

Über Differentialkomitanten erster Ordnung der homogenen linearen geometrischen Objekte in bezug auf ein kontravariantes Vektorfeld

Von I. MAKAI (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 50. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Die Definition der Differentialkomitanten erster Ordnung eines homogenen linearen geometrischen Objektfeldes (im folgenden oft kurz *Objekt* genannt) in bezug auf ein gegebenes festes kontravariantes Vektorfeld kann in folgender Weise angegeben werden.

Betrachten wir ein kontravariantes Vektorfeld $\{v^k\}$ zusammen mit dem System seiner Ableitung erster Ordnung

$$\partial_i v^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v^k}{\partial \xi^i}$$

im Gebiete G des Raumes X_n . Es sei noch ein, in G erklärtes homogenes lineares geometrisches Objekt

$$\Omega = \{\Omega_A\} \quad (A = 1, \dots, N)$$

gegeben. Folglich transformieren sich die Komponenten des Funktionensystems Ω im Falle einer zulässigen Koordinatentransformation

$$(1) \quad \bar{\xi}^i = \varphi^i(\xi^1, \dots, \xi^n)$$

$(\xi^i = \psi^i(\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^n))$ ist das inverse Funktionensystem von (1)) des Raumes X_n nach den Transformationsformeln

$$(2) \quad \bar{\Omega}_A = F_A^B(A_j^i) \Omega_B, \quad \left(A_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \psi^i}{\partial \bar{\xi}^j} \right),$$

wo die Gestalt des Funktionensystems F_A^B gegenüber Koordinatentransformationen (1) von X_n invariant ist.

Wir werden die Differenzierbarkeit der Funktionen $F_A^B(A_j^i)$ nach allen ihren Veränderlichen A_j^i voraussetzen.

Es ist nötig die folgenden Definitionen zu geben:

Definition 1. Wenn wir ein System der Funktionen $\varphi^i(\xi^1, \dots, \xi^n)$ von (1) und auch das Koordinatensystem K angeben, auf das wir die durch das System φ^i erklärte

Koordinatentransformation (1) anwenden, so wird die Gesamtheit der Systeme q^i und $\mathbf{K}$ $\mathbf{K}$ -Transformation (1) genannt.

Es soll bemerkt werden, daß man kein „Produkt von $\mathbf{K}$ -Transformationen“ bei fixem Bezugssystem $\mathbf{K}$ bilden kann.

Es sei ein differentialgeometrisches Objekt

$$\Omega(\Pi) = \{\Omega_1(\Pi), \dots, \Omega_N(\Pi)\}$$

in den Punkten Π von $\mathbf{G} (\subseteq \mathbf{X}_n)$ erklärt. Seine Transformationsformel hat die Gestalt

$$(2') \quad \bar{\Omega}_A(\Pi) = \Phi_A[\Omega_1(\Pi), \dots, \Omega_N(\Pi); \mathbf{T}], \quad (A = 1, \dots, N)$$

wo $\mathbf{T}$ die endliche Anzahl der Parameter der Koordinatentransformation (1) bezeichnet.

Betrachten wir den N -dimensionalen arithmetischen Raum $\mathbf{A}_N$ von N -Tupeln $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ der (reellen) Zahlen. Der Definitionsbereich des Funktionensystems Φ_A in bezug auf seine N Veränderlichen bildet eine Untermenge $\mathbf{M}_\Omega$ dieses Raumes $\mathbf{A}_N$.

Wir werden eine Einteilung

$$\mathbf{M}_\Omega = \bigcup_{\alpha} \mathbf{M}_{\Omega_\alpha}$$

der Menge $\mathbf{M}_\Omega$ von $\mathbf{A}_N$ folgendermaßen angeben:

Die N -Tupeln

$$\underset{(1)}{(\eta_1, \dots, \eta_N)}, \underset{(2)}{(\eta_1, \dots, \eta_N)} \quad (\in \mathbf{M}_\Omega)$$

gehören dann und nur dann zu derselben Untermenge $\mathbf{M}_{\Omega_\alpha}$ von $\mathbf{M}_\Omega$, wenn ein System $\mathbf{T}_{21}$ von Parametern $\mathbf{T}$ der zulässigen Koordinatentransformationen (1) von der Gestalt

$$\underset{(2)}{\eta_A} = \Phi_A(\underset{(1)}{\eta_1}, \dots, \underset{(1)}{\eta_N}; \mathbf{T}_{21}) \quad (A = 1, \dots, N)$$

existiert.

Es ist klar, daß die Untermengen $\mathbf{M}_{\Omega_1}, \dots, \mathbf{M}_{\Omega_\alpha}, \dots$ zueinander paarweise fremd sind.

Definition 2. Die so erklärten Untermengen $\mathbf{M}_{\Omega_1}, \dots, \mathbf{M}_{\Omega_\alpha}, \dots$ des Definitionsbereiches $\mathbf{M}_\Omega$ des Systems Φ_A nach seinen ersten N Veränderlichen werden wir Transitivitätsbereiche des mit der Transformationsformel (2') versehenen Objektes Ω nennen.

Definition 3. Die Differentialkomitante erster Ordnung eines homogenen linearen geometrischen Objektes Ω in bezug auf das kontravariante Vektorfeld $\{v^k\}$ soll ein solches Funktionensystem

$$\theta = \{\theta_B\} \quad (B = 1, \dots, N)$$

sein, das die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- 1° θ und Ω sind Objekte mit gleichen Transformationsformeln,
- 2° θ ist eine Differentialkomitante erster Ordnung in bezug auf Ω ,
- 3° θ ist eine Differentialkomitante erster Ordnung in bezug auf $\{v^k\}$.

Aus den Voraussetzungen der Definition 3. ergibt sich die Gestalt von θ_B :

$$(3) \quad \theta_B = f_B(\Omega_A; \partial_j \Omega_A; v^k; \partial_i v^k), \quad \left(\partial_j \Omega_A \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \Omega_A}{\partial \xi^j} \right),$$

wo die Funktionen f_B nach 1° das Funktionalgleichungssystem

$$(4) \quad F_B^C(A_j) f_C(\Omega_D; \partial_j \Omega_D; v^k; \partial_i v^k) = f_B(\bar{\Omega}_D; \bar{\partial}_j \bar{\Omega}_D; \bar{v}^k; \bar{\partial}_i \bar{v}^k)$$

erfüllen sollen.

Zum Beispiel wurde die Differentialkomitante θ des kontravarianten Vektorfeldes

$$\Omega = \{u^1, \dots, u^n\}$$

bezüglich des kontravarianten Vektorfeldes $\{v^k\}$ in [2] unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Funktionen f_B bestimmt. Das Ergebnis

$$\theta^k = c_1 u^k + c_2 v^k + c_3 (v^a \partial_a u^k + u^a \partial_a v^k) \quad (k = 1, \dots, n)$$

(c_1, c_2, c_3 sind beliebige Konstanten oder gewisse skalare Differentialkomitanten erster Ordnung der Vektorfelder $\{u^k\}, \{v^k\}$) enthält auch den Ausdruck der Lieschen Ableitung

$$\mathcal{L}_v u^k = v^a \partial_a u^k - u^a \partial_a v^k$$

des Vektorfeldes $\{u^k\}$ in bezug auf das Vektorfeld $\{v^k\}$.

In dieser Arbeit setzen wir höchstens die Stetigkeit in gewissen (jeweils anzugebenden) Argumenten der Funktionen f_b voraus, und wir bestimmen mit Hilfe dieser Voraussetzung im Falle, wo Ω ein Skalarfeld (§ 3), ein Vektorfeld (§ 4), bzw. ein gewöhnliches (§ 5), oder Weylsches (§ 6) Dichtenfeld ist, die Lösungen des entsprechenden Funktionalgleichungssystems (4), während wir im Falle $n = N = 1$ (in dem Paragraph 2.) die vollständige Lösung des Problems angeben werden. Wie wir sehen werden, enthalten unsere Ergebnisse in jedem Fall die Liesche Ableitung $\mathcal{L}_v \Omega$ des Objektes Ω in bezug auf das Feld $\{v^k\}$ als partikuläre Lösung der entsprechenden Gleichung (4) (§ 7).

Der Gedankengang unseres Vorgehens wird im allgemeinen der folgende sein:

Wir betrachten zuerst nur solche Teilmenge $\mathbf{G}_1$ von $\mathbf{G}$, in denen die Ungleichung

$$(5) \quad \{v^k\} \neq \{0\}$$

gültig ist. Dann kann man in jedem Punkt dieser Teilmenge ein solches Koordinatensystem $\mathbf{K}_0$ wählen, in welchem die Relationen

$$(6) \quad v^k \neq 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

gelten. Aus einem solchen Koordinatensystem ausgehend, werden wir die Gestalt der Funktionen f_b durch zweckmäßig gewählte Folgen von $\mathbf{K}_0$ -Transformationen bestimmen.

Wir verstehen darunter folgendes:

Es sei $\varphi^i(\xi^1, \dots, \xi^n)$ ein solches System von Funktionen, bei welches sich die Gestalt von f_B mit Hilfe der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_1: \quad \mathbf{K}_0, \quad \{\bar{\xi}^i = \varphi^i(\xi^1, \dots, \xi^n)\} \quad (\mathbf{K}_0 \xrightarrow{\varphi^i} \mathbf{K}_1)$$

wegen (4) gewissermaßen „vereinfacht“. Die Gestalt von f_B ist (infolge unserer Voraussetzungen $2^\circ, 3^\circ$) gegenüber der Koordinatentransformation T_I invariant (vgl. [2], S. 12.), also ist die so erhaltene Gestalt von f_B auch in dem ursprünglichen Koordinatensystem K_0 gültig. Eine weitere „Vereinfachung“ können wir mit Hilfe einer anderen K_0 -Transformation

$$T_{II}: K_0, \{\bar{\xi}^i = \tilde{q}^i(\xi^1, \dots, \xi^n)\}$$

verwirklichen, usw.

Einerseits wird es der Zweck dieser „Vereinfachungen“ sein, gewisse Ausdrücke

$$\theta_1 c_1, \dots, \theta_m c_m$$

der Veränderlichen $\Omega_A, \partial_j \Omega_A, v^k$ und $\partial_i v^k$ zu bilden, die algebraische oder Differentialkomitanten der Objekte $\Omega, \{v^k\}$ sind, andererseits wollen wir die Tatsache beweisen, daß das Objekt θ nur von den Objekten $\theta_1, \dots, \theta_m$ abhängen kann. Das Wesen dieses Verfahrens wird also immer in einer Zurückführung des Problems auf das Problem der Bestimmung der *algebraischen* Komitante θ der Objekte $\theta_1, \dots, \theta_m$ liegen.

Es läßt sich aber annehmen, daß die durch

$$(7) \quad \{v^k\} = \{0\}$$

charakterisierte Untermenge G_2 von G nicht leer ist. Wir werden deswegen auch die Fälle untersuchen, in denen die Gleichheit (7) besteht.

Es kann vorkommen, daß die Ungleichungen $\partial_j v^k \neq 0$ ($j, k = 1, \dots, n$) neben der Relation (7) gültig sind. In diesen Fällen muß aber G_2 niedrigere Dimension als n haben, folglich werden auch die Resultate, die wir mit den Voraussetzungen $\{v^k\} = \{0\}, \{\partial_i v^k\} \neq \{0\}$ erreichen werden, nur über solcher Teilmengen von G gültig sein, die niedrigere Dimension als n haben. Desgleichen können solche Ergebnisse nur über eine Teilmenge von G mit niedrigerer Dimension als n gültig sein, die wir mit den Voraussetzungen $\Omega = \{0\}, \{\partial_j \Omega_A\} \neq \{0\}$ erhalten werden.

Wir bemerken, daß die mit der Relation $\Omega = \{0\}$, bzw. $\{v^i\} = \{0\}$ ausgezeichnete Teilmenge von G (wegen der homogenen Linearität der Objekte $\Omega, \{v^i\}$) unabhängig von der Wahl des Bezugssystems des Raumes X_n ist.

§ 1. Über Vektor- und Skalarkomitanten der Vektorfelder

1. Wir betrachten ein System von kontravarianten Vektoren

$$(1.1) \quad \mathbf{u}_a \quad (a = 1, \dots, m)$$

mit den Koordinaten

$$u_a^j, \quad (j = 1, \dots, n)$$

das in einem Punkte des n -dimensionalen Raumes X_n gegeben ist. Es seien p von ihnen linear unabhängig. Die eindeutig bestimmte Zahl p erfüllt die Ungleichungen

$$0 \leq p \leq n, \quad p \leq m.$$

Setzen wir voraus, daß eben die erste p Vektoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ des Systems (1.1) linear unabhängig sind.

Ist $p < m$, so gibt es Skalare

$$(1.2) \quad \lambda_s^c, \quad \begin{pmatrix} c=1, \dots, p \\ s=p+1, \dots, m \end{pmatrix}$$

welche die Beziehungen

$$\mathbf{u}_s = \lambda_s^c \mathbf{u}_c$$

erfüllen.

Satz 1° (s. [5]). Ist $1 \leq p < m$, so hat jede kontravariante Vektorkomitante

$$f^i(u_1^{j_1}; \dots; u_m^{j_m}) \quad (i=1, \dots, n)$$

der Vektoren (1.1) folgende Gestalt:

$$f^i(u_1^{j_1}; \dots; u_m^{j_m}) = u_b^i \varphi^b(\lambda_s^c), \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, n \\ b, c=1, \dots, p \\ s=p+1, \dots, m \end{pmatrix}$$

wo $\varphi^b(\lambda_s^c)$ beliebige Funktionen der Skalaren (1.2) bedeuten.

Satz 2° (s. [5]). Ist $p=m$, so hat jede kontravariante Vektorkomitante der Vektoren (1.1) die Gestalt

$$f^i(u_1^{j_1}; \dots; u_m^{j_m}) = c_a^i u_a^i, \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, n \\ a=1, \dots, m \end{pmatrix}$$

wo c^a beliebige Konstanten bedeuten.

Satz 3° (s. [5]). Sind alle Vektoren (1.1) gleich Null, so müssen die Komponenten der Vektorkomitante auch gleich Null sein:

$$f(0, \dots, 0) = 0. \quad (i=1, \dots, n)$$

Wir werden nur die folgende schwächere Gestalt dieser Sätze benötigen:

Satz I. Ist w^i eine kontravariante Vektorkomitante der Vektoren (1.1), so ist

$$w^i = \psi^a u_a^i \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, n \\ a=1, \dots, m \end{pmatrix}$$

gültig, wo die ψ^a ($a=1, \dots, m$) Konstanten oder Funktionen der Skalaren (1.2) bedeuten.

In ähnlicher Weise kann man auch den folgenden Satz erhalten (vgl. [6]):

Satz II. Wenn w_i eine kovariante Vektorkomitante der kovarianten Vektoren

$$(1.3) \quad \mathbf{v} = \{v_j\}^b \quad (b=1, \dots, m')$$

ist, dann hat w_i die Gestalt

$$w_i = \chi_b^i v_i^b \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, n \\ b=1, \dots, m' \end{pmatrix}$$

(χ_b ($b=1, \dots, m'$) sind beliebige Konstanten oder beliebige Funktionen der Skalaren

$$(1.4) \quad \mu_d^t, \quad \begin{pmatrix} d=1, \dots, p' \\ t=p'+1, \dots, m' \end{pmatrix}$$

wo die Skalaren (1.4) die Abhängigkeit der Vektoren (1.3) ausdrücken.)

Über skalare Komitanten der Vektoren (1.1) und (1.3) hat Herr M. KUCHARZEWSKI in seiner Arbeit [7] den folgenden Satz festgestellt:

Satz III. Jede skalare Komitante der Vektorsysteme (1.1), (1.3) kann in der Form

$$\tau(\lambda_s^c; \mu_d^t; v_i^a u_b^i)$$

dargestellt werden, wo τ eine beliebige Funktion der Skalaren (1.2), (1.4) und der Skalarprodukte $v_i^a u_b^i$ bedeutet.

2. Es sei ein Tensorfeld $\{T_i^k\}$ von Valenz (1. 1) in einem Punkt des n -dimensionalen Raumes X_n gegeben. Es ist bekannt (vgl. [4], S. 138—139.), daß die Matrix

$$\mathbf{T} = (T_i^k)$$

sich durch eine entsprechend gewählte reguläre Matrix $\mathbf{A}$ auf ihre erste Normalform

$$\mathbf{T}_{(0)} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_t\} \quad (t \leq n)$$

transformieren läßt:

$$(1.5) \quad \mathbf{T}_{(0)} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T} \mathbf{A}$$

($\bar{\mathbf{A}}$ ist die Inverse von $\mathbf{A}$). Hier ist $\mathbf{T}_{(0)}$ die verallgemeinerte Diagonalmatrix n -ter Ordnung, die Matrizen

$$\mathbf{T}_m \quad (m=1, \dots, t)$$

haben die Gestalt

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma}{(j_{m-1}+1)} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma}{(j_{m-1}+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma}{(j_{m-1}+3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\sigma}{(j_m)} \end{pmatrix},$$

$$(j_0=0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{t-1} \leq j_t=n)$$

wo die Größen

$$(1.6) \quad \frac{\sigma}{(1)}, \dots, \frac{\sigma}{(j_1)}, \frac{\sigma}{(j_1+1)}, \dots, \dots, \frac{\sigma}{(j_{t-1})}, \frac{\sigma}{(j_{t-1}+1)}, \dots, \frac{\sigma}{(j_t)}$$

die Koeffizienten der Invariantenteiler der Matrix $\mathbf{T}$ sind.

Zusammen mit den Zahlen

$$\tau_m = j_m - j_{m-1} \quad (m = 1, \dots, t; \tau_1 + \dots + \tau_t = n)$$

(die zusammen mit der Reihenfolge der Koeffizienten (1.6) die erste Normalform $\mathbf{T}$ der Matrix $\mathbf{T}$ vollständig bestimmen) stellen diese sämtliche unabhängige skalare (0) Komitanten des Tensors $\{T_i^k\}$ dar (vgl. [3], [4]).

Natürlich kann man immer erreichen, daß die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ neben (1.5) auch die zusätzliche Bedingung

$$(1.7) \quad \Delta = \det(A_j^i) = 1$$

befriedigt.

