näher auf das in **I. 2.** auseinandergesetzte allgemeine Konstruktionsverfahren für den Fall $Q=Z$ ein. Wir verfahren nach (E) und beginnen mit einer Kante (i, j) des vollständigen Graphen V mit ungerader Differenz $j-i$. Der Zyklus $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Q}$, welchem die Kante (i, j) angehört, enthält alle Kanten (i', j') und nur solche, für welche $j'-i'\equiv j-i$ oder $\equiv i-j \bmod 4k$ ist. Wir finden zu jedem Knoten i' in $\mathfrak{Z}$ genau zwei von i' ausgehende Kanten, nämlich die Kanten

$$\mathfrak{Q}^{i'-i}(i, j)=(Z^{i'-i}i,\ Z^{i'-i}j)=(i',\ i'-i+j)$$

und

$$\mathfrak{Q}^{i'-j}(i, j)=(Z^{i'-j}i,\ Z^{i'-j}j)=(i'-j+i,\ i')$$

(alle Zahlen sind mod $4k$ zu reduzieren), und diese beiden Kanten erhalten verschiedene Farben, denn die zweite wird durch $\mathfrak{D}^{j-i}$ bei ungeradem $j-i$ in die erste übergeführt.

Wir schließen daraus: Die beim ersten Konstruktionsschritt eingezeichneten (d. h. die dem Zyklus $\mathfrak{Z}$ angehörenden) Kanten verteilen sich so, daß von jedem der Knoten genau eine schwarze und genau eine rote Kante ausgeht, es entstehen also ein roter und ein schwarzer Linearfaktor von V, welche zusammen einen quadratischen Faktor bilden, auf dessen Kreisen (welche übrigens sämtlich die gleiche Länge haben) rote und schwarze Kanten sowie Knoten gerader und ungerader Nummer alternierend aufeinanderfolgen.

Wir setzen die Konstruktion fort, indem wir von einem noch nicht durch eine rote oder schwarze Kante verbundenen Knotenpaar i^*, j^* mit ungerader Differenz j^*-i^* ausgehen (wobei $j^*-i^* \not\equiv \pm(j-i) \bmod 4k$) und erhalten genau wie oben wieder einen schwarzen und einen roten Linearfaktor, welche mit den im ersten Konstruktionsschritt gezeichneten keine Kante gemeinsam haben. In dieser Weise fahren wir fort, bis je zwei Knoten, deren Nummern eine ungerade Differenz haben, durch eine gefärbte Kante verbunden sind. Nun gibt es offenbar genau k ungerade Restklassen mod $4k$ derart, daß weder die Differenz noch die Summe irgend zweier von ihnen kongruent 0 mod $4k$ ist, und demgemäß verteilen sich die bisher gezeichneten gefärbten Kanten auf genau k verschiedene Zykel von $\mathfrak{D}$, d. h. wir haben bisher genau k schwarze und genau k rote Linearfaktoren von V gezeichnet. Wir schließen daraus:

(J) *Ist G ein sk. Graph mit $4k$ Knoten, welcher durch eine zyklische Permutation in sein Komplement transformiert wird, so hat jeder seiner Knoten mindestens den Grad k und höchstens den Grad $3k-1$.*

Nun setzen wir die Konstruktion fort, indem wir von zwei Knoten i, j ausgehen, deren Differenz gerade, aber nicht durch $2k$ teilbar ist. Auch in diesem Falle enthält derjenige Zyklus von $\mathfrak{D}$, welchem die Kante (i, j) angehört, zu einem beliebigen Knoten i' genau zwei von i' ausgehende Kanten, nämlich — genau wie oben — die beiden Kanten

$$\mathfrak{D}^{i'-i}(i,j)=(i', i'-i+j) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}^{i'-j}(i,j)=(i'-j+i, i')$$

(wobei die Zahlen wieder mod $4k$ zu reduzieren sind), aber jetzt erhalten diese beiden Kanten die gleiche Farbe, denn die zweite wird durch $\mathfrak{D}^{j-i}$ bei geradem $j-i$ in die erste übergeführt.

Sind die beiden in diesem Konstruktionsschritt gezeichneten von i' ausgehenden Kanten schwarz, so sind die beiden von $i'+1$ ausgehenden Kanten rot, und umgekehrt. Wir schließen daraus, daß sich die $4k$ neu gezeichneten schwarzen und roten Kanten wie folgt verteilen: Von jedem Knoten ungerader Nummer gehen zwei Kanten der einen Farbe, von jedem Knoten gerader Nummer gehen zwei Kanten der anderen Farbe aus, diese Kanten bilden also zusammen einen aus roten und schwarzen Kreisen bestehenden quadratischen Faktor von V, wobei die Nummern sämtlicher auf Kreisen gleicher Farbe liegenden Knoten der gleichen Restklasse mod 2 angehören. Weiter ist leicht zu sehen, daß sämtliche Kreise die gleiche Länge haben und folglich ebensoviele rote wie schwarze Kreise entstehen.

Da wir die Anfangskante willkürlich schwarz oder rot färben dürfen, können wir es nach Belieben so einrichten, daß der Grad bezüglich des aus den schwarzen

Kanten bestehenden Graphen bei diesem Konstruktionsschritt entweder für sämtliche Knoten ungerader Nummer um 2 erhöht wird, während er für sämtliche Knoten gerader Nummer fest bleibt, oder umgekehrt.

