

Abzählung von Wäldern eines gegebenen Typs in regulären und biregulären Graphen, II

HORST SACHS (Ilmenau)

1. Einleitung

Wir knüpfen an Teil I dieser Arbeit [1] an und übernehmen die dort gegebenen Definitionen und Bezeichnungen. Es wurde gezeigt ([1], Satz 1):

Es seien W ein beliebiger AB-Wald und $G = G(r, s)$ ein beliebiger biregulärer Graph mit p A-Knotenpunkten vom Grade r und q B-Knotenpunkten vom Grade s , dessen Taillenweite t größer ist als die erste Überdeckungsweite w_1 von W . Dann hängt die Anzahl $A_1 = A_1(W, G)$ der in G als Untergraphen enthaltenen verschiedenen zu W isomorphen Wälder außer von W nur von den Zahlen p, q, r, s ab.

Der Beweis zu diesem Satz lieferte zugleich eine Methode zur effektiven Berechnung der Anzahlen $A_1(W, G)$, welche jedoch schon in einfachen Fällen nur mühsam zu handhaben ist. Im vorliegenden Teil II soll gezeigt werden, daß für eine wichtige Klasse von Wäldern W zwischen den Anzahlen $A_1(W, G)$ lineare Relationen bestehen, die zur leichteren sukzessiven Berechnung dieser Zahlen dienen können.

2. Vorbereitendes; Hilfssätze

Als A-Wald vom Grade r bezeichnen wir jeden AB-Wald ohne isolierte B-Knotenpunkte, dessen jeder A-Knotenpunkt den Grad r hat; dabei ist r eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots$

Beispiel: Fassen wir die Knotenpunkte eines gewöhnlichen Waldes ohne isolierte Knotenpunkte als B-Knotenpunkte und die Kantenmitten als A-Knotenpunkte auf, so entsteht ein A-Wald vom Grade 2.

Ist ein A-Wald W vom Grade r in einem biregulären Graphen $G = G(r, s)$ als Untergraph enthalten, so ist er darin zugleich als wesentlicher Untergraph enthalten. Daraus folgt, daß für A-Wälder vom Grade r die Anzahlen A_1 und A_2 einander gleich sind, so daß wir den Index fortlassen können:

$$A_1(W, G) = A_2(W, G) = A(W, G).$$

Wir werden im Folgenden ausschließlich A-Wälder vom Grade r betrachten, und wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welcher Graph $G = G(r, s)$ gemeint ist, schreiben wir abkürzend $A(W, G) = A(W)$.

Ferner gilt für $r=0$ sowie für $r \geq 2$: Für einen A-Wald W vom Grade r stimmen beide Überdeckungsweiten mit der Durchmesserumme überein:

$$w_1(W) = w_2(W) = D(W).$$

Daraus folgt, daß die beiden Behauptungen (I) und (II) von [1], Satz 1, für einen A-Wald W vom Grade $r \neq 1$ dasselbe aussagen. Beachten wir noch, daß im Falle $r=1$ jeder bireguläre Graph $G=G(r, s)=G(1, s)$ selbst ein Wald ist und folglich die Taillenweite ∞ hat, so können wir den Satz 1 von [1] bei Beschränkung auf A-Wälder für alle Zahlen $r=0, 1, 2, \dots$ einheitlich wie folgt formulieren:

Es seien r und s zwei beliebige nicht-negative ganze Zahlen, W ein beliebiger (fester) A-Wald vom Grade r , $G=G(r, s)$ ein beliebiger biregulärer Graph mit p A-Knotenpunkten vom Grade r und q B-Knotenpunkten vom Grade s , dessen Taillenweite t größer ist als die Durchmesserumme D von W .

Dann gilt: Die Anzahl $A=A(W, G)$ der in G als Untergraphen enthaltenen verschiedenen zu W isomorphen A-Wälder ist durch W und die Zahlen p, q, r, s bestimmt.

Für das Folgende setzen wir zunächst $r \geq 1$ voraus, auf den trivialen Fall $r=0$ kommen wir später zurück.