§ 2. Differentialkomitanten im eindimensionalen Raum X_1

Wir werden uns in diesem Paragraph mit der Bestimmung sämtlicher Differentialkomitanten θ solcher homogener linearer Objekte Ω (in bezug auf ein kontravariantes Vektorfeld $\{v^k\}$) im eindimensionalen Raum X_1 beschäftigen, die eine einzige Komponente besitzen.

Es seien die Komponenten von Ω , von $\{v^k\}$, bzw. von θ mit

$$\Omega, v, \text{ bzw. } \theta$$

bezeichnet, und wir schreiben die Relationen (1), (2), (3), (4) in der Form

$$(2.1) \quad \bar{\xi} = \varphi(\xi), \quad [\bar{\xi} = \psi(\xi)]$$

$$(2.2) \quad \bar{\Omega} = F(\alpha)\Omega, \quad (\alpha \neq 0)$$

$$(2.3) \quad \sigma = f(\Omega, d\Omega, v, dv),$$

$$(2.4) \quad F(\alpha)f(\Omega, d\Omega, v, dv) = f(\bar{\Omega}, d\bar{\Omega}, \bar{v}, d\bar{v}),$$

wo

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\psi}{d\xi}; \quad d\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\Omega}{d\xi}, \quad dv \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv}{d\xi}; \quad d\bar{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d(\bar{\Omega})}{d\bar{\xi}}, \quad d\bar{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d(\bar{v})}{d\bar{\xi}}$$

ist.

Wegen (2.4) soll die Funktion $F(x)$ ($x \neq 0$) die Cauchysche Funktionalgleichung

$$(2.5) \quad F(uv) = F(u)F(v) \quad (uv \neq 0)$$

befriedigen (vgl. [2]). Wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $F(\alpha)$ kann man $F(\alpha)$ durch

$$(2.6) \quad F(\alpha) = \varepsilon |\alpha|^c$$

($\varepsilon = 1$, oder $\varepsilon = \text{sgn } \alpha$; c ist eine beliebige Konstante) darstellen (vgl. [1]), folglich geht (2.2) in die Relation

$$(2.7) \quad \bar{\Omega} = \varepsilon |\alpha|^c \cdot \Omega$$

über und wir bekommen für

$$\overline{d\Omega} = \frac{d(\overline{\Omega})}{d\bar{\xi}}$$

den Ausdruck

$$(2.8) \quad \overline{d\Omega} = \varepsilon |\alpha|^c (\alpha d\Omega + c\alpha^{-1}\beta\Omega). \quad \left(\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\psi}{d\bar{\xi}^2} \right)$$

Andererseits folgt aus

$$(2.9) \quad \bar{v} = \alpha^{-1}v$$

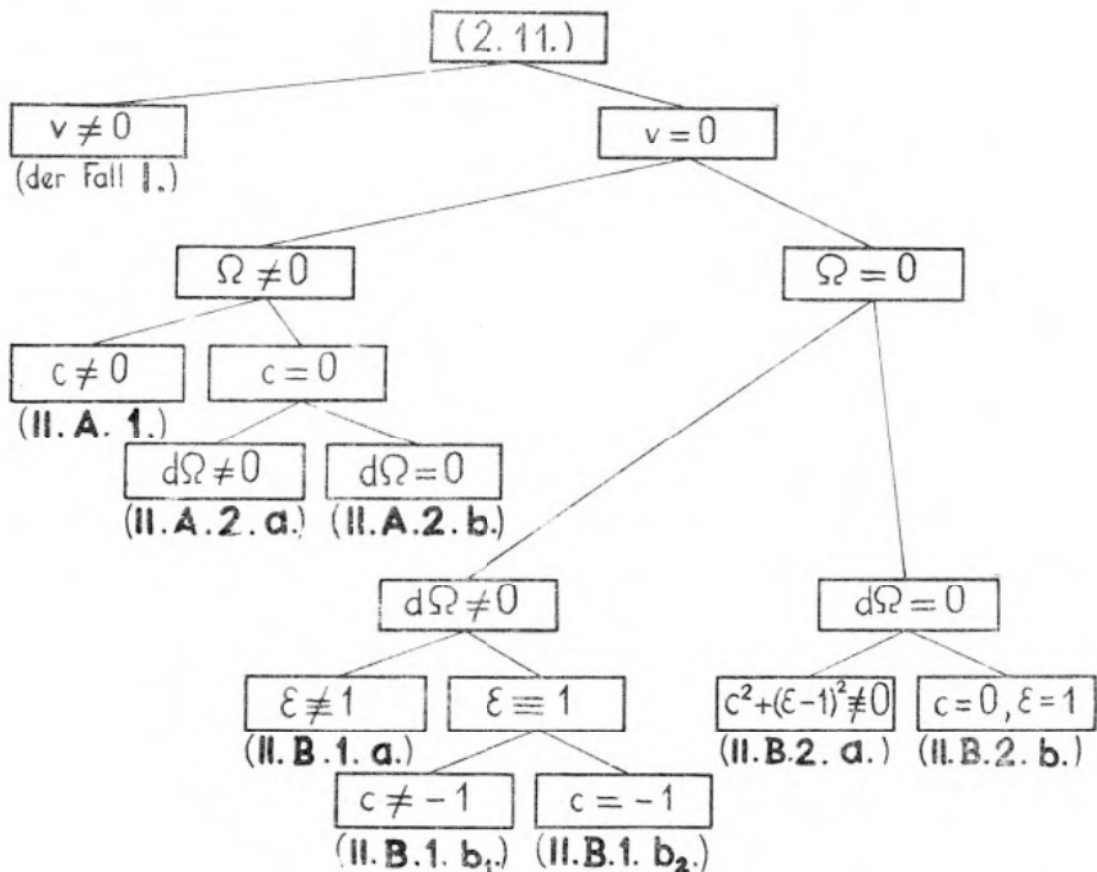
die Gleichheit

$$(2.10) \quad \overline{dv} = dv - \alpha^{-2}\beta v.$$

Setzen wir (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) in (2.4) ein, so erhalten wir für $f(\Omega, d\Omega, v, dv)$ die Funktionalgleichung

$$(2.11) \quad \varepsilon |\alpha|^c f(\Omega, d\Omega, v, dv) = f[\varepsilon |\alpha|^c \Omega, \varepsilon |\alpha|^c (\alpha d\Omega + c\alpha^{-1}\beta\Omega), \alpha^{-1}v, dv - \alpha^{-2}\beta v].$$

Das Schema des Gedankenganges der Auflösung von (2.11) können wir in folgender Form angeben:



Figur 1

Die Figur 1. zeigt, daß wir bei der Auflösung der Gleichung (2. 11) neun Unterfälle (I.; II. A. 1.; ...; II. B. 2. b.) unterscheiden werden. Die Klassifikation eines jeden Unterfalles kann man von dem „Weg,“ der von $\boxed{(2. 11)}$ zu dem betreffenden Unterfall „führt“, ablesen. Z. B. sind die Voraussetzungen des Unterfalls II. B. 1. b₂, die folgenden:

$$(2. 12) \quad v=0, \quad \Omega=0, \quad d\Omega \neq 0, \quad \varepsilon=1, \quad c=-1$$

(d. h. es ist $c=-1$ und außerdem gelten im betrachteten Punkte $\Pi(\xi)$ von X_1 für $v, \Omega, d\Omega, \varepsilon$ eben die Relationen (2. 12)).

Die Auflösung der Funktionalgleichung (2. 11)

Es sei K ein beliebig gewähltes Koordinatensystem von X_1 .

Der Fall I.

Wir wenden die K -Transformation¹⁾

$$T_2 \quad \alpha=v, \quad \beta=vdv$$

an, so bekommen wir die Lösung in der Form

$$(2. 13) \quad \theta = \varepsilon_1 |v|^{-c} \kappa[\varepsilon_1 |v|^c \Omega, \varepsilon_1 |v|^c (vd\Omega + c\Omega dv)],$$

$$\left(\varepsilon_1 \begin{cases} =1, & \text{wenn } \varepsilon=1 \text{ gilt,} \\ =\operatorname{sgn} v, & \text{wenn } \varepsilon=\operatorname{sgn} \alpha \text{ gilt;} \end{cases} \quad \kappa(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} f(x, y, 1, 0) \right).$$

Aus den Transformationsformeln (2. 7), (2. 8), (2. 9), (2. 10) folgt, daß die Größen

$$\varepsilon_1 |v|^c \Omega \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 |v|^c (vd\Omega + c\Omega dv)$$

Skalaren sind, während die Größe

$$\varepsilon_1 |v|^{-c}$$

die Transformationsformel

$$\varepsilon_1 |v|^{-c} = \varepsilon |\alpha|^c \cdot (\varepsilon_1 |v|^{-c})$$

hat. Daraus folgt es umgekehrt bei beliebiger Funktion $\kappa(x, y)$, daß θ dieselbe Transformationsformel wie Ω hat, folglich stellt (2. 13) die allgemeinste Lösung von (2. 11) dar.

Der Fall II. A. 1.

Die Gleichung (2. 11) besitzt jetzt die Gestalt

$$(2. 14) \quad \varepsilon |\alpha|^c \theta = f[\varepsilon |\alpha|^c \Omega, \varepsilon |\alpha|^c (\alpha d\Omega + c\alpha^{-1} \beta \Omega), 0, dv],$$

¹⁾ Das Zeichen $T_{1,j}$ wird sich auf eine solche Transformation beziehen, bei welcher

$$A_i^k = \delta_i^k$$

ist, während das bei dem Zeichen T_j ($j > 1$) nicht der Fall sein wird.

wo dv — wegen (2. 10) — sich wie eine skalare Größe verhält, wo $v=0$ ist. Wir verwenden die **K**-Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3 \quad \alpha &= \varepsilon_2 |\Omega|^{-\frac{1}{c}}, \quad \beta = -(c\Omega)^{-1} |\Omega|^{-\frac{2}{c}} d\Omega \\ &\left(\varepsilon_2 \begin{cases} = 1, & \text{wenn } \varepsilon = 1, \\ = \operatorname{sgn} \Omega, & \text{wenn } \varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha \end{cases} \right) \end{aligned}$$

(was wegen $c \neq 0$, $\Omega \neq 0$ erlaubt ist), um damit die Lösung auf die Form

$$\theta = \varepsilon_2 |\Omega| \lambda(\varepsilon_2 \operatorname{sgn} \Omega, dv)$$

($\lambda(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} f(x, 0, 0, y)$) zu bringen. (Die Funktion $\lambda(x, y)$ kann man wieder beliebig wählen.)

Der Fall II. A. 2. a.

Wegen $c=0$ haben wir statt (2. 14) die Gleichung

$$(2. 15) \quad \varepsilon \theta = f(\varepsilon \Omega, \varepsilon x d\Omega, 0, dv).$$

Nach Anwendung der **K**-Transformationen

$$\mathbf{T}_4 \quad \alpha = \varepsilon_2 |d\Omega|^{-1},$$

und nachher

$$\mathbf{T}_4' \quad \alpha = d\Omega$$

folgt das Ergebnis

$$\theta = \varepsilon_2 \mu(\varepsilon_2 \Omega, \varepsilon_3, dv).$$

[$\mu(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} f(x, y, 0, z)$; $\varepsilon_3 \equiv 1$ (wenn $\varepsilon \equiv 1$ ist), oder $\operatorname{sgn} d\Omega$ (wenn $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$ ist).]

Der Fall II. A. 2. b.

Die Gleichung (2. 15) hat jetzt die Form

$$\varepsilon \theta = f(\varepsilon \Omega, 0, 0, dv),$$

die mit Hilfe der **K**-Transformation

$$\mathbf{T}_5 \quad \alpha = \varepsilon_2$$

die Lösung

$$\theta = \varepsilon_2 v(\varepsilon_2 \Omega, dv)$$

($v(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} f(x, 0, 0, y)$ beliebig) liefert.

Der Fall II. B. 1. a.

Die Gleichung (2. 11) geht in diesem Fall in die Gleichung

$$(2. 16) \quad \varepsilon |\alpha|^c \theta = f[0, \varepsilon \alpha |\alpha|^c d\Omega, 0, dv]$$

über, woraus wir mit Hilfe der **K**-Transformation

$$\mathbf{T}_6 \quad \alpha = -1 \quad (\varepsilon = -1)$$

die Relation

$$-\theta = f(0, d\Omega, 0, dv)$$

gewinnen, während aus (2. 3) $\theta = f$ folgt. Dies führt zu

$$\theta = 0.$$

Der Fall II. B. 1. b_1 .

Statt (2. 16) haben wir jetzt

$$|\alpha|^c \theta = f[0, \alpha |\alpha|^c d\Omega, 0, dv].$$

Die Anwendung der **K**-Transformation

$$\mathbf{T}_7 \quad \alpha = \operatorname{sgn} d\Omega \cdot |d\Omega|^{-\frac{1}{c+1}}$$

liefert die Lösung in der Form

$$\theta = |d\Omega|^{\frac{c}{c+1}} \varrho(dv)$$

($\varrho(x) \stackrel{\text{df}}{=} f(0, 1, 0, x)$ ist beliebig wählbar)

Der Fall II. B. 1. b_2 .

Jetzt haben wir die Funktionalgleichung

$$(2. 17) \quad |\alpha|^{-1} \theta = f(0, \operatorname{sgn} \alpha \cdot d\Omega, 0, dv).$$

Die Anwendung der **K**-Transformation

$$\mathbf{T}_8 \quad \alpha = \operatorname{sgn} d\Omega$$

zeigt, daß θ nur von den *Skalaren* $|d\Omega|$ und dv abhängen kann, also besitzt (2. 17) die Gestalt

$$|\alpha|^{-1} \theta = f(0, |d\Omega|, 0, dv) = \theta,$$

woraus

$$\theta = 0$$

folgt.

Der Fall II. B. 2. a.

Die Komitante θ hängt nur von dem Skalar dv ab

$$\theta = f(0, 0, 0, dv),$$

wo f die Funktionagleichung

$$(2. 18) \quad \varepsilon |\alpha|^c \theta = f(0, 0, 0, dv)$$

erfüllt, also befriedigt θ die Gleichung

$$\varepsilon |\alpha|^c \theta = \theta.$$

Im vorliegenden Fall

$$c^2 + (\varepsilon - 1)^2 \neq 0$$

können wir mit Hilfe einer der **K**-Transformationen

$$\mathbf{T}_9 \quad \alpha = -1,$$

$$\mathbf{T}_{10} \quad \alpha = 2$$

erreichen, daß der Faktor $\varepsilon|\alpha|^c$ verschieden von Eins ist, und somit θ wieder verschwinden muß:

$$\theta = 0.$$

Der Fall II. B. 2. b.

Die Relation (2. 18) geht in die Gleichung

$$\theta = \tau(dv)$$

($\tau(x) \stackrel{\text{df}}{=} f(0, 0, 0, x)$) über, die zugleich bei *beliebiger* Funktion $\tau(x)$ im Falle II. B. 2. b. sämtliche Lösungen der „Funktionalgleichung“ (2. 18) angibt.

Wir erhielten also den folgenden

Satz 1. Ist Ω ein in einem Gebiet G des eindimensionalen Raumes X_1 erklärtes homogenes lineares geometrisches Objekt mit einer einzigen Komponente Ω

$$(2. 7) \quad \bar{\Omega} = \varepsilon|\alpha|^c \cdot \Omega,$$

($\alpha \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d\psi}{d\xi}$, s. (2. 1); $\varepsilon = 1$, oder $\text{sgn } \alpha$; c ist eine Konstante), so muß eine der folgenden Darstellungen für die Differentialkomitante θ von Ω in bezug auf das kontravariante Vektorfeld v gelten (vgl. Figur 1.):

$$\theta = \begin{cases} \varepsilon_1 |v|^{-c} \kappa[\varepsilon_1 |v|^c \Omega, \varepsilon_1 |v|^c (v d\Omega + c\Omega dv)] & (\text{im Falle I.}), \\ \varepsilon_2 |\Omega| \lambda(\varepsilon_2 \text{sgn } \Omega, dv) & (\text{im Falle II. A. 1.}), \\ \varepsilon_2 \mu(\varepsilon_2 \Omega, \varepsilon_3, dv) & (\text{im Falle II. A. 2. a.}), \\ \varepsilon_2 v(\varepsilon_2 \Omega, dv) & (\text{im Falle II. A. 2. b.}), \\ 0 & (\text{im Falle II. B. 1. a.}), \\ |d\Omega|^{\frac{c}{c+1}} \varrho(dv) & (\text{im Falle II. B. 1. b}_1.), \\ 0 & (\text{im Falle II. B. 1. b}_2.), \\ 0 & (\text{im Falle II. B. 2. a.}), \\ \tau(dv) & (\text{im Falle II. B. 2. b.}), \end{cases}$$

wo die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ durch

$$\varepsilon_1 \begin{cases} = 1, & \text{wenn } \varepsilon = 1 \text{ gilt,} \\ = \text{sgn } v, & \text{wenn } \varepsilon = \text{sgn } \alpha \text{ gilt;} \end{cases} \quad \varepsilon_2 \begin{cases} = 1, & \text{wenn } \varepsilon = 1 \text{ erfüllt,} \\ = \text{sgn } \Omega, & \text{wenn } \varepsilon = \text{sgn } \alpha \text{ ist,} \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 \begin{cases} = -1, & \text{wenn } \varepsilon = 1, \\ = \text{sgn } d\Omega, & \text{wenn } \varepsilon = \text{sgn } \alpha; \end{cases}$$

erklärt sind, die Funktionen $\kappa(x, y)$, $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y, z)$, $v(x, y)$, $\varrho(x)$, $\tau(x)$ kann man nach Belieben wählen.