Nun setzen wir die Konstruktion in der beschriebenen Weise fort, indem wir ein noch nicht durch eine gefärbte Kante verbundenes Knotenpaar gerader, aber nicht durch $2k$ teilbarer Nummerndifferenz zum Ausgangspunkt eines neuen Konstruktionsschrittes machen, und so weiter, bis schließlich je zwei Knoten gerader, aber nicht durch $2k$ teilbarer Nummerndifferenz durch eine gefärbte Kante verbunden sind. Dabei können wir bei jedem Schritt den oben erwähnten „schwarzen" Grad der Knoten ungerader Nummer nach Belieben fest lassen oder um 2 erhöhen. Die Anzahl der Schritte ist offenbar gleich $k-1$.

Endlich wählen wir willkürlich zwei Knoten i und j aus, für welche $|j-i| = 2k$ ist, und färben die Kante (i, j) rot oder schwarz, darauf die Kante $\mathfrak{Q}(i, j) = (i+1, j+1)$ schwarz oder rot bzw., und so weither, bis wir nach Einzeichnung von $2k$ gefärbten Kanten wegen $\mathfrak{Q}^{2k}(i, j) = (j, i)$ zur Anfangskante zurückkehren. Damit sind dann alle Kanten von V gefärbt, die Konstruktion ist beendet. Beim letzten Schritt haben wir einen aus k schwarzen und k roten Kanten bestehenden Linearfaktor gezeichnet, wobei Kanten gleicher Farbe Knoten verbinden, deren Nummern sämtlich der gleichen Restklasse mod 2 angehören. Hierbei können wir den erwähnten „schwarzen" Grad der Knoten ungerader Nummer nach Belieben fest lassen oder um 1 erhöhen.

Wir bemerken noch, daß jeder Zyklus von $\mathfrak{Q}$ genau eine Kante $(1, j)$ mit $1 < j \leqq 2k+1$ enthält, wir können also die Konstruktion speziell so durchführen, daß wir jeden Schritt mit einer Kante $(1, j)$ beginnen, wobei wir j der Reihe nach die $2k$ Zahlen $2, 3, \ldots, 2k+1$ durchlaufen lassen.

Der so konstruierte, aus den schwarzen Kanten bestehende Graph wird durch Z in sein Komplement transformiert. Sämtliche Knoten ungerader Nummer haben den Grad $k+t$, sämtliche Knoten gerader Nummer haben den Grad $3k-1-t$, wobei wir für t nach Art der Konstruktion offenbar noch jede der Zahlen $0, 1, \ldots, 2k-1$ willkürlich vorschreiben dürfen. Wählen wir insbesondere $t = k-1$ oder $t = k$, so erhalten wir jedesmal einen möglichst-regulären Graphen, und aus der Beschreibung des Konstruktionsverfahrens ist leicht zu ersehen, wie man alle möglichst-regulären Graphen, welche durch Z in ihr Komplement transformiert werden, erhält.

Fassen wir zusammen:

(K) *Der sk. Graph G mit den Knoten $1, 2, \ldots, 4k$ gehe durch die zyklische Permutation $Z = (1\,2 \ldots 4k)$ in sein Komplement über. Dann haben alle Knoten gerader Nummer den gleichen Grad, etwa r_0, und alle Knoten ungerader Nummer haben den Grad $4k-1-r_0$, wobei r_0 eine der Zahlen $k, k+1, \ldots, 3k-1$ ist.*

Umgekehrt existiert zu jeder dieser Zahlen r_0 ein durch Z in sein Komplement übergehender sk. Graph, dessen Knoten gerader Nummer sämtlich den Grad r_0 und dessen Knoten ungerader Nummer sämtlich den Grad $4k-1-r_0$ haben.

Alle möglichst-regulären sk. Graphen, welche durch Z in ihr Komplement übergehen, und nur solche erhalten wir auf folgende Weise:

Wir verteilen die Zahlen $i = 1, 2, \ldots, 2k$ auf zwei Klassen R und S gemäß nachstehender Regel: Ist k gerade, so weisen wir genau $\frac{1}{2}k$ der k Zahlen $2, 4, 6, \ldots, 2k$ der Klasse R und die restlichen $\frac{1}{2}k$ unter diesen Zahlen der Klasse S zu; ist k un-

gerade, so weisen wir genau $\frac{1}{2}(k-1)$ *der* $k-1$ *Zahlen* $2, 4, 6, \ldots, 2(k-1)$ *der Klasse* R *und die restlichen* $\frac{1}{2}(k-1)$ *unter diesen Zahlen der Klasse* S *zu; im übrigen verfahren wir völlig willkürlich (insbesondere werden die ungeraden Zahlen* $1, 3, \ldots, 2k-1$ *ganz willkürlich auf die beiden Klassen verteilt).*

Darauf konstruieren wir einen Graphen nach dem in (E) *auseinandergesetzten Verfahren, wobei wir die einzelnen Konstruktionsschritte der Reihe nach mit den Kanten* $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 2k+1)$ *beginnen lassen und die Anfangskante* $(1, i+1)$ $(i=1, 2, \ldots, 2k)$ *jeweils rot oder schwarz färben, je nachdem* i *der Klasse* R *oder* S *angehört. Nach* $2k$ *Schritten sind alle Kanten gefärbt, und der aus den schwarzen Kanten bestehende Graph ist selbstkomplementär, möglichst-regulär und geht durch* Z *in sein Komplement über.*