Es sei M eine beliebige Menge von A-Knotenpunkten eines biregulären Graphen G . Der Untergraph U von G bestehe aus den sämtlichen Kanten, die in G von den A-Knotenpunkten der Menge M ausgehen, sowie aus den sämtlichen Endknotenpunkten aller dieser Kanten. Wir sagen dann, U werde von M in G erzeugt.

Jeder in einem biregulären Graphen $G(r, s)$ enthaltene A-Wald vom Grade $r \geq 1$ wird von der Menge seiner A-Knotenpunkte erzeugt.

Es sei X ein in einem Graphen $G=G(r, s)$ als Untergraph enthaltener A-Wald vom Grade r , dessen A-Knotenpunkte die nicht-leere Menge M bilden; es seien P ein A-Knotenpunkt von X , P' ein A-Knotenpunkt von G , welcher nicht zu X gehört; die Menge $M^* = M - \{P\}$ erzeuge in G den Untergraphen X^* , die Menge $M' = M + \{P'\}$ erzeuge in G den Untergraphen X' . Wir sagen kurz, X^* gehe aus X durch Fortlassen von P und X' gehe aus X durch Hinzufügen von P' hervor. Hat X mindestens 2 A-Knotenpunkte, so ist X^* ein (nicht-leerer) A-Wald; ist X' ein Wald, so ist X' notwendig ein A-Wald. Wir beachten, daß X' wesentlich davon abhängt, in welcher Weise X und P' in G eingebettet sind, während X^* allein durch X und P völlig bestimmt ist: Wir können die Operation des Fortlassens für einen beliebigen A-Wald W definieren, ohne auf einen W als Untergraphen enthaltenden biregulären Graphen Bezug zu nehmen.

Wir werden im Folgenden einen in einem $G=G(r, s)$ enthaltenen A-Wald mit dem Buchstaben X bezeichnen, wenn es für die Betrachtung wesentlich ist, in welcher Weise der A-Wald in G eingebettet ist.

Der A-Wald W^* entstehe aus dem A-Wald W durch Fortlassen des A-Knotenpunktes P von W . Die Anzahl n der Komponenten kann beim Übergang von W nach W^* um 1 abnehmen, ungeändert bleiben oder zunehmen;

im 1. Falle

$$n(W^*) = n(W) - 1$$

heiße P ein quasi-isolierter A-Knotenpunkt von W ,

im 2. Falle

$$n(W^*) = n(W)$$

heiße P ein Rand-A-Knotenpunkt von W ,

im 3. Falle

$$n(W^*) > n(W)$$

heiße P ein innerer A-Knotenpunkt von W . Die Zahl

$$g = n(W^*) - n(W) + 1$$

nennen wir den Rang $g = g(P)$ des A-Knotenpunktes P in bezug auf W , so daß

1. die quasi-isolierten A-Knotenpunkte von W durch $g = 0$,
 2. die Rand-A-Knotenpunkte von W durch $g = 1$ und
 3. die inneren A-Knotenpunkte von W durch $g > 1$
- charakterisiert sind.

Der Rang $g(P)$ ist gleich der Anzahl derjenigen B-Knotenpunkte von W , welche außer mit P noch mit mindestens einem weiteren A-Knotenpunkt von W durch eine Kante verbunden sind, und auch gleich der Anzahl derjenigen in P entspringenden Äste der P enthaltenden Komponente von W , welche mindestens einen A-Knotenpunkt besitzen. Beim Übergang von W nach W^* werden also genau $r - g$ mit P (und nur mit P) verbundene B-Knotenpunkte fortgelassen.

Hilfssatz 1. (anschaulich evident): *Jeder A-Baum H mit mehr als einem A-Knotenpunkt besitzt mindestens zwei Rand-A-Knotenpunkte.*

Angenommen nämlich, das sei nicht der Fall. Besitzt dann H genau einen Rand-A-Knotenpunkt, so möge dieser P_0 heißen, und besitzt H gar keinen Rand-A-Knotenpunkt, so sei P_0 ein beliebiger A-Knotenpunkt von H . Dann ist jeder von P_0 verschiedene A-Knotenpunkt von H ein innerer A-Knotenpunkt mit $g \geq 2$, und wir können in P_0 beginnend eine unbegrenzte Folge $P_0 Q_0 P_1 Q_1 P_2 Q_2 \dots$ von A- und B-Knotenpunkten durchlaufen, wobei stets zwei benachbarte Knotenpunkte in H durch eine Kante verbunden sind und $P_{i+1} \neq P_i$; $Q_{i+1} \neq Q_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) ist. Da nur endlich viele Knotenpunkte vorhanden sind, müssen wir einmal auf einen schon durchlaufenen Knotenpunkt stoßen; das würde aber bedeuten, daß H einen Kreis besitzt, was der Definition des Baumes widerspricht.