§ 3. Differentialkomitanten des Skalarfeldes

In dem § 2. haben wir gesehen, daß man bei der Auflösung der Funktionalgleichung (4) Unterfälle unterscheiden soll, je nachdem zu welchem der Transitivitätsbereiche von Ω und $\{v^k\}$ die in dem betrachteten Punkt Π von G genommenen Werte $\{\Omega_A\}$, $\{v^k\}$ gehören. Diese Zuordnung hängt bei gegebenen Objektfelder Ω , $\{v^k\}$ allein von der Wahl des betrachteten Punktes Π von G ab. Das Gebiet G zerfällt dementsprechend in gewisse Untermengen $G_1, G_2, \dots, G_\alpha, \dots$:

$$(3.1) \quad G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}.$$

(Die Punkte Π_1, Π_2 von G gehören dann und nur dann zu derselben Untermenge G_{α} von G , wenn sowohl die Systeme $\{\Omega_A(\Pi_1)\}$ und $\{\Omega_A(\Pi_2)\}$ der Objektwerte von Ω zu demselben Transitivitätsbereich von Ω als auch die Systeme $\{v^k(\Pi_1)\}$ und $\{v^k(\Pi_2)\}$ der Objektwerte von $\{v^k\}$ zu demselben Transitivitätsbereich von $\{v^k\}$ gehören. Die Untermengen G_{α} haben offensichtlich einen invarianten — vom Koordinatensystem unabhängigen — Charakter.)

In jeder der Untermengen $G_1, G_2, \dots, G_{\alpha}, \dots$ soll die Lösung der Gleichung (4) (d. h. es sollen die Differentialkomitanten θ des Objektes Ω bezüglich $\{v^k\}$) wegen der Definitionen 2. und 3. eine feste Gestalt haben.

Um diese Tatsache zu beleuchten, werden wir in diesem Paragraph die Differentialkomitanten

$$\theta = \{\theta\}$$

eines Skalarfeldes

$$\theta = \{\omega\}$$

in bezug auf das Vektorfeld $\{v^k\}$ bestimmen, so daß wir auch die Zerlegung (3. 1) von G ins Auge fassen werden.

Die Differentialkomitante θ soll nach unseren Voraussetzungen 2^o, 3^o von $\omega, \partial_j \omega, v^k, \partial_i v^k$ abhängen

$$\theta = f(\omega; \partial_j \omega; v^k; \partial_i v^k).$$

Für die gesuchte Funktion f erhalten wir nach (4) die Funktionalgleichung

$$(3.2) \quad f(\omega; \partial_j \omega; v^k; \partial_i v^k) = f(\bar{\omega}; \bar{\partial}_j \omega; \bar{v}^k; \bar{\partial}_i v^k),$$

wo

$$(3.3) \quad \bar{\omega} = \omega, \quad \bar{\partial}_j \omega = A_j^a \partial_a \omega,$$

und

$$(3.4) \quad \bar{v}^k = \bar{A}_a^k v^a, \quad \bar{\partial}_i v^k = A_i^a \bar{A}_b^k \partial_a v^b - A_{id}^c \bar{A}_c^k \bar{A}_e^d v^e$$

$$\left(\bar{A}_a^k \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial v^k}{\partial \xi^a}, \quad A_{id}^c \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^2 \psi^c}{\partial \xi^i \partial \xi^d}, \quad A_{id}^c = A_{di}^c \right)$$

gelten. Die Gleichung (3. 2) geht wegen den Relationen (3. 3) und (3. 4) in die Funktionalgleichung

$$(3.5) \quad f(\omega; \partial_j \omega; v^k; \partial_i v^k) = f(\omega; A_j^a \partial_a \omega; \bar{A}_a^k v^a; A_i^a \bar{A}_b^k \partial_a v^b - A_{id}^c \bar{A}_c^k \bar{A}_e^d v^e)$$

über, die für die gesuchte Funktion f (von $q = 1 + n + n + n^2 = (n+1)^2$ unabhängigen Veränderlichen) bei fixen Werten $\omega, \partial_j \omega, v^k, \partial_i v^k$ für alle Werte A_j^i mit der Eigenschaft

$$A \stackrel{\text{df}}{=} \det(A_j^i) \neq 0$$

und für alle $A_{id}^c = A_{di}^c$ erfüllt sein soll.²⁾

Für die zwei Felder ω und $\{v^k\}$ bilden wir zwei Mengen

$$(3.6) \quad \begin{cases} G_I = \{\Pi: \Pi \in G \text{ und } \{\partial_j \omega(\Pi)\} = \{0\}\}, \\ G_{II} = \{\Pi: \Pi \in G \text{ und } \{v^k(\Pi)\} = \{0\}\}. \end{cases}$$

Mit Hilfe von G, G_I, G_{II} bilden wir die vier Mengen G_α ($\alpha = 1, \dots, 4$) wie folgt;

$$(3.7) \quad \begin{cases} G_1 = G_I \cap G_{II}, \\ G_2 = G_I - G_{II}, \\ G_3 = G_{II} - G_I, \\ G_4 = G - (G_I \cup G_{II}), \end{cases}$$

wodurch das ganze G in teilfremde Bestandteile

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

zerlegt wird (manche dieser Bestandteile können natürlich leer sein).

Wir führen weiter die folgenden kurzen Bezeichnungen ein

$$(3.8) \quad \begin{cases} f_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} f(x; 0; 0; 0; 0), \\ f_2(x; y^k) \stackrel{\text{df}}{=} f(x; 0; y^k; 0), \\ f_3(x; z_j) \stackrel{\text{df}}{=} f(x; z_j; 0; 0), \\ f_4(x; z_j; y^k) \stackrel{\text{df}}{=} f(x; z_j; y^k; 0). \end{cases}$$

1. Setzen wir voraus, daß

$$\Pi \in G - G_{II}$$

gilt. Es ist dann

$$(5) \quad \{v^k\} \neq \{0\}$$

und wie bekannt, existiert ein solches Koordinatensystem K_0 , in welchem

$$(6) \quad v^k \neq 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

ist. Wir verwenden dann in der Gleichung (3.5) die K_0 -Transformation

$$T_{1,1} \quad A_j^i = \delta_j^i, \quad A_{id}^c = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq d, \\ -\frac{\partial_i v^c}{v^i}, & \text{wenn } i = d. \end{cases}$$

²⁾ Die Werte $\bar{A}_j^i$ kann man mit Hilfe der Relationen

$$A_j^i \bar{A}_k^j = \delta_k^i, \quad \det(A_j^i) \neq 0$$

aus den Werten A_j^i eindeutig bestimmen.

(Die Symmetriebedingung $A_{id}^c = A_{di}^c$ ist auf diese Weise erfüllt.) Wir erhalten danach

$$f(\omega; \partial_j \omega; v^k; \partial_i v^k) = f(\omega; \partial_j \omega; v^k; 0),$$

woraus zu ersehen ist, daß die Funktion f von den letzten n^2 Variablen nicht abhängt, also

$$f(\omega; \partial_j \omega; v^k; \partial_i v^k) = f_4(\omega; \partial_j \omega; v^k)$$

ist.

Für festes ω ist also f eine (algebraische) Komitante der Vektoren $\{\partial_j \omega\}$ und $\{v^k\}$ und nach einem Satz von KUCHARZEWSKI (unser Satz III.) ist sie folglich eine Funktion des Skalars

$$(3.9) \quad \sigma \stackrel{\text{def}}{=} v^a \partial_a \omega,$$

d. h.

$$\vartheta = F(\sigma).$$

Da aber $\{\partial_j \omega\}$ und $\{v^k\}$ Vektorfelder darstellen, so gilt folgendes:

$$F(\sigma) = \begin{cases} F_1(\sigma), & \text{wenn } \{\partial_j \omega\} \neq \{0\}, \quad \{v^k\} \neq \{0\}, \\ C_2, & \text{wenn } \{\partial_j \omega\} \neq \{0\}, \quad \{v^k\} = \{0\}, \\ C_1, & \text{wenn } \{\partial_j \omega\} = \{0\}, \quad \{v^k\} \neq \{0\}, \\ C_3, & \text{wenn } \{\partial_j \omega\} = \{0\}, \quad \{v^k\} = \{0\}. \end{cases}$$

Im betrachteten Falle ist aber $\{v^k\} \neq \{0\}$, es bleibt also

$$F(\sigma) = \begin{cases} F_1(\sigma), & \text{wenn } \Pi \in G_4, \\ C_2, & \text{wenn } \Pi \in G_2. \end{cases}$$

Dies gilt bei festem ω . Folglich müssen wir bei veränderlichem ω F_1 und C_2 entsprechend durch Funktionen von ω ersetzen:

$$\vartheta = \begin{cases} F_1(\omega, \sigma), & \text{wenn } \Pi \in G_4, \\ F_2(\omega), & \text{wenn } \Pi \in G_2. \end{cases}$$

2. Setzen wir jetzt voraus, daß

$$\Pi \in G_{II}$$

gilt. Dann haben wir $\{v^k\} = \{0\}$. Ist $G_1 + G_3$ ein n -dimensionales Bereich, so haben wir gleichzeitig

$$\partial_i v^k = 0 \quad \text{für } \Pi \in G_1 + G_3$$

und dann ist

$$\vartheta = f_3(\omega; \partial_j \omega).$$

ϑ ist also eine skalare Differentialkomitante erster Ordnung des Feldes ω und auf Grund unseres Satzes III. haben wir das Ergebnis

$$\vartheta = \begin{cases} F_3(\omega), & \text{wenn } \Pi \in G_3, \\ F_4(\omega), & \text{wenn } \Pi \in G_1. \end{cases}$$

Es kann aber vorkommen, daß der Bereich $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3$ von niedrigerer Dimension als n ist und dann aus $v^k = 0$ die Relation

$$\partial_i v^k = 0$$

nicht gefolgert werden kann.

Jedenfalls stellen wir fest, daß für $\mathbf{G} \in \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3$ die Ausdrücke $\partial_i v^k$ einen gemischten Tensor $\{T_i^k\}$ bilden und folglich ist

$$\vartheta = f(\omega; \partial_j \omega; T_i^k)$$

bei festem ω eine algebraische skalare Komitante des Vektors $\{\partial_j \omega\}$ und des Tensors $\{T_i^k\}$. Das vollständige System der unabhängigen algebraischen skalaren Komitanten des Tensors $\{T_i^k\}$ ist aber

$$\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}; \tau_1, \dots, \tau_t, \quad (t \leq n)$$

(s. § 1. 2) und so bekommen wir zum Schluß, daß ϑ die Form

$$\vartheta = F_5(\omega; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}; \tau_1, \dots, \tau_t, \tau_{t+1}, \dots, \tau_n)$$

haben muß.

Zusammenfassend können wir also den folgenden Satz aussprechen, wenn wir noch die Spaltung der Menge $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$ wie folgt vornehmen

$$(\mathbf{G}_{II}) \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}'_1 + \mathbf{G}''_1 + \mathbf{G}'_3 + \mathbf{G}''_3,$$

wo $\mathbf{G}'_1 + \mathbf{G}'_3$ von Dimension n , während $\mathbf{G}''_1 + \mathbf{G}''_3$ von niedrigerer Dimension ist.

Satz 2. Ist ϑ eine Differentialkomitante des Skalarfeldes ω in bezug auf das kontravariante Vektorfeld $\{v^k\}$, so gilt bei der Bezeichnung (3. 9):

Es existieren drei Funktionen F_2, F_3, F_4 einer Veränderlichen, eine Funktion F_1 von zwei Veränderlichen und eine Funktion F_5 von höchstens $2n+1$ Veränderlichen, so daß

$$(3.10) \quad \vartheta = \begin{cases} F_1(\omega, \sigma), & \text{wenn } \Pi \in \mathbf{G}_4, \\ F_2(\omega), & \text{wenn } \Pi \in \mathbf{G}_2, \\ F_3(\omega), & \text{wenn } \Pi \in \mathbf{G}'_3, \\ F_4(\omega), & \text{wenn } \Pi \in \mathbf{G}'_1, \\ F_5(\omega; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}; \tau_1, \dots, \tau_t), & \text{wenn } \Pi \in \mathbf{G}''_1 + \mathbf{G}''_3, \end{cases}$$

gilt, wo σ durch (3. 9) erklärt ist und $\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}; \tau_1, \dots, \tau_t$ das vollständige System der unabhängigen algebraischen skalaren Komitanten des Tensors

$$\{T_i^k(\Pi)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\partial_i v^k(\Pi)\} \quad (\Pi \in \mathbf{G}_{II})$$

bilden.

Umgekehrt, wenn $\mathbf{G}$ in die elementenfremde Bestandteile

$$\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_4, \mathbf{G}'_1, \mathbf{G}'_3, \mathbf{G}''_1, \mathbf{G}''_3$$

so zerlegt wird, daß $\mathbf{G}'_1 + \mathbf{G}'_3$ ein n -dimensionaler Bereich ist, während $\mathbf{G}''_1 + \mathbf{G}''_3$

von niedrigerer Dimension ist und wenn wir in G die Felder ω und $\{v^k\}$ so definieren, daß

$$\begin{aligned}\{\partial_j \omega\} &= \{0\} & \text{in } G'_1 + G''_1 + G_2, \\ \{v^k\} &= \{0\} & \text{in } G'_1 + G''_1 + G'_3 + G''_3, \\ \{v^k\} &\neq \{0\} & \text{in } G_2 + G_4, \\ \{\partial_j \omega\} &\neq \{0\} & \text{in } G'_3 + G''_3 + G_4\end{aligned}$$

ist, und für F_i ($i=1, \dots, 5$) beliebige Funktionen nehmen, so stellt (3.10) eine Differentialkomitante des Skalarfeldes ω in bezug auf das kontravariante Vektorfeld $\{v^k\}$ in G dar.

§ 4. Die Differentialkomitanten der Vektoren

Wir setzen unsere Untersuchungen mit der Bestimmung der Differentialkomitanten eines kovarianten Vektorfeldes

$$(4.1) \quad \{u_i\},$$

bzw. eines kontravarianten Vektorfeldes

$$(4.2) \quad \{u^i\}$$

fort. Es sei die die Voraussetzungen $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ der Definition 3. befriedigende Komitante des Feldes (4.1), bzw. (4.2) durch

$$\{w_{ij}\},$$

bzw.

$$\{w^i\}$$

bezeichnet. Diese Größen sollen von den Vektoren

$$\{u_i\}, \{v^i\},$$

bzw.

$$\{u^i\}, \{v^i\}$$

und von ihnen partiellen Ableitungen erster Ordnung abhängen:

$$w_q = f_q(u_g; \partial_f u_g; v^k; \partial_i v^k), \quad (q=1, \dots, n)$$

bzw.

$$w^q = f^q(u^g; \partial_f u^g; v^k; \partial_i v^k), \quad (q=1, \dots, n)$$

wo die Funktionen f_q, f^q nach (4) die Lösungen der Funktionalgleichungssysteme

$$A_p^q f_p(u_g; \partial_f u_g; v^k; \partial_i v^k) = f^q(\bar{u}_g; \bar{\partial}_f \bar{u}_g; \bar{v}^k; \bar{\partial}_i \bar{v}^k),$$

bzw.

$$\bar{A}_q^p f^p(u^g; \partial_f u^g; v^k; \partial_i v^k) = f^q(\bar{u}^g; \bar{\partial}_f \bar{u}^g; \bar{v}^k; \bar{\partial}_i \bar{v}^k)$$

sind.

Man kann diese Gleichungen infolge der Relationen (3.4) und

$$\bar{u}_g = A_g^a u_a, \quad \bar{\partial}_f \bar{u}_g = A_f^b A_g^c \partial_b u_c + A_{fg}^d u_d$$

in der folgenden ausführlichen Gestalt

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & A_q^p f_p(u_g; \partial_f u_g; v^k; \partial_i v^k) = \\ & = f_q(A_g^a u_a; A_f^b A_g^c \partial_b u_c + A_{fg}^d u_d; \bar{A}_a^k v^a; A_i^a \bar{A}_b^k \partial_a v^b - A_{id}^c \bar{A}_c^k \bar{A}_e^d v^e), \end{aligned}$$

bzw.

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & \bar{A}_p^q f^p(u^g; \partial_f u^g; v^k; \partial_i v^k) = \\ & = f^q(\bar{A}_a^g u^a; A_f^a \bar{A}_b^g \partial_a u^b - A_{fc}^d \bar{A}_d^g \bar{A}_e^c u^e; \bar{A}_a^k v^a; A_i^a \bar{A}_b^k \partial_a v^b - A_{id}^c \bar{A}_c^k \bar{A}_e^d v^e) \end{aligned}$$

angeben.

Ist $n=1$, so wird $\{u_i\}$, bzw. $\{u^i\}$ ein homogenes lineares Objekt (mit einer Komponente) und mit der Transformationsformel

$$(4.5) \quad \bar{u} = \alpha u,$$

bzw.

$$(4.6) \quad \bar{u} = \alpha^{-1} u,$$

sein, und man kann auf Grund der Ergebnisse des Satzes 1 die Lösungen der Gleichungen (4.3), bzw. (4.4) angeben.

Bestimmung der Funktionen f_q

Wir suchen erstens die Lösung des Funktionalgleichungssystems (4.3), daß im Falle $n=1$ eine einzige Gleichung

$$(4.7) \quad \alpha f(u, du, v, dv) = f(\alpha u, \alpha^2 du + \beta u, \alpha^{-1} v, dv - \beta \alpha^{-2} v) \\ \left(u \stackrel{\text{df}}{=} u_1, \quad du \stackrel{\text{df}}{=} \frac{du}{d\xi}, \quad v \stackrel{\text{df}}{=} v^1, \quad dv \stackrel{\text{df}}{=} \frac{dv}{d\xi}; \quad \alpha \stackrel{\text{df}}{=} A_1^1, \quad \beta \stackrel{\text{df}}{=} A_{11}^1 \right)$$

darstellt.

Die Gleichung (4.7) ist ein Spezialfall der Gleichung (2.11). In der Tat, setzen wir

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha, \quad c = 1$$

in die Gleichung (2.11) ein, so geht (2.11) in (4.7) über.

Bei $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha$, $c=1$ erhalten wir sämtliche Lösungen der Funktionalgleichung (4.7) für die Unterfälle I., II. A. 1., II. B. 1. a., II. B. 2. a. Es gilt also

$$f(u, du, v, dv) = \begin{cases} v^{-1} g_1[uv, v(vdu + u dv)] & \text{für } v \neq 0, \\ u g_2(dv) & \text{für } v = 0, \end{cases}$$

wo die Funktionen $g_1(x, y)$, $g_2(x)$ beliebig sind.

Der Fall $n > 1$.