Bemerkung. Wir können das letztgenannte Konstruktionsverfahren benutzen, um zu einer beliebigen, der in (I) gemachten Voraussetzung genügenden Permutation Q möglichst-reguläre bzw. reguläre sk. Graphen zu konstruieren, welche durch Q in ihr Komplement übergehen: Sei zunächst $n \equiv 0 \bmod 4$. Dann konstruieren wir für jeden Zyklus von Q für sich gemäß (K) einen möglichstregulären sk. Graphen, welcher durch diesen Zyklus in sein Komplement transformiert wird, wobei wir wieder schwarze und rote Kanten zeichnen. Die so gefundenen Graphen verbinden wir untereinander nach der Konstruktionsvorschrift (E) durch weitere Kanten, wobei wir es so einrichten, daß für je zwei dieser Graphen von jedem ihrer Knoten ebensoviele schwarze wie rote, die beiden Graphen miteinander verbindende Kanten ausgehen. Daß das möglich ist, und zwar im allgemeinen auf viele Weisen, bedarf einiger weiterer relativ einfacher Überlegungen ganz in der Art der vorangegangenen Betrachtungen. Die entstehenden Graphen gehen dann offenbar durch Q in ihr Komplement über und sind möglichst-regulär.

Den Fall $n \equiv 1 \bmod 4$ erledigen wir wie früher, indem wir zu den möglichst-regulären sk. Graphen mit $n-1$ Knoten je einen weiteren Knoten hinzunehmen und diesen mit allen Knoten vom Grade $\frac{1}{2}(n-1)-1$ verbinden.

4. Über das charakteristische Polynom regulärer selbstkomplementärer Graphen. Es sei G ein beliebiger endlicher Graph, dessen Knoten wir uns von 1 bis n durchnumeriert denken, und es sei a_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ die Anzahl der vom Knoten i zum Knoten j laufenden Kanten. Die Matrix $\mathbf{A}=(a_{ij})$, welche wir als Knotenmatrix von G bezeichnen, bestimmt offenbar den Graphen G vollständig, während umgekehrt $\mathbf{A}$ durch G nur bis auf eine beliebige gleichzeitige Permutation von Zeilen und Spalten bestimmt ist, da wir die Numerierung der Knoten von G ganz willkürlich vornehmen können: Die Knotenmatrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^*$ gehören genau dann zum gleichen Graphen G, wenn es eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ gibt, so daß $\mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ ist.

Sämtliche Eigenschaften des Graphen G sind unabhängig von der Numerierung seiner Knoten, ihnen entsprechen also eineindeutig diejenigen Eigenschaften der Matrix $\mathbf{A}$, welche invariant sind gegenüber der (symmetrischen) Gruppe der Transformationen $\mathbf{P}$.

Eine wichtige Invariante von $\mathbf{A}$ ist das charakteristische Polynom

$$f_G(\lambda) = (-1)^n |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|,$$

und es drängt sich die Frage auf, ob und in welcher Weise sich die in dieser Arbeit

untersuchten Grapheneigenschaften in den Eigenschaften des zugehörigen charakteristischen Polynoms wiederspiegeln. Wir wollen diese Frage hier nur soweit verfolgen, wie das für eine Anwendung im nächsten Kapitel erforderlich ist.

Unter den generellen Voraussetzungen dieser Arbeit ist stets

$a_{ij}=a_{ji}$ (G ist ungerichtet)

$a_{ii}=0$ (G enthält keine Schlingen)

$a_{ij}=1$ oder 0 (G enthält keine Mehrfachkanten).

Weiter beschränken wir uns auf die Betrachtung regulärer Graphen, etwa vom Grade r, so daß für alle j

$$\sum_i a_{ij}=\sum_i a_{ji}=r.$$

Jede Wurzel der Gleichung $f_G(\lambda)=0$ heißt ein Eigenwert von G, jeder Lösungsvektor $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ heißt ein (zum Eigenwert λ gehöriger) Eigenvektor von G.

Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der symmetrischen Matrizen gilt: Sämtliche Eigenwerte sind reell und liegen im Intervall $-r\leqq\lambda\leqq r$.

r ist stets Eigenwert, und zwar, falls G zusammenhängt, einfacher Eigenwert. In diesem Falle ist der zu r gehörige Eigenvektor $\mathbf{x}_0$ bis auf einen Faktor $t\neq 0$ bestimmt, und zwar sind alle Komponenten von $\mathbf{x}_0$ einander gleich.

Jeder nicht zu r gehörige Eigenvektor $\mathbf{x}$ ist zu $\mathbf{x}_0$ orthogonal, das bedeutet, daß die Summe der Komponenten x_i von $\mathbf{x}$ verschwindet:

$$\sum_i x_i=0. \tag{1}$$

Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Spur der Matrix $\mathbf{A}$, in unserem Falle also gleich null.

Wir betrachten den regulären Graphen G vom Grade r und sein Komplement $\bar{G}$. Das charakteristische Polynom von $\bar{G}$ ist durch dasjenige von G völlig bestimmt, es gilt nämlich folgender Satz:

(L) *Es sei G ein regulärer Graph vom Grade r mit n Knoten und $\bar{G}$ sein Komplement. Dann gilt*

$$f_{\bar{G}}(\lambda)=(-1)^n(\lambda+1+r)^{-1}(\lambda+1+r-n)f_G(-\lambda-1). \tag{2}$$

Beweis. Es seien $\mathbf{A}$ und $\bar{\mathbf{A}}$ die Knotenmatrizen von G und $\bar{G}$ bzw. Dann gilt offenbar $\mathbf{A}+\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{I}-\mathbf{E}$, wo $\mathbf{I}$ diejenige Matrix vom Format $n\times n$ bezeichnet, deren sämtliche Elemente gleich 1 sind, so daß also

$$\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{I}-\mathbf{E}-\mathbf{A}.$$