Daraus folgt insbesondere:

Hilfssatz 2. *Man kann jeden A-Baum H zeichnen, indem man von dem nur einen quasi-isolierten A-Knotenpunkt enthaltenden A-Baum H_0 ausgehend sukzessive Rand-A-Knotenpunkte „anheftet“ (= hinzufügt).*

Da H_0 genau einen A-Knotenpunkt und r B-Knotenpunkte enthält und da mit jedem neuen A-Knotenpunkt zugleich genau $r - 1$ neue B-Knotenpunkte angeheftet werden, besteht zwischen der Anzahl $p(H)$ der A-Knotenpunkte von H und der Anzahl $q(H)$ der B-Knotenpunkte von H die Relation

$$(1) \quad q(H) = (r - 1)p(H) + 1.$$

Wird (1) auf die sämtlichen Komponenten eines A-Waldes W angewandt und dann addiert, so findet man

Hilfssatz 3. Für einen beliebigen A-Wald W vom Grade r mit $p(W)$ A-Knotenpunkten, $q(W)$ B-Knotenpunkten und $n(W)$ Komponenten gilt

$$(2) \quad q(W) = (r-1)p(W) + n(W).$$

Wir betrachten einen in einem biregulären Graphen $G = G(r, s)$ enthaltenen A-Wald X vom Grade r und fragen nach der Anzahl $f(X)$ der freibleibenden Kantenansätze, d. h. nach der Anzahl derjenigen von den B-Knotenpunkten von X ausgehenden Kanten, welche zu G , aber nicht zu X gehören. Es gilt

Hilfssatz 4. Die Anzahl der freibleibenden Kantenansätze eines beliebigen in einem biregulären Graphen $G = G(r, s)$ enthaltenen A-Waldes X vom Grade r mit $p(X)$ A-Knotenpunkten, $q(X)$ B-Knotenpunkten und $n(X)$ Komponenten ist gleich

$$(3) \quad f(X) = s \cdot q(X) - r \cdot p(X) = (rs - r - s)p(X) + s \cdot n(X).$$

BEWEIS. Die Anzahl der von den A-Knotenpunkten von X ausgehenden zu X gehörigen Kanten ist gleich $r \cdot p(X)$, die Anzahl der von den B-Knotenpunkten von X ausgehenden zu G gehörigen Kanten ist gleich $s \cdot q(X)$, von diesen gehören $r \cdot p(X)$ zu X , und die Differenz $s \cdot q(X) - r \cdot p(X)$ ist gleich der Anzahl $f(X)$ der freibleibenden Kantenansätze. — Die zweite der Gleichungen (3) folgt aus der ersten auf Grund von (2).

Es sei W ein beliebiger A-Wald, dessen B-Knotenpunkte Grade haben mögen, von denen keiner größer als die natürliche Zahl s ist. Dann kann man von der Anzahl $f_s(W)$ der freibleibenden Kantenansätze von W in bezug auf s sprechen, ohne auf einen W als Untergraphen enthaltenden Graphen G Bezug zu nehmen: Man denke sich alle B-Knotenpunkte von W mit genau s Kantenansätzen ausgestattet, $f_s(W)$ sei dann die Anzahl derjenigen zu den B-Knotenpunkten gehörenden Kantenansätze, in denen keine Kante von W entspringt. (3) bleibt offenbar gültig:

$$(3') \quad f_s(W) = s \cdot q(W) - r \cdot p(W) = (rs - r - s)p(W) + s \cdot n(W).$$

Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir $f(W)$ anstelle von $f_s(W)$.