Wir werden zunächst die Lösungen der Gleichung (4.3) unter der Voraussetzung

$$(6) \quad v^k \neq 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

bestimmen. Setzen wir voraus, daß auch der Vektor $\{u_i\}$ vom Nullvektor verschieden ist:

$$\{u_i\} \neq \{0\}.$$

Es gibt also eine Komponente u_r ($1 \leq r \leq n$) des Vektors $\{u_i\}$, die im Koordinatensystem $\mathbf{K}_0$ mit der Eigenschaft (6) von Null verschieden ist. Die $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{1,2} \quad A_g^a = \delta_g^a; \quad A_{fg}^d = -\delta_r^d \frac{\partial (f u_g)}{u_r} \quad (\text{über } r \text{ nicht summieren!})$$

ist wegen $A_{fg}^d = A_{fg}^d$ anwendbar, dadurch erhalten wir für w_q aus (4.3) die Formeln:

$$(4.8) \quad w_q = f_q[u_g; \partial_{[f} u_{g]}; v^k; u_r^{-1} (u_r \partial_i v^k + \delta_r^k v^d \partial_{(d} u_{i)})]. \quad (\text{n. s. über } r)$$

Die in (4.8) vorkommenden Ausdrücke

$$D_i^k \stackrel{\text{df}}{=} u_r \partial_i v^k + \delta_r^k v^d \partial_{(d} u_{i)}$$

gehen mit Hilfe der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{1,3} \quad A_j^i = \delta_j^i, \quad A_{is}^k \begin{cases} = 0, & \text{wenn } k=r \\ = \delta_{is} \frac{\partial_i v^k}{v^i}, & \text{wenn } k \neq r \end{cases} \quad (\text{n. s. über } i)$$

in die Ausdrücke

$$\bar{D}_i^k = \delta_r^k L_i \quad (L_i \stackrel{\text{df}}{=} u_j \partial_i v^j + v^j \partial_{(j} u_{i)})$$

über.

Wir bemerken, daß die Ausdrücke L_i ($i=1, \dots, n$) einen kovarianten Vektor bilden. Das folgt aus den Transformationsformeln der Ableitungen $\partial_i v^j$ und $\partial_i u_j$.

Setzen wir (4.8) in (4.3) ein und führen wir die $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{1,3}$ durch, so erhalten wir die Beziehung

$$(4.9) \quad w_q = g_q(g_q; \partial_{[f} u_{g]}; v^k; L_i), \\ (g_q(u_g; \partial_{[f} u_{g]}; v^k; L_i) \stackrel{\text{df}}{=} f_q(u_g; \partial_{[f} u_{g]}; v^k; u_r^{-1} \delta_r^k L_i), \quad \text{n. s. über } r)$$

wobei $\partial_{[f} u_{g]}$ ein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist.

Wenden wir nun die $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{1,1} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & v^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & v^2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & v^{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v^{r+1} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v^n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{A} \stackrel{\text{df}}{=} (A_j^i); \quad \bar{\mathbf{A}} \stackrel{\text{df}}{=} (\bar{A}_j^i), \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1})$$

auf die Gestalt (4.9) von w_q an.

Um die Transformation der Größen

$$\{u_g\}, \{\partial_{[f}u_g]\}, \{v^k\}, \{L_i\}, \{w_q\}$$

zu berechnen, berücksichtigen wir, daß ein Tensor $\{T::\}$ sich bei einer Transformation (1):

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial \xi^k} \right), \quad \bar{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^k} \right)$$

nach einen kontravarianten Index als ein Spaltenvektor (die Transformationsmatrix ist $\mathbf{A}$), nach einen kovarianten Index als ein Zeilenvektor (die Transformationsmatrix ist $\bar{\mathbf{A}}$) transformiert. Z. B. können wir die Transformation der Objekte $\{u_g\}$, $\{\partial_{[f}u_g]\}$, $\{v^k\}$ nach dem Schema

$$\{\bar{u}_g\} = \{u_g\} \cdot \mathbf{A}, \quad \{\bar{\partial}_{[f}u_g]\} = \mathbf{A}^T \cdot \{\partial_{[f}u_g]\} \cdot \mathbf{A}, \quad \{\bar{v}^k\} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \{v^k\}$$

ausrechnen, wo $\mathbf{A}^T$, bzw. $\bar{\mathbf{A}}$ die transponierte, bzw. die inverse Matrix von $\mathbf{A}$ bezeichnet.

Ein solches Verfahren ergibt bei $\mathbf{T}_{11}$ die Relationen

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \bar{u}_g &= u_g \quad (g \neq r), & \bar{u}_r &= \sigma_1; \\ \bar{\partial}_{[f}u_g] &\begin{cases} = \partial_{[f}u_g] & (f, g \neq r), \\ = S_g & (f=r, g \neq r), \\ = -S_f & (f \neq r, g=r), \\ = 0 & (f=g=r); \end{cases} \\ \bar{v}^k &= \delta_r^k \quad (k=1, \dots, n); \\ \bar{L}_i &= L_i \quad (i \neq r), & L_r &= \sigma_2; \\ \bar{w}_q &= w_q \quad (q \neq r), & \bar{w}_r &= v^a w_a. \\ (\sigma_1 &\stackrel{\text{df}}{=} v^a u_a, & \sigma_2 &\stackrel{\text{df}}{=} v^a L_a, & S_g &\stackrel{\text{df}}{=} v^a \partial_{[a}u_{g]}) \end{aligned}$$

Setzen wir vorläufig voraus, daß σ_1 von Null verschieden ist.

Ist $q \neq r$, so folgt nach $\mathbf{T}_{11}$ die Beziehung

$$(4.11) \quad w_q = g_q(u_1, \dots, u_{r-1}, \sigma_1, u_{r+1}, \dots, u_n);$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \partial_{[2}u_{1]} & \dots & S_1^{(r)} & \dots & \partial_{[n}u_{1]} \\ \partial_{[1}u_{2]} & 0 & \dots & S_2 & \dots & \partial_{[n}u_{2]} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ -S_1 & -S_2 & \dots & 0 & \dots & -S_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{[1}u_n] & \partial_{[2}u_n] & \dots & S_n & \dots & 0 \end{bmatrix} (r); 0, \dots, 0, \overset{(r)}{1}, 0, \dots, 0;$$

$$L_1, \dots, L_{r-1}, \sigma_2, L_{r+1}, \dots, L_n, \quad (q \neq r)$$

woraus wir nach der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{12} \quad A_j^i = q^i \delta_j^i \quad (q^i \neq 0, i \neq q), \quad A_j^q = \delta_j^q \quad (\text{n. s. über } i)$$

mit Hilfe des Grenzübergangs

$$\varrho^i \rightarrow 0 \quad (i \neq q)$$

die Beziehungen

$$(4.12) \quad w_q = h_q(\sigma_1, \sigma_2, u_q, S_q, L_q) \quad (q \neq r)$$

$$\left(h_q(\sigma_1, \sigma_2, x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} g_q(0, \dots, 0, \overset{(q)}{x}, 0, \dots, 0, \overset{(r)}{\sigma_1}, \right.$$

$$0, \dots, 0; \left[\begin{array}{cccccc} \vdots & & & & & \\ & & & & 0 & \\ & & & \dots & 0 & y & 0 & \dots & (q) \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ \dots & 0 & -y & 0 & \dots & 0 & \dots & & (r); 0, \dots, 0, \overset{(r)}{1}, 0, \dots, 0; \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & \vdots & & & \end{array} \right]$$

$$0, \dots, 0, \overset{(q)}{z}, 0, \dots, 0, \overset{(r)}{\sigma_2}, 0, \dots, 0) \Bigg)$$

gewinnen können.

Wir beweisen, daß eine der Relation (4.12) ähnliche Relation auch für die w_r -Komponente gültig ist. Der Beweis weicht von dem vorhergehenden nur bei der K_0 -Transformation T_{11} ab. Die K_0 -Transformation T_{11} soll man in diesem Fall durch die Transformation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \overset{(s)}{v^1} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & v^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v^s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v^n & \dots & 1 \end{pmatrix} (s);$$

$$T'_{11} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\frac{v^1}{v^s} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\frac{v^{s-1}}{v^s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{v^s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{v^{s+1}}{v^s} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{v^n}{v^s} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (s \neq r)$$

ersetzen. Statt (4. 10) haben wir die folgenden Transformationsformeln

$$\begin{aligned}\bar{u}_g &= u_g \quad (g \neq s), & \bar{u}_s &= \sigma_1; \\ \overline{\partial_{[f]u_g}} &\begin{cases} = \partial_{[f]u_g} & (f, g \neq s), \\ = S_g & (f = s, g \neq s), \\ = -S_f & (f \neq s, g = s), \\ = 0 & (f = g = s); \end{cases} \\ \bar{v}^k &= \delta_s^k & (k = 1, \dots, n); \\ \bar{L}_i &= L_i \quad (i \neq s), & \bar{L}_s &= \sigma_2; \\ \bar{w}_q &= w_q \quad (q \neq s), & \bar{w}_s &= v^a w'_a,\end{aligned}$$

also geht die für die w_r -Komponente erhaltene Beziehung (4. 9) nach Durchführung von $\mathbf{T}'_{11}$ in die Relation

$$w_r = g_r \left(u_1, \dots, u_{s-1}, \sigma_1, u_{s+1}, \dots, u_n; \begin{bmatrix} 0 & \partial_{[2]u_1} & \dots & \overset{(s)}{S_1} & \dots & \partial_{[n]u_1} \\ \partial_{[1]u_2} & 0 & \dots & S_2 & \dots & \partial_{[n]u_2} \\ -\dot{S}_1 & -\dot{S}_2 & \dots & \dot{0} & \dots & -\dot{S}_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{[1]u_n} & \partial_{[2]u_n} & \dots & S_n & \dots & 0 \end{bmatrix} (s); \right. \\ \left. 0, \dots, 0, \overset{(s)}{1}, 0, \dots, 0; L_1, \dots, L_{s-1}, \sigma_2, L_{s+1}, \dots, L_n \right)$$

über.

Das Verwenden der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}'_{12} \quad A_j^i = \varrho^i \delta_j^i \quad (\varrho^i \neq 0, i \neq r), \quad A_j^r = \delta_j^r \quad (\text{n. s. über } i)$$

und des Grenzübergangs

$$\varrho^i \rightarrow 0 \quad (i \neq r)$$

zeigt, daß die w_r -Komponente nur von den Skalaren σ_1, σ_2 und den Vektorkomponenten u_r, S_r, L_r abhängen kann:

$$(4. 13) \quad w_r = h_r(\sigma_1, \sigma_2, u_r, S_r, L_r).$$

Auf Grund von (4. 12) und (4. 13) können wir also für alle q einheitlich

$$(4. 13') \quad w_q = h_q(\sigma_1, \sigma_2, u_q, S_q, L_q)$$

schreiben.

Gemäß unseres Satzes II. haben die w -Komponenten aus (4. 13') die Gestalt

$$w_q = \Gamma_1 u_q + \Gamma_2 v^a \partial_{[a]u_q} + \Gamma_3 L_q,$$

die sich in die Form

$$(4. 14) \quad w_q = \gamma_1 u_q + \gamma_2 v^a \partial_{[a]u_q} + \Gamma_3 \mathfrak{L}_v u_q$$

$$(\mathfrak{L}_v u_q = v^a \partial_a u_q + u_a \partial_q v^a; \quad \gamma_1 = \Gamma_1, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 - \Gamma_3, \quad \gamma_3 = \Gamma_3)$$

umgestalten läßt. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bedeuten hier beliebige Skalarkoeffizienten, welche stetige Funktionen von σ_1, σ_2 sind. Die drei Vektorfelder $\{u_q\}, \{v^a \partial_{[a} u_{q]}\}, \{\mathcal{L}_v u_q\}$ können aber linear abhängig sein. In diesem Falle treten noch zusätzlich weitere Skalarfelder auf, z. B. λ, μ , wenn die lineare Abhängigkeit in der Form

$$\mathcal{L}_v u_q = \lambda u_q + \mu v^a \partial_{[a} u_{q]}$$

besteht.

Nach unserer Annahme der Stetigkeit des w_q in seinen Argumenten $u_i, \partial_j u_i, v^k, \partial_i v^k$ können wir feststellen, daß die Relation (4.14) nach Grenzübergang $\sigma_1 \rightarrow 0, u_r \rightarrow 0$, bzw. $\{v^i\} \rightarrow \{0\}$ auch in den ausgeschlossenen Fällen $\sigma_1 = 0, u_r = 0$, bzw. $\{v^i\} = \{0\}$ gültig ist.

Bestimmung der Funktionen f^q

Im Falle $n=1$ hat (4.4) die Gestalt

$$(4.15) \quad \alpha^{-1} f(u, du, v, dv) = f(\alpha^{-1} u, du - \beta \alpha^{-2} u, \alpha^{-1} v, dv - \beta \alpha^{-2} v), \\ \left(u \stackrel{\text{df}}{=} u^1, \quad du \stackrel{\text{df}}{=} \frac{du}{d\xi}, \quad v \stackrel{\text{df}}{=} v^1, \quad dv \stackrel{\text{df}}{=} \frac{dv}{d\xi}; \quad \alpha \stackrel{\text{df}}{=} A_1^1, \quad \beta \stackrel{\text{df}}{=} A_{11}^1 \right)$$

Wir betrachten wieder die Gleichung (2.11), und wir setzen hier

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha, \quad c = -1$$

ein. Dieser Spezialfall von (2.11) stimmt mit der Gleichung (4.15) überein. Die Lösungen der Gleichung (4.15) gewinnen wir also nach dem Satz 1. in der Form

$$f = \begin{cases} v G_1[v^{-1} u, v^{-1}(v du - u dv)] & \text{falls } v \neq 0 \text{ (s. den Fall I.)}, \\ u G_2(dv) & \text{falls } v = 0 \text{ (s. die Fälle II. A. 1., II. B. 1. a., II. B. 2. a.)}, \end{cases}$$

wo die Funktionen $G_1(x, y), G_2(x)$ beliebig wählbar sind.

Im allgemeinen Fall $n > 1$ werden wir nur die Stetigkeit der Funktionen f^q in den Argumenten $v^1, \dots, v^n$ voraussetzen.

Falls

$$(5) \quad \{v^i\} \neq \{0\},$$

so werden wir die Gleichung (4.4) in einem Koordinatensystem K_0 betrachten, in dem die Relationen (6) gültig sind.

Es seien die Veränderlichen $A_j^i, A_{f^e}^g$ in (4.4) gemäß $T_{1,1}$ gewählt; dann gewinnen wir aus (4.4) die Relationen

$$(4.16) \quad w^q = g^q(u^g; (v^f)^{-1} [v^f \partial_f u^g - u^f \partial_f v^g]; v^k) \quad (q = 1, \dots, n)$$

$$(n. s. \text{ über } f; g^q(x^g; y_f^g; z^k) \stackrel{\text{df}}{=} f^q(x^g; y_f^g; z^k; 0, \dots, 0)).$$

Die an rechter Seite von (4.16) vorkommenden Ausdrücke

$$(4.17) \quad v^f \partial_f u^g - u^f \partial_f v^g \quad (n. s. \text{ auf } f)$$

werden sich bei der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{1,0} \quad A_j^i = \delta_j^i; \quad A_{jk}^i = A_{kj}^i \quad \text{beliebig}$$

nach

$$(4.18) \quad \bar{v}^f \bar{\partial}_f u^g - \bar{u}^f \bar{\partial}_f v^g = v^f \partial_f u^g - u^f \partial_f v^g - A_{fe}^g \cdot d^{ef} \\ (\text{n. s. über } f; d^{ef} \stackrel{\text{df}}{=} u^e v^f - u^f v^e; e, f = 1, \dots, n)$$

transformieren.

Im Falle

a) $d^{e1} \neq 0$ ($e = 2, \dots, n$) nehmen wir die $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{1,4} \quad A_j^i = \delta_j^i; \quad A_{ff}^g \text{ beliebig (n. s. auf } f; f, g = 1, \dots, n), \\ A_{1e}^g = A_{e1}^g = -(d^{e1})^{-1} (v^e \partial_e u^g - u^e \partial_e v^g), \\ (\text{n. s. über } e; g = 1, \dots, n; e = 2, \dots, n) \\ A_{eh}^g = 0 \quad (e, h = 2, \dots, n).$$

Die für die Ausdrücke (4.17) gültigen Relationen (4.18) werden sich bei Durchführung von $\mathbf{T}_{1,4}$ auf folgende Weise umgestalten:

für $f = 1$

$$\bar{v}^1 \bar{\partial}_1 u^g - \bar{u}^1 \bar{\partial}_1 v^g = v^1 \partial_1 u^g - u^1 \partial_1 v^g - A_{1e}^g d^{1e} = \\ = v^1 \partial_1 u^g - u^1 \partial_1 v^g + \sum_{e=2}^n (d^{e1})^{-1} (v^e \partial_e u^g - u^e \partial_e v^g) d^{e1} = \\ = v^1 \partial_1 u^g - u^1 \partial_1 v^g + \sum_{e=2}^n (v^e \partial_e u^g - u^e \partial_e v^g) = \\ = v^a \partial_a u^g - u^a \partial_a v^g \quad (g = 1, \dots, n),$$

für $f > 1$

$$\bar{v}^f \bar{\partial}_f u^g - \bar{u}^f \bar{\partial}_f v^g = v^f \partial_f u^g - u^f \partial_f v^g - [(d^{f1})^{-1} (v^f \partial_f u^g - u^f \partial_f v^g) d^{1f}] = \\ = v^f \partial_f u^g - u^f \partial_f v^g - (v^f \partial_f u^g - u^f \partial_f v^g) = \\ = 0 \quad (\text{n. über } f; g = 1, \dots, n; f = 2, \dots, n).$$

Die Gleichungen (4.4) gehen also unter Beachtung von (4.16) durch $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{1,4}$ in die Relationen

$$(4.19) \quad w^q = h^q(u^f; \mathcal{L}_v u^g; v^k) \quad (q = 1, \dots, n) \\ (h^q(x^f; y^g; z^k) \stackrel{\text{df}}{=} g^q(x^f; (z^f)^{-1} \cdot \delta_f^1 y^g; z^k), \quad \text{n. s. über } f)$$

über, wo

$$\mathcal{L}_v u^g \stackrel{\text{df}}{=} v^a \partial_a u^g - u^a \partial_a v^g$$

(die Liesche Ableitung des Vektors $\{u^i\}$ in bezug auf $\{v^i\}$) ein kontravarianter Vektor ist.