Wir setzen zunächst voraus, daß G zusammenhänge. Es sei $\mathbf{x}$ ein beliebiger Eigenvektor von G, welcher zum Eigenwert $\lambda\neq r$ gehört. Wegen (1) ist $\mathbf{Ix}=0$, so daß

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}=-\mathbf{Ex}-\mathbf{Ax}=-\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=-(\lambda+1)\mathbf{x}. \tag{3a}$$

Weiter gilt ersichtlich $\mathbf{Ix}_0=n\mathbf{x}_0$, so daß

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_0=n\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0-r\mathbf{x}_0=(n-1-r)\mathbf{x}_0. \tag{3b}$$

Aus (3a, b) entnehmen wir: Jeder zum Eigenwert $\lambda \neq r$ gehörige Eigenvektor von G ist zugleich ein zum Eigenwert $-(\lambda+1)$ gehöriger Eigenvektor von $\overline{G}$, der zum Eigenwert r gehörige Eigenvektor von G ist zugleich der zum Eigenwert $\bar{r} = n-1-r$ gehörige Eigenvektor von $\overline{G}$. Hieraus folgt sogleich (2).

Ist G nicht zusammenhängend, so ist, wie man sich leicht überlegt, gewiß $\overline{G}$ zusammenhängend, und da wir die Rollen von G und $\overline{G}$ vertauschen dürfen, ergibt sich die Richtigkeit von (2) auch in diesem Falle.

Damit ist (L) bewiesen.

Ist nun G außerdem selbstkomplementär, so haben wir $n = 4k+1$, $r = 2k$, und aus (2) ergibt sich

$$f_G(\lambda) = f_{\overline{G}}(\lambda) = -(\lambda+1+2k)^{-1}(\lambda-2k) f_G(-\lambda-1)$$

oder

$$(\lambda-2k)^{-1} f_G(\lambda) = (-\lambda-1-2k)^{-1} f_G(-\lambda-1),$$

oder, wenn λ_i mit $i = 1, 2, \ldots, 4k$ die von $r = 2k$ verschiedenen Eigenwerte von G durchläuft:

$$\prod_{i=1}^{4k} (\lambda-\lambda_i) = \prod_{i=1}^{4k} (-\lambda-1-\lambda_i) = \prod_{j=1}^{4k} (\lambda+1+\lambda_j).$$

Zu jedem Eigenwert $\lambda_i \neq 2k$ findet sich also ein zweiter Eigenwert $\lambda_j = -\lambda_i - 1$; dabei ist gewiß $\lambda_j \neq \lambda_i$, denn im anderen Falle hätten wir $\lambda_i = -\frac{1}{2}$, λ_i ist aber ganz-algebraisch. Wir können daher die $4k$ von r verschiedenen Eigenwerte so numerieren, daß stets

$$\lambda_i + \lambda_{2k+i} = -1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2k) \tag{4}$$

ist, und erhalten das Resultat

(M) *Das charakteristische Polynom eines regulären sk. Graphen G hat die Form*

$$f_G(\lambda) = (\lambda-2k) \prod_{i=1}^{2k} (\lambda-\lambda_i)(\lambda+\lambda_i+1) = (\lambda-2k) \prod_{i=1}^{2k} (\lambda^2+\lambda-a_i).$$

Aus (4) entnehmen wir noch, daß kein von $r = 2k$ verschiedener Eigenwert größer als $2k-1$ ist, denn wäre $\lambda_i > 2k-1 = r-1$, so folgte $\lambda_{2k+i} < -(r-1)-1 = -r$, was nicht sein kann. Man kann auch leicht zeigen, daß keine der Zahlen $-2k$, $2k-1$ ein Eigenwert ist.

III. Zyklische selbstkomplementäre Graphen

1. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz zyklischer selbstkomplementärer Graphen und Konstruktion solcher Graphen. Ein zyklischer Graph ist regulär, die Anzahl der Knoten eines zyklischen sk. Graphen ist daher notwendig von der Form $n = 4k+1$. Diese Bedingung ist, wie wir sehen werden, für die Existenz eines zyklischen sk. Graphen mit n Knoten allein nicht hinreichend, es gilt aber folgender Satz:

(N) *Zu jeder natürlichen Zahl n, deren sämtliche Primteiler der Restklasse* 1 modulo 4 *angehören, existiert ein zyklischer sk. Graph mit n Knoten.*

Zum Beweis konstruieren wir zunächst einen zyklischen sk. Graphen G für den Fall, daß n selbst eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ ist.

Die Knoten seien von 1 bis p numeriert. Wir verbinden zwei verschiedene Knoten i und j genau dann durch eine Kante, wenn $j-i$ ein quadratischer Rest modulo p ist.

Wir haben drei Dinge zu zeigen:

1. Die Konstruktionvorschrift ist widerspruchsfrei, d. h. $j-i$ und $i-j$ sind beide zugleich quadratische oder beide zugleich nicht-quadratische Reste modulo p;
2. G ist zyklisch;
3. G ist selbstkomplementär.

Zu 1. Es ist $0<|j-i|<p$, also $j-i$ prim zu p. Wegen $p \equiv 1 \bmod 4$ ist -1 quadratischer Rest modulo p und folglich $\left(\frac{j-i}{p}\right) = \left(\frac{i-j}{p}\right)$.

Zu 2. Bei der Permutation $Z=(1\,2\ldots n)$ der Knoten bleibt die Differenz $j-i$ für alle Knotenpaare i, j modulo p ungeändert, G gestattet also die zyklische Permutation Z.