3. Das I. Relationensystem

Wir betrachten einen festen biregulären Graphen $G = G(r, s)$ der Tailenweite t . Ist die natürliche Zahl h kleiner als $t/2 - 1$, so sind wir sicher, daß beliebige $h+1$ (oder weniger) A-Knotenpunkte von G stets einen A-Wald W erzeugen, und zwar ist die Durchmessersumme $D(W)$ gewiß kleiner als t .

Alle im Folgenden betrachteten A-Wälder seien vom Grade r , und die Grade ihrer B-Knotenpunkte seien $\leq s$.

- $a(h)$ sei die Anzahl der nicht-isomorphen solchen A-Wälder W mit $p(W) = h$ A-Knotenpunkten,
 $x_W(X)$ sei die Anzahl der zum A-Wald W' isomorphen, in G liegenden A-Wälder X' , die aus einem festen, in G liegenden A-Wald X durch Hinzufügen genau eines A-Knotenpunktes von G erzeugt werden können,

- $u_W(X')$ sei die Anzahl der zum A-Wald W isomorphen, in G liegenden A-Wälder X , die aus einem festen, in G liegenden A-Wald X' durch Fortlassen genau eines seiner A-Knotenpunkte erzeugt werden können.
 $u_W(X')$ hängt — im Gegensatz zu $v_{W'}(X)$ — nur von der Struktur von X' ab, nicht aber davon, wie X' in G eingebettet ist. Es hat daher auch das Zeichen $u_W(W')$ einen Sinn:
 $u_W(W')$ ist die Anzahl der zu W isomorphen A-Wälder, welche im A-Wald W' enthalten sind.

Es sei X ein in G enthaltener A-Wald mit $p(X) < t/2 - 1$. Dann ist das Hinzufügen eines A-Knotenpunktes zum festen A-Wald X in G auf genau $p(G) - p(X)$ Weisen möglich, und in jedem Falle entsteht wieder ein A-Wald. Daraus folgt

$$(4) \quad \sum_{W'} v_{W'}(X) = p(G) - p(X).$$

Nachfolgende Summation über alle in G enthaltenen A-Wälder X , welche zum festen A-Wald W isomorph sind, liefert

$$(5) \quad \sum_{\substack{X \subset G \\ X \cong W}} \sum_{W'} v_{W'}(X) = \sum_{\substack{X \subset G \\ X \cong W}} \{p(G) - p(X)\} = \{p(G) - p(W)\} A(W) \\ (p(W) < t/2 - 1).$$

Nehmen wir die Summation in umgekehrter Reihenfolge vor, so erhalten wir

$$(6) \quad \sum_{\substack{X \subset G \\ X \cong W}} \sum_{W'} v_{W'}(X) = \sum_{W'} u_W(W') \cdot A(W'),$$

und der Vergleich der rechten Seiten von (5) und (6) liefert

$$(I) \quad \sum_{W'} u_W(W') \cdot A(W') = \{p(G) - p(W)\} \cdot A(W) \\ (p(W') = p(W) + 1 < t/2).$$

Sehen wir die Größen $A(W)$ für alle A-Wälder W vom Grade r mit genau h A-Knotenpunkten ($h < t/2 - 1$) als bekannt an, so ist (I) ein System von $a(h)$ linearen Gleichungen für $a(h+1)$ Unbekannte $A(W')$ (W' durchläuft alle A-Wälder vom Grade r mit genau $h+1$ A-Knotenpunkten). Die Koeffizienten $u_W(W')$ hängen nur von W und W' (nicht von G) ab, ihre Werte können leicht festgestellt werden.

Beispiel: Es sei G^* ein kubischer Graph mit genau l Kanten und mit der Tailenweite $t^* \equiv 4$. $A^*(W)$ sei die Anzahl aller in G^* enthaltenen Wälder X , die zu W isomorph sind. W und W' mögen alle Wälder mit genau 2 bzw. 3 Kanten durchlaufen. Wir wollen Relationen zwischen den Anzahlen $A^*(W)$ und $A^*(W')$ aufstellen.