(4. 19) ergibt wegen des Satzes I. die Lösung des Funktionalgleichungssystems (4. 4) in der Gestalt

$$(4. 20) \quad w^q = \Gamma_1 u^q + \Gamma_2 v^q + \Gamma_3 \mathfrak{L}_v u^q.$$

($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sind beliebige Funktionen der Skalarfelder λ^a , die die eventuelle lineare Abhängigkeit der Vektoren $\{u^q\}, \{v^q\}, \{\mathfrak{L}_v u^q\}$ ausdrücken. Im Falle der linearen Unabhängigkeit dieser drei Vektoren sind $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ Konstanten.)

Im Falle

b) $d^{e1} = 0$ ($e = 2, \dots, n$) sind $\{u^i\}$ und $\{v^i\}$ linear abhängige Vektoren:

$$\{u^i\} = \sigma \{v^i\}, \quad (\sigma: \text{Skalar})$$

Dementsprechend haben die Komponenten des Vektors $\{w^i\}$ die Gestalt

$$(4. 21) \quad w^q = F^q(\sigma; \partial_f \sigma; v^k; \partial_i v^k).$$

Auch in diesem Fall können wir die Unabhängigkeit der Funktionen F^q von den Veränderlichen $\partial_i v^k$ ($i, k = 1, \dots, n$) beweisen. (Dazu ist es hinreichend für (4. 21) die $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{1,1}$ zu verwenden.) Wir erhalten also, daß der Vektor $\{w^i\}$ eine *algebraische* Komitante der Vektorfelder

$$\mathbf{grad} \sigma = \{\partial_i \sigma\}, \quad \{v^i\}$$

und des Skalarfeldes σ sein muß:

$$(4. 22) \quad w^q = G^q(\sigma; \partial_f \sigma; v^k),$$

wo die Funktionen G^q Lösungen des Funktionalgleichungssystems

$$(4. 23) \quad \bar{A}_q^p G^p(\sigma; \partial_f \sigma; v^k) = G^q(\sigma; A_f^g \partial_g \sigma; \bar{A}_j^k v^j)$$

sind.

Für

$$\{\partial_i \sigma\} = \{0\}$$

bekommen wir durch Verwendung des Satzes I. aus (4. 22) den Ausdruck

$$w^q = \Gamma(\sigma) v^q \quad (q = 1, \dots, n).$$

Folglich gilt auch in diesem Fall das Ergebnis (4. 20) wegen der Identität

$$\mathfrak{L}_v(\sigma v^q) = v^q v^a \partial_a \sigma = 0. \quad (q = 1, \dots, n)$$

Wenn

$$\{\partial_i \sigma\} \neq \{0\}$$

erfüllt ist, so gibt es eine solche Komponente (z. B. die r -te Komponente) des Vektors $\{\partial_i \sigma\}$, die verschieden von Null ist:

$$\partial_r \sigma \neq 0.$$

Wir betrachten das q -te Glied des Systems (4.23) ($q \neq r$), und wir wenden darauf die $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{13} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial_1 \sigma}{\partial_r \sigma} & \dots & -\frac{\partial_{r-1} \sigma}{\partial_r \sigma} & \frac{1}{\partial_r \sigma} & -\frac{\partial_{r+1} \sigma}{\partial_r \sigma} & \dots & -\frac{\partial_n \sigma}{\partial_r \sigma} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \end{pmatrix} (r)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \partial_1 \sigma & \dots & \partial_{r-1} \sigma & \partial_r \sigma & \partial_{r+1} \sigma & \dots & \partial_n \sigma \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (r)$$

an. So ergibt sich für w_q der Ausdruck

$$(4.24) \quad w^q = H^q(\sigma; v^1, \dots, v^{r-1}, v^a \partial_a \sigma, v^{r+1}, \dots, v^n). \quad (q \neq r)$$

$$(H^q(x; y^1, \dots, y^n) \stackrel{\text{df}}{=} G^q(x; \delta_f^r; y^1, \dots, y^n))$$

Nach der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{14} \quad \bar{A}_j^i = \varrho \delta_j^i \quad (\varrho \neq 0, i \neq q), \quad \bar{A}_j^q = \delta_j^q \quad (j = 1, \dots, n)$$

und nach dem Grenzübergang

$$\varrho \rightarrow 0$$

gewinnen wir aus (4.24) die Darstellung

$$(4.25) \quad w^q = h^q(\sigma; v^a \partial_a \sigma; \delta^q). \quad (q \neq r)$$

$$(h^q(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} H^q(x; 0, \dots, 0, \overset{(q)}{z}, 0, \dots, 0, \overset{(r)}{y}, 0, \dots, 0))$$

Eine solche Darstellung der Komponenten des Vektors $\{w^i\}$ gilt auch für die r -te Komponente w_r . Der Beweis ist ähnlich dem Verfahren, das die Relation (4.23) zur Folge hatte. (Statt $\mathbf{T}_{13}$, bzw. $\mathbf{T}_{14}$ soll man die $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{11}$, bzw.

$$\mathbf{T}'_{14} \quad A_j^i = \varrho' \delta_j^i \quad (\varrho' \neq 0, i \neq r), \quad A_j^r = \delta_j^r$$

verwenden. Der Grenzübergang

$$\varrho' \rightarrow 0$$

ergibt für w^r die Relation (4.25), wo die Funktion h^r durch

$$h^r(x, y, z) \stackrel{\text{df}}{=} z G^r(x; 0, \dots, 0, \overset{(r)}{y}, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \overset{(r)}{1}, 0, \dots, 0)$$

definiert ist.)

Aus der Relation (4.25) bekommen wir mit Hilfe des Satzes I. den Ausdruck

$$w^q = \gamma(\sigma, v^a, \partial_a \sigma) v^q, \quad (q = 1, \dots, n)$$

wo $\gamma(x, y)$ eine, nach y stetige Funktion bedeutet (die w^q sollen voraussetzungsgemäß in v^i stetig sein).

Den Fall

c) $d^{e1} = 0$ ($2 \leq e \leq k < n$), $d^{m1} \neq 0$ ($k < m \leq n$) können wir durch eine $\mathbf{K}_0$ -Transformation vom Typus

$$\mathbf{T}_{15} \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{v^2}{v^n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{v^k}{v^n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} (k)$$

auf den Fall a) zurückführen und zwar folgendermaßen.

Die Vektoren $\{u^i\}, \{v^i\}$ werden sich bei $\mathbf{T}_{15}$ nach

$$\{\bar{u}^i\} = \bar{\mathbf{A}}\{u^i\} = \left\{ u^1, \frac{u^2 v^n + u^n v^2}{v^n}, \dots, \frac{u^k v^n + u^n v^k}{v^n}, u^{k+1}, \dots, u^n \right\},$$

$$\{\bar{v}^i\} = \bar{\mathbf{A}}\{v^i\} = \{v^1, 2v^2, \dots, 2v^k, v^{k+1}, \dots, v^n\}$$

transformieren.

Da die Bedingungen $d^{e1} = 0$ ($2 \leq e \leq k < n$) mit den Bedingungen

$$(4.26) \quad \frac{u^e}{v^e} = \frac{u^1}{v^1} \quad (2 \leq e \leq k < n)$$

gleichbedeutend sind, wird die linke Seite von (4.26) durch die $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{15}$ auf folgende Weise transformiert:

$$\frac{\bar{u}^e}{\bar{v}^e} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^e}{v^e} + \frac{u^n}{v^n} \right). \quad (2 \leq e \leq k < n)$$

Dagegen gilt

$$\frac{\bar{u}^1}{\bar{v}^1} = \frac{u^1}{v^1},$$

folglich haben wir wegen unserer Voraussetzung $d^{n1} \neq 0$ statt den Gleichungen (4.26) die Ungleichungen

$$(4.27) \quad \frac{\bar{u}^e}{\bar{v}^e} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^e}{v^e} + \frac{u^n}{v^n} \right) \neq \frac{\bar{u}^1}{\bar{v}^1} = \frac{u^1}{v^1}.$$

Die Ungleichungen (4.27) können wir in der Form

$$\bar{d}^{e1} \neq 0 \quad (2 \leq e \leq k < n)$$

schreiben.

Andererseits gelten die Relationen

$$\bar{d}^{m1} \neq 0 \quad (k < m \leq n)$$

auch im neuen Koordinatensystem, also besteht die Ungleichung

$$\bar{d}^{i1} \neq 0$$

für alle Indizes $i = 2, \dots, n$, w. z. b. w.

Schließlich bemerken wir, daß unsere Ergebnisse auch für den Vektor

$$\{v^i\} = \{0\}$$

gültig sind. Das folgt nach dem Grenzübergang

$$\{v^i\} \rightarrow \{0\}$$

wegen der vorausgesetzten Stetigkeit des $\{u^i\}$ in den Argumenten $v^1, \dots, v^n$.

*

Zusammenfassend haben wir die folgenden Sätze:

Satz 3. Die Differentialkomitante $\{w_i\}$ eines kovarianten Vektorfeldes $\{u_i\}$ in bezug auf einen kontravarianten Vektorfeld $\{v^i\}$ ist folgenderweise darstellbar:

Im Falle $n = 1$:

$$w \begin{cases} = v^{-1} g_1(vu, v \mathfrak{L}_v u) & (v \neq 0), \\ = u g_2(dv) & (v = 0), \end{cases}$$

wo $g_1(x, y), g_2(x)$ beliebige Funktionen sind.

Im Falle $n > 1$ (unter Voraussetzung der Stetigkeit von $\{w_i\}$ in den Argumenten u_i und v^j):

$$w_i = \gamma_1 u_i + \gamma_2 v^a \hat{\partial}_{[a} u_{i]} + \gamma_3 \mathfrak{L}_v u_i,$$

wo

$$\mathfrak{L}_v u_i = v^a \hat{\partial}_a u_i + u_a \hat{\partial}_i v^a$$

die Liesche Ableitung des kovarianten Vektorfeldes $\{u_i\}$ bezeichnet. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind beliebige Funktionen der Skalare

$$v^a u_a, \quad v^b (v^a \hat{\partial}_{[a} u_{b]} + u_a \hat{\partial}_b v^a),$$

ferner können sie von zwei Skalaren abhängen, die die Abhängigkeit der Vektoren

$$\{u_i\}, \quad \{v^a \hat{\partial}_{[a} u_{i]}\}, \quad \{v^a \hat{\partial}_{(a} u_{i)} + u_a \hat{\partial}_i v^a\}$$

ausdrücken.

Satz 4. Die Differentialkomitante $\{w_i\}$ eines kontravarianten Vektorfeldes $\{u^i\}$ bezüglich des kontravarianten Vektorfeldes $\{v^i\}$ ist folgenderweise darstellbar:

Im Falle $n = 1$:

$$w \begin{cases} = vG_1\left(\frac{u}{v}, \frac{\mathfrak{L}_v u}{v}\right), & (v \neq 0) \\ = uG_2(dv), & (v = 0), \end{cases}$$

wo $g_1(x, y)$ und $g_2(x)$ beliebige Funktionen sind.

Im Falle $n > 1$ (unter Voraussetzung der Stetigkeit der $\{w^i\}$ in den Veränderlichen $v^1, \dots, v^n$):

Wenn a) $\{u^i\} = \sigma \{v^i\}$ (σ Skalar) und $\{\partial_j \sigma\} \neq \{0\}$, so gilt

$$w^i = \Gamma(\sigma, v^a \partial_a \sigma) v^i,$$

wo $\Gamma(x, y)$ eine beliebige in y stetige Funktion ist.

Wenn b) $\{u^i\} = \sigma \{v^i\}$ und $\{\partial_j \sigma\} = \{0\}$ oder

wenn c) $\{u^i\}$ und $\{v^i\}$ linear unabhängige Vektoren sind, so gilt

$$w^i = \Gamma_1 u^i + \Gamma_2 v^i + \Gamma_3 \mathfrak{L}_v u^i.$$

Die Koeffizienten $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sind beliebige Konstanten bzw. beliebige Funktionen der Skalaren, die die Abhängigkeit der Vektoren

$$\{u^i\}, \{v^i\}, \{\mathfrak{L}_v u^i\} \stackrel{\text{df}}{=} \{v^a \partial_a u^i - u^a \partial_a v^i\}$$

ausdrücken.

§ 5. Die Differentialkomitanten der gewöhnlichen Dichten

Es sei $\mathfrak{g}$ eine gewöhnliche Dichte vom Gewicht $-p$ ($\neq 0$). Wir setzen wieder voraus, daß die Funktion $\mathfrak{g}$ in einem Gebiet G des Raumes X_n partielle Ableitungen

$$\partial_j \mathfrak{g} \quad (j = 1, \dots, n)$$

besitzt. Wir werden in diesem Paragraphen solche Differentialkomitanten $\mathfrak{G}$ suchen, die gewöhnliche Dichten vom Gewichte $-p$ und zugleich Differentialkomitanten erster Ordnung der Objekte

$$\mathfrak{g}, \{v^i\}$$

sind:

$$\mathfrak{G} = f(\mathfrak{g}; \partial_j \mathfrak{g}; v^k; \partial_i v^k).$$

Bekanntlich (s. [9]) transformiert sich die Dichte $\mathfrak{g}$ bei einer Koordinatentransformation (1) mittels der Formel

$$(5.1) \quad \bar{\mathfrak{g}} = \text{sgn } \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{g}, \quad (\Delta \stackrel{\text{df}}{=} \det(A_j^i))$$

also wird die auf die Funktion f bezogene Funktionalgleichung (4) im Fall der gewöhnlichen Dichte $\mathfrak{g}$ wegen der Relationen

$$(5.2) \quad \bar{\partial}_j \mathfrak{g} = \text{sgn } \Delta |\Delta|^{-p} A_j^a (\partial_a \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \Delta^{-1} \partial_a \Delta)$$

die Form

$$(5.3) \quad \text{sgn } \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G} = f[\text{sgn } \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{g}; \text{sgn } \Delta |\Delta|^{-p} A_j^a (\partial_a \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \Delta^{-1} \partial_a \Delta); \bar{A}_h^k v^b; A_i^c \bar{A}_d^k \partial_c v^d - A_{ie}^a \bar{A}_g^k \bar{A}_f^e v^f]$$

haben.

Der Fall $n=1$.

Die Funktionalgleichung (5.3) stellt in diesem Fall eine spezielle Form der Gleichung (2.11) dar, die man aus (2.11) durch Einsetzen von

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha, \quad c = -p$$

gewinnt. Die entsprechenden Lösungen sind nach Satz 1 die folgenden:

$$\mathfrak{G} \begin{cases} = \operatorname{sgn} v |v|^p h_1 (\operatorname{sgn} v \cdot |v|^p \mathfrak{g}, \operatorname{sgn} v \cdot |v|^p (v d\mathfrak{g} - p\mathfrak{g} dv)), \\ \quad \text{wenn } v \neq 0, \text{ (s. den Fall I.)} \\ = h_2(dv), \text{ wenn } v=0, \mathfrak{g} \neq 0, \text{ (s. den Fall II. A. 1.)} \\ = 0, \text{ wenn } v=0, \mathfrak{g}=0, d\mathfrak{g} \neq 0, \text{ (s. den Fall II. B. 1. a.)} \\ = 0, \text{ wenn } v=0, \mathfrak{g}=0, d\mathfrak{g}=0, \text{ (s. den Fall II. B. 2. a.)} \end{cases}$$

(Die Funktionen $h_1(x, y)$, $h_2(x)$ sind beliebig.)

Der Fall $n > 1$.

Um die Funktionalgleichung (5.3) zu lösen, setzen wir vorerst die Gültigkeit der Ungleichung

$$(5) \quad \{v^i\} \neq \{0\}$$

voraus.

Wir gehen von einem solchen Koordinatensystem $\mathbf{K}_0$ aus, in dem die Relationen

$$(6) \quad v^i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

gelten und wenden in (5.3) die $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{1,1}$ (s. § 3.) an. Wir erhalten so

$$(5.4) \quad \mathfrak{G} = f[\mathfrak{g}; (v^j)^{-1} (v^j \partial_j \mathfrak{g} - p\mathfrak{g} \partial_j v^j); v^k; 0, \dots, 0]. \quad (\text{n. s. über } j)$$

(Die Ausdrücke Δ und $A_j^a \partial_a \Delta$ werden nämlich durch die $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{1,1}$ die Werte

$$\Delta = 1,$$

$$A_j^a \partial_a \Delta = A_j^a \partial_a [\det (A_k^i)] = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{k-1}^1 & A_{jk}^1 & A_{k+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^k & \dots & A_{k-1}^k & A_{jk}^k & A_{k+1}^k & \dots & A_n^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^n & \dots & A_{k-1}^n & A_{jk}^n & A_{k+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{jk}^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}^{(k)} = A_{jk}^k = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} \frac{\partial_j v^k}{v^k} =$$

$$= \frac{\partial_j v^j}{v_j} \quad (\text{n. s. über } j; j = 1, \dots, n)$$

annehmen.)