Zu 3. Es sei w prim zu p und nicht-quadratischer Rest modulo p. Durch Multiplikation mit w werden die sämtlichen Restklassen modulo p in bestimmter Weise permutiert, und dieser Permutation der Restklassen entspricht eindeutig eine Permutation Q der die Restklassen repräsentierenden Ziffern 1, 2, ..., p. Es sei $Qi=i'$, $Qi=j'$. Dann ist $j'-i' \equiv w(j-i) \bmod p$, ist also $j-i$ quadratischer Rest modulo p, so ist $j'-i'$ nicht-quadratischer Rest modulo p, und umgekehrt; das bedeutet: Wird Q auf die Knoten von G angewandt, so geht hierdurch G in sein Komplement über.

Damit ist im Falle $n=p$ alles gezeigt.

Die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall ergibt sich nun in folgender Weise:

(O) *(Konstruktion zyklischer sk. Graphen.) Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, deren sämtliche Primteiler der Restklasse* 1 modulo 4 *angehören. Jedem natürlichen Teiler d von n, welcher kleiner ist als n, seien in willkürlicher Weise einer der in nd^{-1} aufgehenden Primfaktoren $\pi=\pi(d)$ und eine Einheit $e(d)=1$ oder $=-1$ zugeordnet. Die Knoten des zu konstruierenden Graphen G seien von 1 bis n numeriert. Die natürliche Zahl d_{ij} bezeichne den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $j-i$ und n $(i, j=1, 2, \ldots, n; j \neq i)$. Wegen $0<|j-i|<n$ ist $nd_{ij}^{-1}>1$. Wir setzen zur Abkürzung $\pi(d_{ij}) = p_{ij}$, $e(d_{ij}) = e_{ij}$ und $(j-i)d_{ij}^{-1} = r_{ij}$. Es ist r_{ij} prim zu nd_{ij}^{-1}, also auch zu p_{ij}.*

Wir verbinden die Knoten i und j genau dann durch eine Kante, wenn $\left(\frac{r_{ij}}{p_{ij}}\right) = e_{ij}$ ist.

Jeder so erhaltene Graph G ist zyklisch und selbstkomplementär.

Der Beweis gliedert sich wie oben in 3 Teile:

1. Die Konstruktionsvorschrift ist widerspruchsfrei: Offenbar ist $d_{ji}=d_{ij}$ und damit $p_{ji}=p_{ij}$, $e_{ji}=e_{ij}$, $r_{ji} = -r_{ij}$, und da -1 quadratischer Rest für jede der Primzahlen p_{ij} ist, haben wir: Aus $\left(\frac{r_{ij}}{p_{ij}}\right) = e_{ij}$ folgt $\left(\frac{r_{ji}}{p_{ji}}\right) = e_{ji}$, und umgekehrt.

2. G ist zyklisch: Wir schließen der Reihe nach, daß bei Anwendung der Permutation $Z=(1\,2\ldots n)$ folgende Größen und Restklassen ungeändert bleiben: $j-i$ modulo n, $d_{ij}, p_{ij}, e_{ij}, r_{ij}$ modulo p_{ij}, $\left(\frac{r_{ij}}{p_{ij}}\right)$. Hieraus folgt sogleich, daß G durch Z in sich übergeführt wird.

3. G ist selbstkomplementär: Nach einem bekannten Satz der elementaren Zahlentheorie über simultane Kongruenzen existiert eine Zahl w, welche prim zu n und nicht-quadratischer Rest für jede der in n aufgehenden Primzahlen ist. Durch Multiplikation mit w werden die sämtlichen Restklassen modulo n in bestimmter Weise permutiert, und dieser Permutation der Restklassen entspricht eindeutig eine Permutation Q der die Restklassen repräsentierenden Ziffern $1, 2, \ldots, n$. Es sei $Qi=i'$, $Qj=j'$. Aus $j'-i' \equiv w(j-i) \bmod n$ schließen wir der Reihe nach $d_{i'j'}=d_{ij}$, $p_{i'j'}=p_{ij}$, $e_{i'j'}=e_{ij}$, $r_{i'j'} \equiv w r_{ij} \bmod p_{ij}$ und folglich

$$\left(\frac{r_{i'j'}}{p_{i'j'}}\right)=\left(\frac{w}{p_{ij}}\right)\left(\frac{r_{ij}}{p_{ij}}\right)=-\left(\frac{r_{ij}}{p_{ij}}\right).$$

Aus $\left(\frac{r_{ij}}{p_{ij}}\right)=e_{ij}$ folgt also $\left(\frac{r_{i'j'}}{p_{i'j'}}\right)=-e_{i'j'}$ und umgekehrt, und das bedeutet: Wird Q auf die Knoten von G angewandt, so geht hierduch G in sein Komplement über.

Damit ist (O) und zugleich (N) vollständig bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß das angegebene Konstruktionsverfahren bei festem n im allgemeinen (wenn in n mehrere verschiedene Primzahlen aufgehen) mehrere nicht-isomorphe zyklische sk. Graphen liefert; wir werden das im nächsten Paragraphen am Beispiel $n=pq$ nachweisen.

Es gibt Gründe für die Vermutung, daß die in (N) genannte hinreichende Bedingung zugleich notwendig sei. Bevor wir jedoch Zahlen n aus der Restklasse 1 modulo 4 angeben können, für welche sicher kein zyklischer sk. Graph mit n Knoten existiert, benötigen wir einige Aussagen über das charakteristische Polynom zyklischer Graphen.