Indem wir die Kantenmitten von G^* als A-Knotenpunkte und die Knotenpunkte von G^* als B-Knotenpunkte auffassen, erhalten wir einen biregulären Graphen

$G = G(2,3)$ mit der Tailenweite $t = 2t^*$; den Wäldern von G^* entsprechen A-Wälder von G . Für den Graphen G stellen wir nun das Gleichungssystem (I) mit $p(W) = h = 2$ auf und erhalten folgendes Koeffizientenschema:

$W' \backslash W$	$u_W(W')$				$(p(G) - p(W))A^*(W) = (l-2) \cdot A^*(W)$
	W'_1	W'_2	W'_3	W'_4	
W_1	3	2	1	0	$(l-2) \cdot 2l$
W_2	0	1	2	3	$(l-2) \frac{1}{2} \cdot l \cdot (l-5)$

dabei sind die Kantenmitten der eingezeichneten Wälder als A-Knotenpunkte aufzufassen. In der rechten Seite haben wir die uns bekannten Werte für $A^*(W)$ bereits eingesetzt. Setzen wir noch zur Abkürzung $A(W'_i) = A_i$, so erhalten wir also das Gleichungssystem

$$(A') \quad \begin{cases} 3A_1 + 2A_2 + A_3 = 2l \cdot (l-2) \\ A_2 + 2A_3 + 3A_4 = \frac{1}{2} l \cdot (l-5) \cdot (l-2) \end{cases}$$

Bemerkung: Die Anzahl $w(h)$ aller in einem biregulären Graphen G enthaltenen A-Wälder mit genau h A-Knotenpunkten ist, falls $h < t(G)/2$ ist, offenbar gleich

$$(7) \quad w(h) = \binom{p(G)}{h};$$

wir wollen zeigen, daß die letzte Gleichung, welche wir auch in der Form

$$\sum_{p(W)=h} A(W) = \binom{p(G)}{h}$$

schreiben können, eine Folge von (I) ist.

Wird in (I) auf beiden Seiten über alle A-Wälder mit genau h A-Knotenpunkten summiert, so ergibt sich auf der linken Seite

$$\begin{aligned} \sum_{p(W)=h} \sum_{W'} u_W(W') \cdot A(W') &= \sum_{p(W')=h+1} A(W') \cdot \sum_{p(W)=h} u_W(W') \\ &= w(h+1) \cdot (h+1) \end{aligned}$$

und auf der rechten Seite

$$\sum_{p(W)=h} (p(G) - p(W)) \cdot A(W) = (p(G) - h) w(h),$$

also

$$(h+1) \cdot w(h+1) = (p(G)-h) \cdot w(h) \quad \text{für } h=1, 2, \dots, t/2-2.$$

Hieraus folgt unter Beachtung des Anfangswertes $w(1)=p(G)$ sofort die behauptete Relation (7).

4. Beweis der linearen Unabhängigkeit der Relationen des I. Systems

Wir wollen zeigen:

Die $a(h)$ Gleichungen (I) mit festem $p(W) = h < t/2 - 1$ sind linear unabhängig.

Zu diesem Zweck ordnen wir die W und W' so an, daß wir aus der Koeffizientenmatrix $(u_W(W'))$ eine $a(h)$ -reihige quadratische Untermatrix herausgreifen können, deren Diagonalelemente von Null verschieden sind, während alle Elemente oberhalb der Diagonale verschwinden. Hieraus folgt dann sogleich die Behauptung.

Wir numerieren die W in folgender Weise von 1 bis $a(h)$: Wenn W_j mehr Komponenten hat als W_i , so sei stets $j > i$; im übrigen ist die Numerierung willkürlich. Diese Numerierung übertragen wir folgendermaßen auf die W' : W'_i gehe aus W_i durch Hinzufügen eines quasi-isolierten A-Knotenpunktes hervor; die übrigen W' werden in beliebiger Weise von $a(h)+1$ bis $a(h+1)$ numeriert.