Die auf der rechten Seite der Relation (5.4) auftretenden Ausdrücke

$$L_j \stackrel{\text{df}}{=} v^j \partial_j \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \partial_j v^j \quad (\text{n. s. über } j; j = 1, \dots, n)$$

transformieren sich bei der $\mathbf{K}_0$ -Transformation von Typus $\mathbf{T}_{1,0}$ auf folgende Weise:

$$\bar{L}_j = L_j - p \mathfrak{g} v^j A_{jk}^k + p \mathfrak{g} v^m A_{jm}^j. \quad (\text{n. s. über } j)$$

a) *Im Fall*

$$\mathfrak{g} \neq 0$$

erhalten wir aus (5.4) durch Anwendung der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{1,5}: \left\{ \begin{array}{l} A_{11}^1 = 0, \\ A_{m1}^1 = A_{1m}^1 = \frac{\partial_m \mathfrak{g}}{p \mathfrak{g}}, \quad (m = 2, \dots, n) \\ A_j^i = \delta_j^i (\Delta = 1); \\ A_{k1}^k = A_{1k}^k = \frac{\partial_k v^k}{v^1}, \quad (\text{n. s. über } k; k = 2, \dots, n) \\ \text{alle übrigen } A_{jk}^i = 0 \end{array} \right.$$

wegen der Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_0 \stackrel{\text{df}}{=} \bar{L}_1 &= v^1 \partial_1 \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \partial_1 v^1 - p \mathfrak{g} v^1 \left(\sum_{k=2}^n \frac{\partial_k v^k}{v^1} \right) + p \mathfrak{g} \left(v^1 \cdot 0 + \sum_{k=2}^n v^k \frac{\partial_k \mathfrak{g}}{p \mathfrak{g}} \right) = \\ &= v^1 \partial_1 \mathfrak{g} + \sum_{k=2}^n v^k \partial_k \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \left(\partial_1 v^1 + \sum_{k=2}^n \partial_k v^k \right) = \\ &= v^a \partial_a \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \partial_a v^a, \\ \bar{L}_r &= v^r \partial_r \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \partial_r v^r - p \mathfrak{g} v^r \frac{\partial_r \mathfrak{g}}{p \mathfrak{g}} + p \mathfrak{g} v^1 \frac{\partial_r v^r}{v^1} = \\ &= 0 \quad (\text{n. s. über } r; r = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

die Beziehung

$$5.5) \quad \mathfrak{G} = g_1 \left(\mathfrak{g}; \frac{\mathfrak{G}_0}{v^1}; v^1, \dots, v^n \right).$$

$$(g_1(x; y; z_1, \dots, z_n) \stackrel{\text{df}}{=} f(x; y; 0, \dots, 0; z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0);$$

$$\mathfrak{G}_0 = v^a \partial_a \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \partial_a v^a$$

bezeichnet hier die Liesche Ableitung von $\mathfrak{g}$ in bezug auf das Vektorfeld $\{v^i\}$, die ebenfalls eine Dichte vom Gewicht $-p$ ist).

b) *Im Fall*

$$\mathfrak{g} = 0$$

hat (5.4) die einfachere Gestalt

$$5.6) \quad \mathfrak{G} = h_1(\partial_1 \mathfrak{g}, \dots, \partial_n \mathfrak{g}; v^1, \dots, v^n),$$

$$(h_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \stackrel{\text{df}}{=} f(0; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; 0, \dots, 0)).$$

(5.3) geht wegen (5.5) in die Gleichung

$$(5.7) \quad \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G} = g_1 \left(\operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{g}; \frac{\operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G}_0}{\bar{A}_a^1 v^a}; \bar{A}_a^1 v^a, \dots, \bar{A}_a^n v^a \right)$$

über, woraus wir nach der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v^1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & v^2 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots v^{n-1} & 0 \\ v^n - \frac{1}{v^1 \cdot \dots \cdot v^{n-1}} & 0 \dots 0 & \frac{1}{v^1 \cdot \dots \cdot v^{n-1}} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{T}_{16}$:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^1} & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots \frac{1}{v^{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{v^1} - v^2 \cdot \dots \cdot v^n & 0 \dots 0 & v^1 \cdot \dots \cdot v^{n-1} \end{pmatrix}$$

($\Delta = 1$)

auf Grund der Transformationen

$$\bar{\mathfrak{g}} = \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{g} = \mathfrak{g},$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_0 = \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_0,$$

$$\{\bar{v}^k\} = \bar{\mathbf{A}}\{v^k\} = \{1, 1, \dots, 1\}$$

die Relation

$$(5.8) \quad \mathfrak{G} = g_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{G}_0)$$

($g_2(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} g_1(x; y; 1, \dots, 1)$) erhalten.

Wir behaupten weiter, daß die Funktion g_2 homogen von erster Ordnung ist. Dies folgt einfach aus (5.7), wenn wir statt g_1 die Funktion g_2 einsetzen und statt $\operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p}$ die Veränderliche u schreiben.

Für $\mathfrak{g} \neq 0$ kann also (5.8) in der Form

$$(5.9) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{g}h(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{g}^{-1})$$

geschrieben werden.

(5.9) gibt im Fall $n > 1$, $\mathfrak{g} \neq 0$, $\{v^i\} \neq \{0\}$ die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung (5.3), wo bei $h(x)$ eine beliebige Funktion bedeutet.

Im Fall

$$\mathfrak{g} = 0$$

kann man in ähnlicher Weise verfahren.

Wir setzen nun (5.6) in (5.3) ein und wenden die $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{17}: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{v^2}{v^1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v^3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v^n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{v^2}{v^1} & v^1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{v^3}{v^1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -\frac{v^n}{v^1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Delta = 1)$$

an (offenbar ist diese Transformation wegen $n > 1$ zulässig).

Wir bemerken, daß sich die

$$\{\partial_j \mathfrak{g}\}$$

bei $\mathfrak{g} = 0$, $\Delta = 1$ (nach dem Transformationsgesetz (5.2)) wie ein kovarianter Vektor transformieren. Wir bekommen also wegen der Relationen

$$\{\bar{\partial}_j \mathfrak{g}\} = \{\partial_j \mathfrak{g}\} \mathbf{A} = \left\{ v^a \partial_a \mathfrak{g} + v^2 (1 - v^1) \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1}, \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1}, \partial_3 \mathfrak{g}, \dots, \partial_n \mathfrak{g} \right\},$$

$$\{\bar{v}^k\} = \bar{\mathbf{A}} \{v^k\} = \{1, 0, \dots, 0\}$$

aus (5.6) und (5.3) die Beziehung

$$(5.10) \quad \mathfrak{G} = h_2 \left(\mathfrak{G}_0 + v^2 (1 - v^1) \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1}, \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1}, \partial_3 \mathfrak{g}, \dots, \partial_n \mathfrak{g} \right).$$

($h_2(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{df}}{=} h_1(x_1, \dots, x_n; 1, 0, \dots, 0)$, wobei wegen $\mathfrak{g} = 0$

$$\mathfrak{G}_0 = v^a \partial_a \mathfrak{g}$$

die Liesche Ableitung von $\mathfrak{g}$ in bezug auf $\{v^i\}$ ist.)

1° Im Unterfall

$$\{\partial_j \mathfrak{g}\} = \{0\}$$

ist $\mathfrak{G}$ eine Konstante:

$$\mathfrak{G} = c.$$

c befriedigt aber die Gleichung (5.3) dann und nur dann, wenn

$$\mathfrak{G} = c = 0$$

erfüllt ist.

2° Im Unterfall

$$\partial_1 \mathfrak{g} \neq 0, \partial_2 \mathfrak{g} = \dots = \partial_n \mathfrak{g} = 0$$

gilt

$$\mathfrak{G} = h_2(\mathfrak{G}_0, 0, \dots, 0).$$

Wenn $\mathfrak{G}$ eine Funktion von $\mathfrak{G}_0$ ist, so muß — wie leicht zu sehen ist — diese Funktion homogen von erster Ordnung sein.

Wegen der Homogenität von h_2 folgt die Formel

$$(5.11) \quad \mathfrak{G} = c \mathfrak{G}_0$$

(c beliebige Konstante).

3° Im Unterfall

$$\partial_1 \mathfrak{g}, \partial_2 \mathfrak{g}, \dots, \partial_r \mathfrak{g} \neq 0; \partial_{r+1} \mathfrak{g} = \dots = \partial_n \mathfrak{g} = 0$$

$$(1 < r \leq n)$$

sei vorerst angenommen, daß

$$\mathfrak{G}'_0 \stackrel{\text{df}}{=} v^1 \partial_1 \mathfrak{g} + v^2 \partial_2 \mathfrak{g} \neq 0$$

erfüllt ist.

Hier kann man die $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{18}: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\partial_1 \mathfrak{g}} & -\partial_2 \mathfrak{g} & 0 \dots 0 \\ 0 & \partial_1 \mathfrak{g} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \partial_1 \mathfrak{g} & \partial_2 \mathfrak{g} & 0 \dots 0 \\ 0 & \frac{1}{\partial_1 \mathfrak{g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

($\Delta = 1$)

verwenden, mit Hilfe welcher wir die Beziehung (5.10) (nach Einsetzen des h_2 in (5.3) und nach dieser Transformation) folgendermaßen umgestalten:

$$(5.12) \quad \mathfrak{G} = h_2(\mathfrak{G}_0, 0, \partial_3 \mathfrak{g}, \dots, \partial_n \mathfrak{g}).$$

Wir können in ähnlicher Weise mit Hilfe der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{19}: \quad A_j^1 = \delta_j^1 \prod_3^r \partial_i \mathfrak{g}, \quad A_j^2 = \delta_j^2, \quad A_j^k = \delta_j^k \frac{1}{\partial_k \mathfrak{g}}, \quad A_j^m = \delta_j^m$$

$$(n. s. \text{ über } k; j = 1, \dots, n; k = 3, \dots, r; m = r+1, \dots, n)$$

aus (5.12) die Relation

$$\mathfrak{G} = h_3(\mathfrak{G}_0)$$

$(h_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} h_2(x, 0, 1, \dots, \overset{(r)}{1}, 0, \dots, 0))$ gewinnen, woraus wir wieder das Ergebnis (5. 11) erhalten.

Wenn jedoch

$$\mathfrak{G}'_0 = 0, \quad n = 2$$

ist, so wird

$$\tilde{\mathfrak{g}} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1} = -\frac{\partial_1 \mathfrak{g}}{v^2}$$

eine Weylsche Dichte vom Gewicht $-p+1$,

$$\bar{\tilde{\mathfrak{g}}} = |\Delta|^{-p+1} \tilde{\mathfrak{g}}.$$

(Das kann durch unmittelbare Rechnung verifiziert werden, und zwar: aus

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$$

folgt man

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} A_2^2 & -\frac{1}{\Delta} A_2^1 \\ -\frac{1}{\Delta} A_1^2 & \frac{1}{\Delta} A_1^1 \end{pmatrix},$$

$$(\Delta = A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1)$$

Die Transformationsformel (5. 2) der Ableitungen $\partial_j \mathfrak{g}$ reduziert sich wegen $\mathfrak{g} = 0$ auf

$$(5. 13) \quad \overline{\partial_j \mathfrak{g}} = \text{sgn } \Delta |\Delta|^{-p} A_j^a \partial_a \mathfrak{g}$$

und mit Rücksicht auf $\mathfrak{G}'_0 = 0$ erhalten wir für die Transformationsformel von $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\mathfrak{g}}} &= \frac{\overline{\partial_1 \mathfrak{g}}}{v^1} = \text{sgn } \Delta |\Delta|^{-p} \cdot \frac{A_2^1 \partial_1 \mathfrak{g} + A_2^2 \partial_2 \mathfrak{g}}{\frac{1}{\Delta} (A_2^2 v^1 - A_2^1 v^2)} = \\ &= |\Delta|^{-p+1} \cdot \frac{A_2^1 \left(-\frac{v^2}{v^1} \partial_2 \mathfrak{g} \right) + A_2^2 \partial_2 \mathfrak{g}}{A_2^2 v^1 - A_2^1 v^2} = |\Delta|^{-p+1} \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1} = |\Delta|^{-p+1} \tilde{\mathfrak{g}}. \end{aligned}$$

(5. 10) hat also die Form

$$\mathfrak{G} = h_2(v^2(1-v^1)\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}),$$

woraus wir mit Hilfe der $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{17}$ zu dem Ausdruck

$$\mathfrak{G} = h_4(\tilde{\mathfrak{g}})$$

$(h_4(x) \stackrel{\text{df}}{=} h_2(0, x))$ gelangen können. Die Komitante $\mathfrak{G}$, die eine gewöhnliche Dichte ist, wäre in diesem Fall eine Komitante der W -Dichte $\tilde{\mathfrak{g}}$. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn

$$(5. 14) \quad h_4(x) \equiv 0$$

gültig ist.

Wird nämlich die Funktion h_4 in die Grundgleichung (5.3) eingesetzt, so gewinnen wir für h_4 die Funktionalgleichung

$$(5.15) \quad \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} h_4(\tilde{\mathfrak{g}}) = h_4(|\Delta|^{-p+1} \tilde{\mathfrak{g}}).$$

Wir wählen jetzt die $\mathbf{K}_0$ -Transformation (1), so daß

$$\Delta = -1$$

ist; dann geht (5.15) in die Gleichheit

$$(5.16) \quad -h_4(\tilde{\mathfrak{g}}) = h_4(\tilde{\mathfrak{g}})$$

über, woraus die Identität (5.14) folgt.

Wir erhalten also

$$\mathfrak{G} = 0.$$

Es bleibt noch die Untersuchung des Falles

$$\mathfrak{G}'_0 = 0, \quad n > 2, \quad r \equiv 2$$

übrig.

Wir beweisen in diesem Fall, daß dann die in (5.10) auftretende Funktion h_2 nur von $\mathfrak{G}_0$ abhängen kann.

Wenn $r=2$ ist, so folgt auch

$$\mathfrak{G}_0 = 0$$

nach den Definitionen von $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}'_0$, und (5.10) lautet

$$(5.17) \quad \mathfrak{G} = h_2 \left(v^2 (1 - v^1) \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1}, \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1}, 0, \dots, 0 \right).$$

Wir wenden nun die $\mathbf{K}_0$ -Transformationen

$$\mathbf{T}'_{17}: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{v^2}{v^1} & \frac{1}{v^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{v^2}{v^1} & v^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

danach

$$\mathbf{T}_{20}: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{v^1}{\partial_2 \mathfrak{g}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v^1}{\partial_2 \mathfrak{g}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

auf $\mathfrak{G}$ in (5.17) an. Da die Jacobische Determinante von $\mathbf{T}'_{17}$ und $\mathbf{T}_{20}$ gleich Eins ist, folgert man aus den Transformationen von $\partial_2 \mathfrak{g}$ und v^1 :

$$\text{bei } \mathbf{T}'_{17}: \quad \bar{v}^1 = 1, \quad \bar{v}^2 = -v^2 + v^1 v^2; \quad \frac{\overline{\partial_2 \mathfrak{g}}}{\bar{v}^1} = \frac{\partial_2 \mathfrak{g}}{v^1},$$

$$\text{bei } \mathbf{T}_{20}: \quad \frac{\overline{\partial_2 \mathfrak{g}}}{\bar{v}^1} = \frac{\frac{v^1}{\partial_2 \mathfrak{g}} \cdot \partial_2 \mathfrak{g}}{v^1} = 1;$$

$$\mathfrak{G} = h_2(0, 1, 0, \dots, 0) = \text{konstant.}$$

Falls $n > 2$, $r > 2$, gelangen wir durch Anwendung der $\mathbf{K}_0$ -Transformationen $\mathbf{T}'_{17}$ und $\mathbf{T}_{20}$ nur zu der Form

$$\mathfrak{G} = h_2 \left(\mathfrak{G}_0, 1, \frac{\partial_2 \mathfrak{g} \partial_3 \mathfrak{g}}{v^1}, \partial_4 \mathfrak{g}, \dots, \partial_r \mathfrak{g}, 0, \dots, 0 \right).$$

Wenn r kleiner als n ist, so können wir mit Hilfe der $\mathbf{K}_0$ -Transformation

$$\mathbf{T}_{21}: \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\partial_2 \mathfrak{g}} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\partial_r \mathfrak{g}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial_2 \mathfrak{g} \cdot \dots \cdot \partial_r \mathfrak{g}}{v^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\Delta = 1)$$

sofort

$$\mathfrak{G} = h_2(\mathfrak{G}_0, \overset{(2)}{1}, \dots, \overset{(r)}{1}, 0, \dots, 0)$$

bekommen.

Im Fall $r = n$ haben wir nach Anwendung der Transformation $\mathbf{T}_{21}$ für $\mathfrak{G}$ den Ausdruck

$$(5.18) \quad \mathfrak{G} = h_2 \left(\mathfrak{G}_0, \overset{(2)}{1}, \dots, \overset{(n-1)}{1}, \frac{1}{v^1} (\partial_2 \mathfrak{g} \cdot \dots \cdot \partial_n \mathfrak{g}) \right).$$

Bei der K_0 -Transformation

$$T_{22}: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & v^1 & \frac{1}{v^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v^2 & -\frac{1}{v^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v^1}{v^2} & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} & \frac{1}{v^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & v^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

($\Delta = 1$)

werden die Ausdrücke

$$v^1, \partial_2 \mathfrak{g}, \dots, \partial_{n-1} \mathfrak{g}, \frac{1}{v^1} (\partial_2 \mathfrak{g} \cdot \dots \cdot \partial_n \mathfrak{g})$$

in

$$\begin{aligned} \bar{v}^1 &= \bar{A}_a^1 v^a = -2v^3 (\neq 0); \\ \overline{\partial_2 \mathfrak{g}} &= A_2^b \partial_b \mathfrak{g} = v^1 \partial_1 \mathfrak{g} + v^2 \partial_2 \mathfrak{g} (= \mathfrak{G}'_0) = 0, \\ \frac{1}{\bar{v}^1} (\overline{\partial_2 \mathfrak{g}} \cdot \dots \cdot \overline{\partial_n \mathfrak{g}}) &= \frac{1}{-2v^3} \cdot 0 \cdot (\dots) = 0 \end{aligned}$$

transformiert. Wir erhalten also aus (5.18) nach T_{22} eben den Ausdruck

$$\mathfrak{G} = h_2(\mathfrak{G}_0, \overset{(2)}{1}, \dots, \overset{(n-1)}{1}, 0),$$

w. z. b. w.

In allen Fällen haben wir festgestellt, daß die Funktion h_2 allein von $\mathfrak{G}_0$ abhängt.

Ist $\mathfrak{G}_0 = 0$ (z. B. im Unterfall $r=2$), so wird $\mathfrak{G} = h_2$ eine Konstante und es muß (mit Berücksichtigung der Grundgleichung (5.3))

$$\mathfrak{G} = 0$$

bestehen.

Wenn $\mathfrak{G}_0 \neq 0$ gilt, so haben wir das Ergebnis in der Gestalt

$$\mathfrak{G} = c \mathfrak{G}_0 \quad (c \text{ Konstante}).$$

(Der Beweis dieser Relation ist ähnlich zu dem Verfahren, womit wir zu der Gleichheit gelangt sind.)