2. Über das charakteristische Polynom zyklischer Graphen.[1]) Der zusammenhängende Graph G gestatte die zyklische Permutation $Z=(1\,2\ldots n)$. Dann ist die zugehörige Knotenmatrix eine sog. zyklische Matrix, und nach einem bekannten Satz (vgl. [1] p. 224) können wir sogleich ein vollständiges System linear unabhängiger Eigenvektoren von G angeben: Ein solches wird z. B. gebildet von den Spaltenvektoren $\mathbf{x}^j$ der symmetrischen Matrix

$$\mathbf{X}=(\mathbf{x}^1\mathbf{x}^2\ldots\mathbf{x}^n)=\begin{pmatrix}\varepsilon^{1\cdot 1} & \varepsilon^{1\cdot 2} & \cdot & \varepsilon^{1\cdot n}\\ \varepsilon^{2\cdot 1} & \varepsilon^{2\cdot 2} & \cdot & \varepsilon^{2\cdot n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varepsilon^{n\cdot 1} & \varepsilon^{n\cdot 2} & \cdot & \varepsilon^{n\cdot n}\end{pmatrix},$$

[1]) Nach Fertigstellung des Manuskripts wurde ich durch ein Referat (*Math. Rev.* **24**. 1A (1962), p. 10, Ref. Nr. 58) auf eine Arbeit von M. Tuero (A contribution to the theory of cyclic graphs, *Matrix Tensor Quart.* **11** (1961), 74–80) aufmerksam gemacht, welche mir jedoch nicht zugänglich ist. In dieser Arbeit wird — laut Referat — das charakteristische Polynom für gewisse zyklische Graphen bestimmt.

wo ε eine beliebige primitive n-te Einheitswurzel bezeichnet. Die Komponenten von $\mathbf{x}^n$ sind sämtlich gleich 1, $\mathbf{x}^n$ ist der zum einfachen Eingewert $\lambda_n = r$ gehörige Eigenvektor.

Der Knoten n sei mit den Knoten $i_1, i_2, \ldots, i_r$ durch je eine Kante verbunden. Aus der Relation

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^j = \lambda_j \mathbf{x}^j \tag{1}$$

können wir leicht Aussagen über die Eigenwerte λ_j gewinnen: Aus (1) ergibt sich, indem wir die letzte Zeile von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{x}^j$ multiplizieren, $\varepsilon^{i_1 j} + \varepsilon^{i_2 j} + \ldots + \varepsilon^{i_r j} = \lambda_j \cdot 1$, also

$$\lambda_j = \sum_{\varrho=1}^{r} \varepsilon^{j \cdot i_\varrho}. \tag{2}$$

Durch Angabe der Zahlen i_ϱ ist der Graph wegen der zyklischen Symmetrie offenbar völlig bestimmt. Mit einer Zahl i kommt auch stets die Zahl $n-i$ unter den Zahlen i_ϱ vor; hieraus folgt noch einmal, daß sämtliche λ_j reell ausfallen.

Ist n gerade, etwa $n = 2h$, so haben wir $\varepsilon^h = -1$, also $\lambda_h = \sum_{\varrho=1}^{r} (-1)^{i_\varrho}$. Die i_ϱ seien der Größe nach geordnet. Ist dann auch r gerade, etwa $r = 2v$, so schließen wir

$$\lambda_h = 2 \sum_{\varrho=1}^{v} (-1)^{i_\varrho} \equiv r \bmod 4,$$

ist aber r ungerade, etwa $r = 2v+1$, so ergibt sich

$$\lambda_h = (-1)^h + 2 \sum_{\varrho=1}^{v} (-1)^{i_\varrho} \equiv (-1)^h + r - 1 \bmod 4;$$

zusammengefaßt:

Im Falle $n = 2h$ ist λ_h eine ganze rationale Zahl, und es gilt $-r \leqq \lambda_h < r$, ferner $\lambda_h \equiv r \bmod 4$, falls r gerade ist, $\lambda_h \equiv r - 1 + (-1)^h \bmod 4$, falls r ungerade ist.

$\lambda_n = r$ ist einfacher Eingewert, und falls $n = 2h$ ist, so ist möglicherweise auch λ_h einfacher Eingewert; alle übrigen Eigenwerte λ_j sind sicher nicht einfach, denn die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}^j$ sind wesentlich komplex.

Es sei d' der größte gemeinsame Teiler von j und n, und es sei $d = \frac{n}{d'}$. ε^j ist primitive d-te Einheitswurzel; der von ε^j erzeugte Körper hängt nur von d ab und ist für $d > 2$ komplex, wir bezeichnen ihn mit K_d. Durchläuft q die zu d primen natürlichen Zahlen $\leqq d$, so durchläuft ε^{qj} die $\varphi(d)$ primitiven d-ten Einheitswurzeln, also die Konjugierten zu ε^j in K_d. Wegen (2) liegt λ_j in K_d, und da λ_j reell ist, liegt λ_j für $d > 2$ im maximalen reellen Unterkörper von K_d. Für $d > 2$ ist daher die Anzahl der verschiedenen Konjugierten von λ_j ein Teiler t von $\frac{1}{2}\varphi(d)$. Wird nun ε^j der Reihe nach durch seine sämtlichen Konjugierten ersetzt, so geht hierbei auch λ_j in seine t Konjugierten über, und zwar in jede gleich oft, nämlich $t^{-1}\varphi(d)$ mal; anderseits geht hierbei λ_j über in die $\varphi(d)$ Eigenwerte λ_{qj} ($qj \bmod n$). Die Restklassen $qj \bmod n$ stimmen in ihrer Gesamtheit mit den Restklassen $qd' \bmod n$ überein, so daß wir uns auf die Betrachtung der Zahlen $j = d'$ beschränken dürfen.