Wir betrachten die Matrix

$$(u_{W_i}(W'_k)) \quad (i, k = 1, 2, \dots, a(h)).$$

Die Diagonalelemente $u_{W_i}(W'_i)$ sind positiv, denn läßt man von W'_i ($i = 1, 2, \dots, a(h)$) einen quasi-isolierten A-Knotenpunkt fort, so entsteht W_i . Jedes Element $u_{W_i}(W'_k)$ oberhalb der Diagonale verschwindet, denn W'_k hat wegen $k > i$ mindestens eine Komponente mehr als W_i , durch Fortlassen eines A-Knotenpunktes von W'_k könnte also höchstens dann W_i entstehen, wenn der fortgelassene A-Knotenpunkt ein quasi-isolierter A-Knotenpunkt von W'_k ist — aber dann entsteht W_k ; und W_k ist verschieden von W_i .

Damit ist die Behauptung bewiesen.

5. Das II. Relationensystem

Die Gleichungen (I) — bei gegebenen Größen $A(W)$ mit $p(W)=h$ — reichen zur Bestimmung der $A(W')$ mit $p(W') = h+1$ im allgemeinen nicht aus ($a(h)$ Gleichungen für $a(h+1)$ Unbekannte!); wir werden also nach weiteren Beziehungen zwischen den Anzahlen $A(W)$ suchen. Solche bekommt man z. B. nach der obigen Methode, indem man mehrere A-Knotenpunkte zugleich hinzufügt bzw. fortnimmt. Die entspringenden Gleichungen erweisen sich aber stets als abhängig von den Gleichungen (I); man wird also, um weitere Beziehungen zu bekommen, mehr von der Struktur der A-Wälder ausnutzen müssen.

Ein weiteres Gleichungssystem von ähnlicher Art wie (I) läßt sich im Falle $s \geq 2$ auf folgende Weise gewinnen:

Es sei $v_W^{(g)}(X)$ ($1 \leq g \leq r$; $p(W') = p(X)+1 < t/2$) die Anzahl der in G enthaltenen A-Wälder X' mit folgenden Eigenschaften:

1. X' ist isomorph zu W' ;
2. X' entsteht aus dem festen A-Wald X von G durch Hinzunahme genau eines weiteren A-Knotenpunktes von G ;
3. der hinzugenommene A-Knotenpunkt hat in bezug auf X' den (positiven) Rang g , es ist also

$$n(X') = n(W') = n(W) + 1 - g.$$

$g > 0$ bedeutet, daß der hinzugenommene A-Knotenpunkt an X „angeheftet“ wird. Weiter sei zur Abkürzung

$$(8) \quad \sum_{W'} v_{W'}^{(g)}(X) = V^{(g)}(X);$$

dann ist

$$(9) \quad \sum_{g=1}^r g \cdot V^{(g)}(X) = f(X),$$

denn auf der linken Seite steht die Anzahl aller A-Wälder, die durch Anheften je eines A-Knotenpunktes aus X gewonnen werden können, wobei jeder A-Wald so oft (nämlich g mal) gezählt ist, wie man ihn erhält, wenn man die freibleibenden Kantenansätze von X unabhängig voneinander je einmal mit einer zusätzlichen Kante L von G besetzt und denjenigen A-Knotenpunkt, in welchen L mündet, zu X hinzunimmt — das ist aber gerade die auf der rechten Seite stehende Anzahl aller freibleibenden Kantenansätze von X .

Nach Hilfssatz 4 hängt $f(X)$ nur von der Struktur von X ab, nicht von G und nicht davon, wie X in G eingebettet ist.

Weiter sei $u_W^{(g)}(X')$ ($1 \leq g \leq r$; $p(X') = p(W) + 1 < t/2$) die Anzahl der in G enthaltenen A-Wälder X mit folgenden Eigenschaften:

1. X ist isomorph zu W ;
2. X entsteht aus dem festen A-Wald X' von G durch Fortlassen genau eines A-Knotenpunktes von X' ;
3. der fortgelassene A-Knotenpunkt hat in bezug auf X' den (positiven) Rang g .

$g > 0$ bedeutet, daß der fortgelassene A-Knotenpunkt kein quasi isolierter A-Knotenpunkt von X' ist.