*

Wir gehen jetzt zu dem Fall

$$(7) \quad \{v^i\} = \{0\}$$

über. Jetzt bilden die Ableitungen $\partial_i v^k$ nach ihrem Transformationsgesetz einen gemischten Tensor zweiter Stufe

$$\{T_i^k\} \stackrel{\text{df}}{=} \{\partial_i v^k\}.$$

Die gewöhnliche Dichte $\mathfrak{G}$ muß in diesem Fall eine Differentialkomitante erster Ordnung von $\mathfrak{g}$ und zugleich eine *algebraische* Komitante von dem Tensor $\{T_i^k\}$ sein,

$$\mathfrak{G} = f(\mathfrak{g}; \partial_j \mathfrak{g}; T_i^k),$$

wobei die Funktion f nach (4) die Funktionalgleichung

$$(5.19) \quad \begin{aligned} & \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G} = \\ & = f[\operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{g}; \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} A_j^a (\partial_a \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \Delta^{-1} \partial_a \Delta); A_i^a \tilde{A}_b^k T_a^b] \end{aligned}$$

erfüllt.

Wir wenden uns der Auflösung der Gleichung (5.19) zu. Es sei $\mathbf{K}_1$ ein beliebiges festgewähltes Bezugssystem.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- a) $\mathfrak{g} \neq 0,$
- b) $\mathfrak{g} = 0.$

a) Aus der Gleichung (5.19) folgt mit der $\mathbf{K}_1$ -Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{1,6}: \quad A_j^i &= \delta_j^i (\Delta = 1); \quad A_{kk}^k = \frac{\partial_k \mathfrak{g}}{p \mathfrak{g}} \quad (\text{n. s. über } k; k = 1, \dots, n) \\ A_{qr}^p &= 0 \quad ((p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2 > 0) \end{aligned}$$

wegen

$$A_j^a \partial_a \Delta = \frac{\partial_j \mathfrak{g}}{p \mathfrak{g}} \quad (j = 1, \dots, n)$$

die Relation

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= g(\mathfrak{g}; T_i^k). \\ (g(x; T_i^k) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x; 0, \dots, 0; T_i^k)). \end{aligned}$$

Wir haben erhalten, daß die Komitante $\mathfrak{G}$ eine *algebraische* Komitante bezüglich der Dichte $\mathfrak{g}$ sein muß; und die Gleichung (5.19) geht in die (auf die Funktion g bezogene) Funktionalgleichung

$$(5.20) \quad \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G} = g[\operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{g}; A_i^a \tilde{A}_b^k T_a^b]$$

über.

Wählen wir in (5.20) die $\mathbf{K}_1$ -Transformation (1) so, daß ihre Jacobische Matrix $\mathbf{A}$ die Relationen (1.5), (1.7) bezüglich der Matrix

$$\mathbf{T} = (T_i^k)$$

erfüllt, so folgt die Gleichheit

$$(5.21) \quad \mathfrak{G} = h(\mathfrak{g}; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}; \tau_1, \dots, \tau_t).$$

$\mathfrak{G}$ hängt also nur von der Dichte $\mathfrak{g}$ und von den skalaren Größen $\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t$ der ersten Normalform der Matrix $(\partial_i v^k)$ ab. Die Funktion h soll auch in diesem

Fall eine homogene Funktion erster Ordnung in bezug auf $\mathfrak{g}$ sein. Wir erhalten, wegen $\mathfrak{g} \neq 0$, als allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung (5. 19) den Ausdruck ³⁾

$$\mathfrak{G} = k(\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t) \mathfrak{g}.$$

b) Die Dichte $\mathfrak{G}$ hat hier den Ausdruck

$$\mathfrak{G} = f'(\partial_j \mathfrak{g}; T_i^k) \quad (T_k^i \stackrel{\text{df}}{=} \partial_k v^i),$$

wo $\{T_i^k\}$ wieder ein gemischter Tensor zweiter Stufe ist, und die Funktion f' die Funktionalgleichung

$$(5. 22) \quad \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G} = f'[\operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} A_j^a \partial_a \mathfrak{g}; A_i^a \bar{A}_b^k T_a^b]$$

erfüllt. Ähnlich wie bei der Diskussion der Gleichung (5. 20) erhalten wir den Ausdruck

$$(5. 23) \quad \mathfrak{G} = g'[\mathfrak{a}_j; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t],$$

in dem die Größen $\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t$ wiederum gewisse (im § 1., 2. bestimmte) skalare Komitanten des Tensors $\{T_i^k\}$ bedeuten und $\mathfrak{a}_j$ durch

$$\mathfrak{a}_j \stackrel{\text{df}}{=} \overline{\partial_j \mathfrak{g}}$$

erklärt ist. Wir bemerken, daß $\mathfrak{a}_j$ (die Komponenten von $\{\partial_j \mathfrak{g}\}$ im neuen $\mathbf{K}_2$ Koordinatensystem) auch eine kovariante Vektordichte vom Gewichte $-p$ ist.

Ist $\{\partial_j \mathfrak{g}\} = \{0\}$, so folgt $\{\mathfrak{a}_j\} = \{0\}$ und $\mathfrak{G}$ hängt nur von den Skalaren $\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t$ ab:

$$\mathfrak{G} = h'_1(\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t).$$

Wenn die Dichte $\mathfrak{G}$ eine Komitante von Skalaren ist, so kann man aus ihrem Transformationsgesetz

$$\operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$$

ersehen, daß $\mathfrak{G}$ identisch verschwindet,

$$\mathfrak{G} = 0;$$

Setzen wir voraus, daß es eine Komponente von $\{\partial_j \mathfrak{g}\}$ gibt, die verschieden von Null ist. Dann haben wir im neuen Koordinatensystem $\mathbf{K}_2$ für einen Index j :

$$(5. 24) \quad \mathfrak{a}_j \neq 0;$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Ungleichung (5. 24) für die erste Komponente erfüllt ist:

$$\mathfrak{a}_1 \neq 0.$$

³⁾ In der Funktion $k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_t)$ sind y_i ($i=1, \dots, t$) positive ganze Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^t y_i = n.$$

Jetzt wird die K_2 -Transformation

$$T_{23}: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\Delta = \frac{1}{a_1} \right)$$

anwendbar, und wir gewinnen dann mit Hilfe von T_{23} aus (5.23) den Ausdruck

$$(5.25) \quad \mathfrak{G} = \operatorname{sgn} a_1 |a_1|^{-p} h'_2(\operatorname{sgn} a_1 |a_1|^p; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t)$$

$$(h'_2(x; y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_t) \stackrel{\text{df}}{=} g'(x\delta_{j1}; y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_t)).$$

Wir betrachten weiter solche K_2 -Koordinatentransformationen (1), deren Jacobische Matrix

$$A = (A_j^i)$$

die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\Delta = -1, A_{jk}^i \text{ beliebig})$$

hat. Bei diesen K_2 -Transformationen ergibt sich die Transformation von a_1 in der Form

$$\bar{a}_1 = \operatorname{sgn} \Delta |\Delta|^{-p} A_1^a a_a = -(-a_1) = a_1,$$

und (5.25) geht (wegen der Grundgleichung (5.19)) in die Gleichheit

$$-\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$$

über. Diese ist dann und nur dann möglich, wenn

$$\mathfrak{G} = 0$$

gilt.

Wir bemerken schließlich, daß die für $\mathfrak{G}$ von Fall zu Fall erhaltenen Ausdrücke tatsächlich je eine Lösung der Grundgleichung (5.3) liefern.

*

Unsere Resultate über die Differentialkomitanten der gewöhnlichen Dichten können wir in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 5. Die Differentialkomitante $\mathfrak{G}$ der gewöhnlichen Dichte $\mathfrak{g}$ vom Gewicht $-p$ ($\neq 0$) in bezug auf das Vektorfeld $\{v^i\}$ hat die folgende allgemeinste Form:
Im Fall $n=1$:

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} \operatorname{sgn} v |v|^p h_1(\operatorname{sgn} v |v|^{-p} \mathfrak{g}, \operatorname{sgn} v |v|^{-p} \mathfrak{G}_0) & (v \neq 0), \\ \mathfrak{g} \cdot h_2(dv) & (v = 0). \end{cases}$$

Im Fall $n > 1$:

Wenn der Vektor $\{v\}$ kein Nullvektor ist,

$$(5) \quad \{v^i\} \neq \{0\},$$

so wird

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g} \cdot h(\mathfrak{G}_0 \cdot \mathfrak{g}^{-1}) \quad \text{falls } \mathfrak{g} \neq 0;$$

und

$$\mathfrak{G} = c\mathfrak{G}_0 \quad \text{falls } \mathfrak{g} = 0.$$

$$(\mathfrak{G}_0 \stackrel{\text{def}}{=} v^a \partial_a \mathfrak{g} - p \mathfrak{g} \partial_a v^a = \mathfrak{L}_v \mathfrak{g}).$$

In solchen Punkten $\mathbf{G} (\subseteq \mathbf{X}_n)$, in denen der Vektor $\{v^i\}$ verschwindet,

$$(7) \quad \{v^i\} = \{0\},$$

haben wir

$$\mathfrak{G} = k(\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t) \mathfrak{g} \quad \text{für } \mathfrak{g} \neq 0,$$

$$\mathfrak{G} = 0 \quad \text{für } \mathfrak{g} = 0.$$

$\mathfrak{G}_0$ bezeichnet die Liesche Ableitung der Dichte $\mathfrak{g}$ in bezug auf das Vektorfeld $\{v^i\}$, die ebenfalls eine gewöhnliche Dichte vom Gewicht $-p$ ist.

Die Skalare $\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t$ bilden wegen der Gültigkeit von (7) ein System von skalaren Komitanten des Tensors $\{\partial_k v^i\}$, das durch die erste Normalform der Matrix $(\partial_k v^i)$ bestimmt ist.

Die Funktionen⁴⁾ $h_1(x, y), h_2(x); h(x), k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$, bzw. die Konstante c kann man nach Belieben wählen.

§ 6. Die Differentialkomitanten der Weylschen Dichten

Schließlich bestimmen wir die Differentialkomitanten $\mathfrak{W}$ der Weylschen Dichten $\mathfrak{w}$ vom Gewichte $-p (\neq 0)$ bezüglich des kontravarianten Vektorfeldes $\{v^i\}$, die wiederum Weylsche Dichten vom Gewicht $-p$ sind. Sie haben also eine gemeinsame Transformationsformel, die für das Objekt $\mathfrak{w}$ folgendermassen lautet:⁵⁾

$$(6.1) \quad \overline{\mathfrak{w}} \stackrel{\text{def}}{=} |\Delta|^{-p} \mathfrak{w}.$$

Wir nehmen an, daß die Funktion $\mathfrak{w}$ (in $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{X}_n$) partielle Ableitungen

$$\partial_j \mathfrak{w} \quad (j = 1, \dots, n)$$

besitzt. Diese Ableitungen transformieren sich (wegen (6.1)) nach den Formeln

$$(6.2) \quad \overline{\partial_j \mathfrak{w}} = |\Delta|^{-p} A_j^a (\partial_a \mathfrak{w} - p \mathfrak{w} \Delta^{-1} \partial_a \Delta). \quad (j = 1, \dots, n)$$

Nach der Definition der Differentialkomitanten in bezug auf das kontravariante Vektorfeld $\{v^i\}$ (s. die Voraussetzungen **1°**, **2°**, **3°** der Definition 3.) folgt, daß

⁴⁾ S. Fussnote 3.

⁵⁾ Bei der Nummerierung der in dem § 6 vorkommenden Relationen werden wir so vorgehen, daß eine Relation des § 6, die eine zu einer Relation (5.x) von § 5 analoge Rolle spielt, die Nummerierung (6.x) besitzt.

1. das Objekt $\mathfrak{R}$ von den Objekten $\mathfrak{w}$, $\{v^i\}$ und deren partiellen Ableitungen erster Ordnung $\partial_j \mathfrak{w}$, $\partial_i v^k$ abhängt,

$$\mathfrak{R} = f^*(\mathfrak{w}; \partial_j \mathfrak{w}; v^k; \partial_i v^k),$$

2. die Funktion f^* eine Lösung der Funktionalgleichung

$$(6.3) \quad |A|^{-p} \mathfrak{R} = f^* [|A|^{-p} \mathfrak{w}; |A|^{-p} A_j^a (\partial_a \mathfrak{w} - p \mathfrak{w} \Delta^{-1} \partial_a \Delta); \tilde{A}_b^k v^b; A_i^c \tilde{A}_d^k \partial_c v^d - A_{ie}^g \tilde{A}_g^k \tilde{A}_f^e v^f]$$

(vgl. die Gleichung (4)) sein muß.

Wir bemerken, daß die Lösungen der Gleichungen (5.3) und (6.3) bezüglich der Teilmenge der Parameter, die der Bedingung

$$\mathbf{M}_1 \quad \Delta = \det(A_j^i) = 1$$

genügen, übereinstimmen. Das folgt einfach daraus, daß die Gleichungen (5.3) und (6.3) im Falle $\mathbf{M}_1$ in dieselbe Funktionalgleichung übergehen.

Folglich braucht man nur solche Folgerungen von (5.3) zu überprüfen, die wir aus (5.3) mit $\mathbf{K}$ -Transformationen vom Typus

$$\Delta \neq 1$$

gewonnen haben. Diese Fälle waren die folgenden:

Der Fall $n=1$ Satz 1 liefert unmittelbar die vollständige Lösung unseres Problems, wenn wir nur die Lösungen der Gleichung (2.11) für den Spezialfall

$$\varepsilon \equiv 1, \quad c = -p$$

betrachten. Dies ergibt:

$$\mathfrak{R} = \begin{cases} |v|^p H_1(|v|^{-p} \mathfrak{w}, |v|^{-p} (v d\mathfrak{w} - p \mathfrak{w} dv)) & (v \neq 0) \\ & \text{(entsprechend dem Fall I.),} \\ |\mathfrak{w}| H_2(\operatorname{sgn} \mathfrak{w}, dv) & (v=0, \mathfrak{w} \neq 0, p \neq 0) \\ & \text{(entsprechend dem Fall II. A. 1.),} \\ |d\mathfrak{w}|^{\frac{p}{p-1}} H_3(dv) & (v=0, \mathfrak{w}=0, d\mathfrak{w} \neq 0, p \neq 1) \\ & \text{(entsprechend dem Fall II. B. 1. b}_1 \text{.),} \\ 0 & (v=0, \mathfrak{w}=0, d\mathfrak{w} \neq 0, p=1) \\ & \text{(entsprechend dem Fall II. B. 1. b}_2 \text{.),} \\ 0 & (v=0, \mathfrak{w}=0, d\mathfrak{w}=0) \\ & \text{(entsprechend dem Fall II. B. 2. a.)} \end{cases}$$

($H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$, $H_3(x)$ sind beliebige Funktionen.)

Der Fall $n > 1$, $\{v^i\} \neq \{0\}$, $\mathfrak{w} \neq 0$:

Im Zusammenhang mit der Darstellung

$$(6.8) \quad \mathfrak{R} = g_2^*(\mathfrak{w}, \mathfrak{R}_0)$$

bemerken wir, daß die Funktion g_2^* (wegen der Gleichung (6.3)) *positiv* homogen von erster Ordnung sein muß, und es folgt aus (6.8)

$$\mathfrak{B} = |\mathfrak{w}| g_2^*(\operatorname{sgn} \mathfrak{w}, \mathfrak{B}_0 |\mathfrak{w}|^{-1}).$$

($\mathfrak{B}_0 \stackrel{\text{df}}{=} v^a \hat{\partial}_a \mathfrak{w} - p \mathfrak{w} \hat{\partial}_a v^a = \mathfrak{L}_v \mathfrak{w}$ bezeichnet die Liesche Ableitung der Dichte $\mathfrak{w}$ bezüglich des Feldes $\{v^i\}$.)

Der Fall $n > 1$, $\{v^i\} \neq \{0\}$, $\mathfrak{w} = 0$. Wir haben für $\mathfrak{B}$ die zu (5.10) analoge Beziehung

$$(6.10) \quad \mathfrak{B} = h_2^* \left(\mathfrak{B}_0 + v^2 (1 - v^1) \frac{\partial_2 \mathfrak{w}}{v^1}, \frac{1}{v^1} \partial_2 \mathfrak{w}, \partial_3 \mathfrak{w}, \dots, \partial_n \mathfrak{w} \right), \quad (\mathfrak{B}_0 = v^a \hat{\partial}_a \mathfrak{w}).$$

1° Im Unterfall $\{\partial_j \mathfrak{w}\} = \{0\}$ ist $\mathfrak{B}$ eine Konstante

$$\mathfrak{B} = c^*,$$

die wiederum verschwinden muß:

$$\mathfrak{B} = 0.$$

2° Im Unterfall $\partial_1 \mathfrak{w} \neq 0$, $\partial_2 \mathfrak{w} = \dots = \partial_n \mathfrak{w} = 0$ ist die Funktion h_2 in

$$\mathfrak{B} = \tilde{h}_2(\mathfrak{B}_0, 0, \dots, 0),$$

positiv homogen von erster Ordnung in ihren Veränderlichen $\mathfrak{B}_0$, daher erhalten wir

$$(6.11) \quad \mathfrak{B} = \tilde{h}_2(\operatorname{sgn} \mathfrak{B}_0) |\mathfrak{B}_0|.$$

3° Der Unterfall $\partial_1 \mathfrak{w}, \partial_2 \mathfrak{w}, \dots, \partial_r \mathfrak{w} \neq 0$; $\partial_{r+1} \mathfrak{w} = \dots = \partial_n \mathfrak{w} = 0$. ($1 < r \leq n$)

Die Gestalt (6.11) von $\mathfrak{B}$ gilt auch im Falle

$$\mathfrak{B}'_0 \stackrel{\text{df}}{=} v^1 \partial_1 \mathfrak{w} + v^2 \partial_2 \mathfrak{w} \neq 0,$$

wie man ähnlich wie in § 5. nachweisen kann.

Der Unterfall $n = 2$, $\mathfrak{B}'_0 = \mathfrak{B}_0 = 0$.

Die Größe

$$\tilde{\mathfrak{w}} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{v^1} \partial_2 \mathfrak{w} = -\frac{1}{v^2} \partial_1 \mathfrak{w}$$

stellt jetzt eine *gewöhnliche* Dichte vom Gewicht $-p+1$ dar,

$$\tilde{\mathfrak{w}} = \operatorname{sgn} A |A|^{-p+1} \cdot \mathfrak{w},$$

folglich haben wir für $\mathfrak{B}$ nach (6.10) der Ausdruck

$$\mathfrak{B} = h_2^*(v^2(1-v^1) \tilde{\mathfrak{w}}, \tilde{\mathfrak{w}}).$$

Man kann diese Gestalt von $\mathfrak{B}$ wieder mit Hilfe der $\mathbf{K}_0$ -Transformation $\mathbf{T}_{17}$ zu dem Form

$$\mathfrak{B} = \tilde{h}_3(\mathfrak{w})$$

($\tilde{h}_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} h_2^*(0, x)$) bringen, die zeigt, daß $\mathfrak{B}$ nur von der gewöhnlichen Dichte $\tilde{w}$ abhängt.