Das gewonnene Resultat können wir folgendermaßen aussprechen:

(P) *Der zusammenhängende Graph G gehe durch eine zyklische Permutation seiner Knoten in sich über. Dann gilt: Zu jedem Teiler d von n finden sich zwei natürliche Zahlen u_d, v_d mit $u_d v_d = \varphi(d)$ und ein irreduzibles Hauptpolynom $g_d(\lambda)$ vom Grade u_d, so daß*

$$f_G(\lambda) = \prod_{d|n} (g_d(\lambda))^{v_d};$$

dabei ist $g_1(\lambda) = \lambda - r$, ferner $v_1 = 1$ und, falls n gerade ist, auch $v_2 = 1$ und sonst v_d größer als 1 und gerade.

Die Wurzeln von $g_d(\lambda)$ sind reelle Summen von je r d-ten Einheitswurzeln.

Die Polynome $g_d(\lambda)$ sind für verschiedene d nicht notwendig verschieden; so ist z. B. für den vollständigen Graphen V mit n Knoten

$$f_V(\lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1}.$$

Als Beispiele wollen wir die charakteristischen Polynome für die in **III. 1** angegebenen zyklischen sk. Graphen mit p, p^2 und pq Knoten explizit ausrechnen; dabei sind p und q zwei beliebige, voneinander verschiedene Primzahlen aus der Restklasse 1 modulo 4.

Falle $n = p$: Wir können $e(1) = 1$ oder $= -1$ wählen. Da die zugehörigen Graphen offenbar isomorph sind, setzen wir $e(1) = 1$. Unter Benutzung des Legendre-Symbols schreiben wir

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{j-i}{p}\right)\right] & \text{für } j \neq i \\ 0 & \text{für } j = i. \end{cases}$$

Aus (1) entnehmen wir, indem wir $\mathbf{x}^j$ von links mit der p-ten Zeile von $\mathbf{A}$ multiplizieren,

$$\lambda_j = \sum_{t=1}^{p-1} \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{t}{p}\right)\right]\varepsilon^{jt} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Die letzte Summe läßt sich leicht ausrechnen:

Wir haben mit $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$

$$\sum_{t=1}^{p-1} \varepsilon^{jt} = \begin{cases} -1 & \text{für } j \neq p \\ p-1 & \text{für } j = p \end{cases}$$

und

$$\sum_{t=1}^{p-1} \left(\frac{t}{p}\right)\varepsilon^{jt} = \begin{cases} \left(\frac{j}{p}\right)\sqrt{p} & \text{für } j \neq p \text{ (Gaußsche Summe)} \\ 0 & \text{für } j = p, \end{cases}$$

so daß

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{j}{p}\right)\sqrt{p} - 1\right] & \text{für } j \neq p \\ \frac{1}{2}(p-1) & \text{für } j = p. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$f_G(\lambda) = \left[\lambda - \frac{1}{2}(p-1)\right]\left[\lambda - \frac{1}{2}(\sqrt{p}-1)\right]^{\frac{p-1}{2}}\left[\lambda - \frac{1}{2}(-\sqrt{p}-1)\right]^{\frac{p-1}{2}}$$

$$= \left[\lambda - \frac{1}{2}(p-1)\right]\left[\lambda^2+\lambda - \frac{1}{4}(p-1)\right]^{\frac{p-1}{2}}.$$

Fall $n=p^2$: Wir erhalten nach einer ähnlichen Rechnung wie oben in jedem Falle

$$f_G(\lambda) = \left[\lambda - \frac{1}{2}(p^2-1)\right]\left[\lambda^2+\lambda - \frac{1}{4}(p^3-1)\right]^{\frac{p-1}{2}}\left[\lambda^2+\lambda - \frac{1}{4}(p-1)\right]^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Fall $n=pq$: Die von n verschiedenen Teiler von n sind $d_1=1$, $d_2=p$, $d_3=q$. Es ist notwendig $\pi(d_2)=q$, $\pi(d_3)=p$, während wir für $\pi(d_1)$ willkürlich p oder q wählen dürfen. Wir setzen $\pi(d_1)=p$, ferner $e(d_i)=e_i$ $(i=1, 2, 3)$; den Fall $\pi(d_1)=q$ erhalten wir, indem wir p und q sowie die Indizes 2 und 3 miteinander vertauschen.

Nach einiger Rechnung ergibt sich

$$f_G(\lambda) = \left[\lambda - \frac{1}{2}(pq-1)\right]\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}q\right]^{\frac{q-1}{2}}$$

$$\cdot\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(q+\left(\frac{q}{p}\right)\delta\right)^2 p\right]^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\cdot\left[\left\{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(\delta^2 p+q)\right\}^2 - \frac{1}{4}\delta^2 pq\right]^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

wo zur Abkürzung $e_1 e_3 - \left(\frac{q}{p}\right) = \delta$ gesetzt ist.

$f_G(\lambda)$ geht nicht in sich über, wenn man p und q sowie die Indizes 2 und 3 vertauscht, und $f_G(\lambda)$ hängt auch von $e_1 e_3$ ab. Das Konstruktionsverfahren führt also in diesem Falle zu mehreren nicht-isomorphen Graphen, denn isomorphe Graphen haben das gleiche charakteristische Polynom.

3. Natürliche Zahlen n aus der Restklasse 1 modulo 4, für welche kein zyklischer selbstkomplementärer Graph mit n Knoten existiert. Mit Hilfe der Sätze über das charakteristische Polynom eines zyklischen sk. Graphen werden wir zeigen:

(Q) *Es seien p und q zwei beliebige Primzahlen aus der Restklasse* 3 modulo 4 *und s eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt: Zu den Zahlen $n=p^{2s}$ sowie $n=pq$ existiert kein zyklischer sk. Graph mit n Knoten.*

Beweis. Angenommen, es sei G ein zyklischer sk. Graph mit n Knoten.