$u_W^{(g)}(X')$ hängt — im Gegensatz zu $v_W^{(g)}(X)$ — nur von der Struktur von X' ab, nicht von G und nicht davon, wie X' in G eingebettet ist. Demgemäß können wir auch $u_W^{(g)}(W')$ für einen beliebigen A-Wald W' mit $p(W') = p(W) + 1$ definieren: $u_W^{(g)}(W')$ ist die Anzahl der zu W isomorphen A-Wälder, welche aus W' durch Fortlassen von A-Knotenpunkten vom Range g gewonnen werden können; ist X' isomorph zu W' , so ist

$$u_W^{(g)}(X') = u_W^{(g)}(W').$$

Ist $u_W^{(g)}(W') \neq 0$, so gilt

$$(10) \quad n(W) = n(W') - 1 + g.$$

Weiter schließen wir:

$$(11) \quad \sum_{\substack{X \subset G \\ X \cong W}} v_W^{(g)}(X) = A(W') \cdot u_W^{(g)}(W'),$$

denn auf der linken Seite steht die Anzahl aller A-Wälder X' , welche aus den in G enthaltenen, zu W isomorphen A-Wäldern X durch Anheften je eines A-Knotenpunktes hervorgehen und welche zum A-Wald W' mit $n(W') = n(W) + 1 - g$ Komponenten isomorph sind, wobei jeder A-Wald X' so oft gezählt ist (nämlich $u_W^{(g)}(W') = u_W^{(g)}(X')$ mal), wie aus ihm durch Fortlassen von A-Knotenpunkten vom Range g zu W isomorphe A-Wälder hervorgehen, und das steht auch auf der rechten Seite.

Wenn man in (8) über alle in G enthaltenen zu W isomorphen A-Wälder X und in (11) über alle A-Wälder W' (mit $p(W') = p(W) + 1$) summiert und beachtet, daß die sich ergebenden linken Seiten gleich sind, so erhält man

$$(12) \quad \sum_{W'} u_W^{(g)}(W') \cdot A(W') = \sum_{\substack{X \subset G \\ X \cong W}} V^{(g)}(X).$$

Durch Multiplikation mit g und nachfolgende Summation über g ergibt sich wegen (9)

$$(13) \quad \sum_{W'} \left\{ \sum_{g=1}^r g \cdot u_W^{(g)}(W') \right\} A(W') = \sum_{\substack{X \subset G \\ X \cong W}} f(X) = f(W) \cdot A(W).$$

Das ist bereits das gesuchte Relationensystem, welches wir noch etwas vereinfachen wollen. Wir setzen zur Abkürzung

$$(14) \quad \sum_{g=1}^r g \cdot u_W^{(g)}(W') = U_W(W') \quad (p(W') = p(W) + 1).$$

Ist $u_W^{(g)}(W') \neq 0$, so ist nach (10)

$$g = n(W) - n(W') + 1,$$

folglich reduziert sich $U_W(W')$ auf höchstens ein Glied der Summe auf der linken Seite von (14). Beachten wir noch, daß im Falle $u_W^{(g)}(W') \neq 0$ die Zahl $u_W^{(g)}(W')$ mit der in § 3 definierten Anzahl $u_W(W')$ der zu W isomorphen in W' enthaltenen A-Wälder übereinstimmt und daß $n(W) - n(W') + 1 = 0$ ist, wenn W aus W' durch Fortlassen eines quasi-isolierten A-Knotenpunktes hervorgeht, so entnehmen wir aus (14):

$$(15) \quad U_W(W') = (n(W) - n(W') + 1) u_W(W').$$

Unter Benutzung von (14), (15) und (3') erhalten wir aus (13) das II. Relationensystem:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{W'} U_W(W') \cdot A(W') = f(W) \cdot A(W) \\ \text{mit} \\ (a) \quad U_W(W') = (n(W) - n(W') + 1) u_W(W'), \\ (b) \quad f(W) = s \cdot q(W) - r \cdot p(W) \\ \quad \quad \quad = (rs - r - s)p(W) + s \cdot n(W) \\ \quad \quad \quad (p(W') = p(W) + 1 < t/2). \end{array} \right.$$

Sehen wir wieder die Größen $A(W)$ für alle A-Wälder mit genau h A-Knotenpunkten ($h < l/2 - 1$) als bekannt an, so ist (II) — ebenso wie (I) — ein System von $a(h)$ linearen Gleichungen für $a(h+1)$ Unbekannte $A(W')$ (W' durchläuft alle A-Wälder mit genau $h+1$ A-Knotenpunkten).