Ist $p=1$, so wird $\tilde{w}$ ein Biskalar,

$$\tilde{\tilde{w}} = \text{sgn } \Delta \tilde{w},$$

und wir können mit Hilfe von $\mathbf{K}_0$ -Transformationen des Typus

$$\Delta = \text{sgn } \tilde{w}$$

folgern, daß $\mathfrak{B}$ nur von dem Skalar $|\tilde{w}|$ abhängen kann. Die Komitanten von Skalaren, die (gewöhnliche oder Weylsche) Dichten sind, verschwinden identisch, also muß die Relation

$$\mathfrak{B} = 0$$

auch in unserem Unterfall

$$\{v^i\} \neq \{0\}, \quad n=2, \quad w=0, \quad \mathfrak{B}'_0=0, \quad p=1$$

gelten.

Wenn p verschieden von Eins ist, so muß die Funktion $\tilde{h}_3$ wiederum eine positiv homogene Funktion erster Ordnung sein. Deswegen und wegen der Grundgleichung (5.3) folgt durch Anwendung einer Transformation von Typus

$$\Delta = \text{sgn } \tilde{w} \cdot |\tilde{w}|^{\frac{1}{p-1}}$$

der Ausdruck

$$\mathfrak{B} = c |\tilde{w}|^{\frac{p}{p-1}} \quad (c \text{ konstante}).$$

Es sei in weiteren Unterfälle die Gültigkeit der Relationen

$$\{v^i\} \neq \{0\}; \quad n > 2; \quad \partial_1 w, \dots, \partial_r w \neq 0, \quad \partial_{r+1} w = \dots = \partial_n w = 0; \quad \mathfrak{B}'_0 = 0 \quad (r \geq 2)$$

vorausgesetzt. Wir können — wie in § 5 — unter Benutzung der Transformationen $\mathbf{T}'_{17}, \mathbf{T}_{20}, \mathbf{T}_{21}, \mathbf{T}_{22}$ beweisen, daß entweder

$$\mathfrak{B} = \text{Konstante} \quad (\mathfrak{B}_0 = 0!)$$

ist, oder die Komitante $\mathfrak{B}$ allein von der Weylschen Dichte

$$\mathfrak{B}_0 (\neq 0)$$

abhängt.

In ersten Falle folgt die Gleichheit

$$\mathfrak{B} = 0.$$

Wenn $\mathfrak{B}_0$ von Null verschieden ist, so erhalten wir die Darstellung

$$\mathfrak{B} = h_1^* (\text{sgn } \mathfrak{B}_0) \cdot |\mathfrak{B}_0|$$

ähnlich zu (6.11).

Der Fall $n > 1, v^i = 0$. In diesem Fall stellt $\{\partial_i v^k\}$ wieder einen gemischten Tensor T_i^k zweiter Stufe dar. Das System seiner sämtlichen unabhängigen skalaren Komitanten sei wieder mit

$$\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t$$

bezeichnet.

Die Komitante $\mathfrak{B}$ hängt also von $\mathfrak{w}$, von dessen partiellen Ableitungen $\partial_j \mathfrak{w}$ und von dem Tensor T_i^k ab:

$$\mathfrak{B} = f^*(\mathfrak{w}; \partial_j \mathfrak{w}; T_i^k),$$

wobei die Funktion f^* eine Lösung der Funktionalgleichung

$$(6.19) \quad |\Delta|^{-p} \mathfrak{B} = f^* [|\Delta|^{-p} \mathfrak{w}; |\Delta|^{-p} A_j^a (\partial_a \mathfrak{w} - p \mathfrak{w} \Delta^{-1} \partial_a \Delta); A_i^a \bar{A}_b^k T_a^b]$$

sein muß.

Die Gleichungen (5.19) und (6.19) haben dieselben Lösungen bezüglich der Teilmenge $\mathbf{M}_1$ ($\Delta = 1$) der Menge von $\mathbf{K}$ -Koordinatentransformationen (1), also genügt es wieder, nur diese Fälle zu untersuchen, in denen wir die Folgerungen von (5.19) mit Hilfe von $\mathbf{K}$ -Transformationen des Typus $\Delta \neq 1$ gewonnen haben.

Der Fall a.) $\mathfrak{w} \neq 0$.

Wir gewinnen aus (6.19) durch die $\mathbf{K}$ -Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_{1,4}: \quad A_j^i &= \delta_j^i (\Delta = 1); \quad A_{kk}^k = \frac{\partial_k \mathfrak{w}}{p \mathfrak{w}} \quad (\text{n. s. über } k; k = 1, \dots, n) \\ A_{qr}^p &= 0 \quad ((p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2 > 0) \end{aligned}$$

und dann durch eine die Relationen (1.5), (1.7) befriedigende $\mathbf{K}_1$ -Transformation die zu (5.21) analoge Beziehung

$$(6.21) \quad \mathfrak{B} = h^*(\mathfrak{w}; \underset{(1)}{\sigma}, \dots, \underset{(n)}{\sigma}, \tau_1, \dots, \tau_t),$$

wo die Funktion h^* eine positiv homogene Funktion bezüglich ihrer Veränderlichen $\mathfrak{w}$ ist. Folglich haben wir für $\mathfrak{B}$ den Ausdruck⁶⁾

$$\mathfrak{B} = h^*(\operatorname{sgn} \mathfrak{w}; \underset{(1)}{\sigma}, \dots, \underset{(n)}{\sigma}, \tau_1, \dots, \tau_t) \cdot |\mathfrak{w}|.$$

Der Fall b₁) $\mathfrak{w} = 0$, $\{\partial_j \mathfrak{w}\} = \{0\}$.

Man kann wieder beweisen, daß $\mathfrak{B}$ nur von den Skalaren

$$\underset{(1)}{\sigma}, \dots, \underset{(n)}{\sigma}, \tau_1, \dots, \tau_t$$

abhängt,

$$\mathfrak{B} = g^*(\underset{(1)}{\sigma}, \dots, \underset{(n)}{\sigma}, \tau_1, \dots, \tau_t).$$

Daraus und aus (6.19) folgt das Verschwinden von $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} = 0.$$

Der Fall b₂) $\mathfrak{w} = 0$, $\{\partial_j \mathfrak{w}\} \neq \{0\}$.

Die Komponenten $\partial_j \mathfrak{w}$ ($j = 1, \dots, n$) bilden jetzt eine kovariante W -Vektordichte vom Gewicht $-p$:

$$\overline{\partial_j \mathfrak{w}} = |\Delta|^{-p} A_j^a \partial_a \mathfrak{w}.$$

⁶⁾ Die Veränderlichen $\tau_1, \dots, \tau_t$ sollen wieder positive ganze Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^t \tau_i = n$$

sein.

Nach unseren Annahmen muß die Komitante $\mathfrak{B}$ eine algebraische Komitante der Objekte $\{\partial_j \mathfrak{w}\}$ und $\{T_i^k\}$ sein. Eine die Relationen (1. 5), (1. 7) erfüllende Transformation (bezeichnet mit T_{24}) zeigt, daß $\mathfrak{w}$ nur von

$$\{\mathfrak{v}_j\} \stackrel{\text{df}}{=} \{\partial_j \mathfrak{w}\}$$

und von den Skalaren

$$\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t$$

abhängen kann:

$$(I) \quad \mathfrak{B} = h^*(\mathfrak{v}_j; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t),$$

wobei die Größen $\mathfrak{v}_j$ ($j=1, \dots, n$) die durch T_{24} transformierten Komponenten der Vektordichte $\{\partial_j \mathfrak{w}\}$ sind.

Die Komponenten $\mathfrak{v}_j$ stellen natürlich (in einem neuen Bezugssystem K_3) wieder eine kovariante W -Vektordichte vom Gewicht $-p$ dar.

Aus $\{\partial_j \mathfrak{w}\} \neq \{0\}$ folgt die Ungleichung

$$(6.24) \quad \{\mathfrak{v}_j\} \neq \{0\}.$$

Wir nehmen wieder an, daß (6.24) durch die Relation

$$\mathfrak{v}_1 \neq 0$$

verwirklicht ist und wenden eine K_3 -Transformation vom Typus

$$T'_{23}: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{v}_2 & \mathfrak{v}_3 & \dots & \mathfrak{v}_n \\ \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_1 & \dots & \mathfrak{v}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\Delta = \frac{1}{\mathfrak{v}_1} \right)$$

auf die Gestalt (I) von $\mathfrak{B}$ an. Wir erhalten

$$\mathfrak{B} = h_1^*[\mathfrak{v}_1|^p; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t] \cdot |\mathfrak{v}_1|^{-p},$$

$$(h_1(x; y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_t) \stackrel{\text{df}}{=} h(x\delta_{j1}; y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_t))$$

Gemäß der Gleichung (6.19) muß die Funktion h_1^* eine Lösung der Funktionalgleichung

$$(II) \quad |\Delta|^{-p} \mathfrak{B} = |\Delta|^{p^2} |A_1^a \mathfrak{v}_a|^{-p} h_1^*[\Delta|^{-p^2} |A_1^a \mathfrak{v}_a|^p; \sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}, \tau_1, \dots, \tau_t]$$

sein.

Wegen $n > 1$ kann man die K_3 -Transformation

$$T_{25}: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\Delta = 1)$$

anwenden. Die Funktionalgleichung (II) gibt dann die Relation

$$\mathfrak{B} = h_1^*[1; \underset{(1)}{\sigma}, \dots, \underset{(n)}{\sigma}, \tau_1, \dots, \tau_t],$$

die zeigt, daß $\mathfrak{B}$ eine Funktion von Skalaren sein muß. $\mathfrak{B}$ ist aber eine W -Dichte vom Gewicht $-p$ ($\neq 0$), somit muß $\mathfrak{B}$ nach unserer Grundgleichung (6.19) die Gleichheit

$$|\Delta|^{-p} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$$

erfüllen. Diese ergibt die einzige Lösung von (II) in der Form

$$\mathfrak{B} = 0.$$

*

Unsere Ergebnisse über die Differentialkomitanten von W -Objekten in bezug auf das kontravariante Vektorfeld $\{v^i\}$ können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 6. Ist $\mathfrak{B}$ eine Differentialkomitante der W -Dichte w vom Gewicht $-p$ ($\neq 0$) bezüglich des kontravarianten Vektorfeldes $\{v^i\}$, so kann $\mathfrak{B}$ die folgenden Formen haben und nur diese:

Im eindimensionalen Raum X_1

$$\mathfrak{B} = \begin{cases} |v|^p H_1(|v|^{-p} w, |v|^{-p} \mathfrak{B}_0), & (v \neq 0) \\ |w| H_2(\operatorname{sgn} w, dv), & (v = 0, w \neq 0) \\ |w|^{\frac{p}{p-1}} H_3(dw), & (v = 0, w = 0, dw \neq 0, p \neq 1) \\ 0, & (v = 0, w = 0, dw \neq 0, p = 1) \\ 0, & (v = 0, w = 0, dw = 0) \end{cases}$$

Im n (> 1)-dimensionalen Raum X_n :

Wenn der Vektor $\{v^i\}$ verschieden vom Nullvektor ist,

$$\{v^i\} \neq \{0\},$$

so gilt für $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned} \text{so } g \quad \mathfrak{B} &= |w| \cdot H_4(\operatorname{sgn} w, |w|^{-1} \mathfrak{B}_0) \quad \text{falls } w \neq 0, \\ \mathfrak{B} &= |\mathfrak{B}_0| \cdot H_5(\operatorname{sgn} \mathfrak{B}_0) \quad \text{falls } w = 0, \mathfrak{B}'_0 \neq 0, \\ &\quad 0 \quad (p = 1) \\ \mathfrak{B} &= \begin{cases} 0 & (p = 1) \\ C |w|^{\frac{p}{p-1}} & (p \neq 1) \end{cases} \quad \text{falls } w = 0, \mathfrak{B}'_0 = 0, n = 2, \\ \mathfrak{B} &= |\mathfrak{B}_0| \cdot H_6(\operatorname{sgn} \mathfrak{B}_0) \quad \text{falls } w = 0, \mathfrak{B}'_0 = 0, n > 2, \\ &\left(\mathfrak{B}_0 \stackrel{\text{df}}{=} v^a \partial_a w - p w \partial_a v^a = \mathfrak{L}_v w, \mathfrak{B}'_0 \stackrel{\text{df}}{=} v^1 \partial_1 w + v^2 \partial_2 w, \tilde{w} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial_2 w}{v^1} \right). \end{aligned}$$

In den Punkte von G ($\subseteq X_n$), in denen der Vektor $\{v^i\}$ der Nullvektor ist,

$$\{v^i\} = \{0\},$$

hat $\mathfrak{B}$ die Form:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &= |\mathfrak{w}| \cdot K(\operatorname{sgn} \mathfrak{w}; \underset{(1)}{\sigma}, \dots, \underset{(n)}{\sigma}, \tau_1, \dots, \tau_t) \quad \text{falls } \mathfrak{w} \neq 0, \\ \mathfrak{B} &= 0 \quad \text{falls } \mathfrak{w} = 0.\end{aligned}$$

(Die Größe $\mathfrak{w}$ bezeichnet hier eine gewöhnliche Dichte vom Gewicht $(p-1)$.)
Die Skalaren $\underset{(1)}{\sigma}, \dots, \underset{(n)}{\sigma}, \tau_1, \dots, \tau_t$ sind im Falle $\{v^i\} = \{0\}$ ein System von den skalaren Komitanten des Tensors $\{\partial_k v^i\}$.

Die Funktionen⁷⁾

$$H_1(x, y), H_2(x, y), H_3(x), H_4(x, y), H_5(x), H_6(x), K(x; y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$$

und die Konstante C sind beliebig.

§ 7. Die Lieschen Ableitung homogener linearer geometrischer Objekte bezüglich eines kontravarianten Vektorfeldes als Differentialkomitanten der gleichen Objekte bezüglich dieses Feldes

Aus der Gestalt der Lieschen Ableitung

$$\theta_0 = v d\Omega + c\Omega dv$$

der homogenen linearen geometrischen Objekte (im Raum X_1), aus der Gestalt der Lieschen Ableitung der Skalaren, der kontra-, bzw. der kovarianten Vektoren, der gewöhnlichen und Weylschen Dichten (im Raum X_n ; $n > 1$) in bezug auf ein kontravariantes Vektorfeld $\{v^i\}$ (s. A. NIJENHUIS [8], J. A. SCHOUTEN [9]) folgt, daß die Liesche Ableitung der betrachteten Objekte die Forderungen $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ der Definition 3. erfüllt. Folglich kann man sie als eine Differentialkomitante des betreffenden homogenen linearen geometrischen Objektes bezüglich des Vektorfeldes $\{v^i\}$ auffassen.

Es gilt nämlich der folgende

Satz. Wenn wir in unseren Sätzen 1., 2., 3., 4., 5., 6. die auftretenden (beliebigen) Funktionen bzw. Konstanten

im Falle der eindimensionalen Objekte mit $\kappa(x, y) = y$, $\lambda(x, y) = cxy$, $\mu(x, y, z) = 0$,

$$v(x, y) = 0, \quad \varrho(x) = 0, \quad \tau(x) = 0;$$

im Falle der Skalaren mit $F_1(x, y) = y$, $F_2(x) = 0$, $F_3(x) = 0$, $F_4(x) = 0$,

$$F_5(x; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_t) = 0;$$

im Falle der kovarianten Vektoren mit $g_1(x, y) = y$, $g_2(x) = x$,

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1;$$

im Falle der kontravarianten Vektoren mit $G_1(x, y) = y$, $G_2(x) = -x$, $\Gamma(x, y) = y$,

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = 1;$$

⁷⁾ S. Fußnote ⁶⁾.

im Falle der gewöhnlichen Dichten mit $h_1(x, y) = y$, $h_2(x) = -px$,

$$k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_t) = -p \sum_{j=1}^t x_{t_j} \left(t_j \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^j y_i \right), \quad c = 1;$$

im Falle der Weylschen Dichten mit $H_1(x, y) = y$, $H_2(x, y) = -pxy$, $H_3(x) = 0$,

$$H_4(x, y) = y, H_5(x) = x, H_6(x) = x, K(x; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_t) =$$

$$= -px \sum_{j=1}^t y_{r_j} \left(r_j \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^j z_i \right), \quad C = 0$$

wählen, so gewinnen wir jeweils gerade die klassische Liesche Ableitung des betrachteten geometrischen Objektes als einen Spezialfall der allgemeinsten Form der Differentialkomitante des betrachteten Objektes bezüglich des kontravarianten Vektorfeldes $\{v^i\}$.

*

Zum Schluss spreche ich Herrn Professor J. ACZÉL und Herrn Professor S. GOŁĄB für ihre wertvollen Ratschläge auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

Literatur

- [1] J. ACZÉL, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel—Stuttgart*, 1960.
- [2] J. ACZÉL—S. GOŁĄB, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, *Warszawa*, 1960.
- [3] J. ACZÉL—M. HOSSZÚ, On concomitants of mixed tensors, *Ann. Polon. Math.* **13** (1963), 169—171.
- [4] F. R. GANTMACHER, Matrizenrechnung I., *Berlin*, 1958.
- [5] M. KUCHARZEWSKI, Über die Vektorkomitanten der Vektorfelder, *Ann. Polon. Math.* **9** (1961), 299—309.
- [6] M. KUCHARZEWSKI, Die kovarianten Vektorkomitanten, die aus kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor (N. S.)* **12** (1962), 140—150.
- [7] M. KUCHARZEWSKI, Die skalaren Komitanten, welche aus kovarianten und kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor (N. S.)* **12** (1962), 158—166.
- [8] A. NIJENHUIS, Theory of the geometric object, *Univ. Amsterdam* (1952).
- [9] J. A. SCHOUTEN, Ricci-Calculus, 2nd edition, *Berlin—Göttingen—Heidelberg* (1954).

(Eingegangen am 11. Dezember 1963.)