Fall $n=p^{2s}$: Nach (P) haben wir

$$f_G(\lambda) = \left[\lambda - \frac{1}{2}(n-1)\right]\prod_{\sigma=1}^{2s}\left[g_{p^\sigma}(\lambda)\right]^{v_{p^\sigma}};$$

dabei ist der Grad u_{p^σ} von $g_{p^\sigma}(\lambda)$ als Teiler von $\frac{1}{2}\varphi(p^\sigma)=\frac{p-1}{2}p^{\sigma-1}$ ungerade ($\sigma=1, 2, \ldots, 2s$). Die $u_{p^{2s}}$ Nullstellen von $g_{p^{2s}}(\lambda)$ lassen sich also gewiß nicht paarweise so zusammenfassen, daß die Summe von je zweien gleich -1 ist. Es gibt daher mindestens eine Nullstelle λ_1 von $g_{p^{2s}}(\lambda)$, zu welcher sich unter den Nullstellen von $g_{p^{2s}}(\lambda)$ kein Partner $\lambda_1'=-\lambda_1-1$ findet. Nun ist nach (M) λ_1' gewiß Nullstelle von $f_G(\lambda)$, und zwar von der gleichen Multiplizität wie λ_1, also muß λ_1' Nullstelle von gewissen der Polynome $g_{p^\sigma}(\lambda)$ ($\sigma=1, 2, \ldots, 2s-1$) sein; ein solches Polynom hat dann die Form $g_{p^\sigma}(\lambda)=-g_{p^{2s}}(-\lambda-1)$ und den Grad $u_{p^{2s}}$, der zugehörige Exponent ist

$$v_{p^\sigma}=\frac{\varphi(p^\sigma)}{u_{p^\sigma}}=\frac{1}{u_{p^{2s}}}(p-1)p^{\sigma-1}.$$

Daraus folgt: Die Multiplizität μ' der Nullstelle λ_1' von $f_G(\lambda)$ ist höchstens gleich

$$\sum_{\sigma=1}^{2s-1}\frac{1}{u_{p^{2s}}}(p-1)p^{\sigma-1}=\frac{1}{u_{p^{2s}}}(p^{2s-1}-1).$$

Andererseits ist die Multiplizität μ der Nullstelle λ_1 von $f_G(\lambda)$ mindestens gleich

$$v_{p^{2s}}=\frac{1}{u_{p^{2s}}}\varphi(p^{2s})=\frac{1}{u_{p^{2s}}}(p-1)p^{2s-1},$$

so daß $\mu>\mu'$ — im Widerspruch zu (M).

Fall $n=pq$: Es sei etwa $p<q$. Nach (P) gilt

$$f_G(\lambda)=(\lambda-r)\big(g_p(\lambda)\big)^{v_p}\big(g_q(\lambda)\big)^{v_q}\big(g_{pq}(\lambda)\big)^{v_{pq}}\ \text{mit}\ r=\frac{1}{2}(n-1).$$

Dabei ist der Grad u_p von $g_p(\lambda)$ als Teiler von $\frac{1}{2}\varphi(p)$ ungerade. Wie oben gibt es also mindestens eine Nullstelle λ_1 von $g_p(\lambda)$, zu welcher sich unter den Nullstellen von $g_p(\lambda)$ kein Partner $\lambda_1'=-\lambda_1-1$ findet, daraus schließen wir wie oben: Mindestens eines der Polynome $g_q(\lambda)$, $g_{pq}(\lambda)$ muß mit $-g_p(-\lambda-1)$ übereinstimmen.

Ist $g_q(\lambda)=-g_p(-\lambda-1)$, so muß weiter $g_{pq}(\lambda)=g_p(\lambda)$ sein, weil sonst die Multiplizität μ von λ_1 kleiner als die Multiplizität μ' von λ_1' wäre. Hieraus folgt

$$\mu=v_p+v_{pq}=u_p^{-1}\big(\varphi(p)+\varphi(pq)\big)=u_p^{-1}q(p-1),$$
$$\mu'=v_q=u_p^{-1}\varphi(q)=u_p^{-1}(q-1),$$

und das führt auf $\mu'<\mu$, im Widerspruch zu (M).

Ist $g_{pq}(\lambda)=-g_p(-\lambda-1)$, so muß $g_q(\lambda)=g_p(\lambda)$ sein, weil sonst wieder $\mu<\mu'$ wäre; aber auch in diesem Falle werden wir zu einem Widerspruch zu (M) geführt, denn jetzt ergibt sich

$$\mu=v_p+v_q=u_p^{-1}\big(\varphi(p)+\varphi(q)\big)=u_p^{-1}(p-1+q-1),$$
$$\mu'=v_{pq}=u_p^{-1}\varphi(pq)=u_p^{-1}(p-1)(q-1),$$

also $\mu<\mu'$.

Damit ist (Q) bewiesen.

Bemerkung. Mittels der angegebenen Methode lassen sich viele weitere Zahlen $n \equiv 1 \bmod 4$ angeben, für welche kein zyklischer sk. Graph mit n Knoten existiert, z. B. die Zahlen $n = 3^2 p$, wo p eine beliebige Primzahl $\equiv 1 \bmod 4$ und > 5 ist.

Literatur

[1] R. ZURMÜHL, Matrizen (2. Auflage) *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1958.

(Eingegangen am 24. Juni 1962.)