Wir überzeugen uns davon, daß die bis hierher gewonnenen Resultate auch für $r=0$ gültig sind: In diesem trivialen Falle ist

$$a(h+1) = a(h) = 1, \quad f(W) = 0,$$

$$u_w(W') = h+1, \quad U_w(W') = 0;$$

(I) reduziert sich auf eine einzige Gleichung

$$(I^\circ) \quad (h+1)A(W') = (p-h)A(W),$$

während in (II) beide Seiten verschwinden. Offenbar ist

$$A(W) = \begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix}, \quad A(W') = \begin{pmatrix} p \\ h+1 \end{pmatrix},$$

und das ist im Einklang mit (I°).

Bevor wir nachweisen, daß auch die Gleichungen (II) (mit festem $p(W)=h$) im Falle $r \geq 2, s \geq 2$ linear unabhängig sind, behandeln wir das bereits in § 3 betrachtete Beispiel: Das zu (II) gehörige Koeffizientenschema hat hier folgende Form:

$W \backslash W'$	$U_w(W')$				$f_3(W) \cdot A(W)$
	W'_1 	W'_2 	W'_3 	W'_4 	
W_1 	3	2	0	0	$5 \cdot 2l$
W_2 	0	2	2	0	$8 \cdot \frac{1}{2} l(l-5)$

dem entspricht das Gleichungssystem

$$(B') \quad \begin{cases} 3A_1 + 2A_2 &= 10l \\ 2A_2 + 2A_3 &= 4l(l-5). \end{cases}$$

Die beiden Systeme (A') (§ 3) und (B') liefern zusammen die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} (i) \quad & 3A_1 + 2A_2 + A_3 &= 2l(l-2) \\ (ii) \quad & A_2 + 2A_3 + 3A_4 &= \frac{1}{2}l(l-5)(l-2) \\ (iii) \quad & 3A_1 + 2A_2 &= 10l \\ (iv) \quad & 2A_2 + 2A_3 &= 4l(l-5). \end{aligned}$$

Aus (i) und (iii) entnehmen wir sofort

$$A_3 = 2l(l-7),$$

$$\text{aus (iv):} \quad A_2 = 2l(l-5) - A_3 = 4l,$$

$$\text{aus (iii):} \quad A_1 = \frac{1}{3}(10l - 2A_2) = \frac{2}{3}l = k,$$

$$\text{aus (ii):} \quad 3A_4 = \frac{1}{2}l(l-5)(l-2) - A_2 - 2A_3,$$

$$A_4 = \frac{1}{6}l(l^2 - 15l + 58).$$

6. Beweis der linearen Unabhängigkeit der Relationen des II. Systems für $r \geq 2, s \geq 2$

Wir wollen zeigen:

Die $a(h)$ Gleichungen (II) mit festem $p(W) = h < t/2 - 1$ sind im Falle $r \geq 2, s \geq 2$ linear unabhängig.

a) *Vorbereitung des Beweises.* Wir verschaffen uns, genau wie in § 4, eine $a(h)$ -reihige quadratische Untermatrix U der (in geeigneter Weise angeordneten) Koeffizientenmatrix ($U_W(W')$), deren Diagonalelemente positiv sind, während alle Elemente oberhalb der Diagonale verschwinden.

Wir wollen die A-Wälder W und W' in einer für unseren Zweck geeigneten Weise anordnen und numerieren. Dabei gehen wir schrittweise vor: Zunächst werden die W in Klassen eingeteilt und diese Klassen geordnet. Darauf wird jede Klasse in Unterklassen eingeteilt, und die Unterklassen werden innerhalb einer jeden Klasse geordnet, und so fortfahrend verfeinern wir die Klasseneinteilung solange, bis in jeder Klasse nur noch ein einziger A-Wald enthalten ist. Der damit gewonnenen Ordnung entsprechend numerieren wir die A-Wälder W von 1 bis $a(h)$.

Jedem A-Wald W wird ein gewisser der A-Wälder W' , welchen wir mit $W'(W)$ bezeichnen wollen, zugeordnet, und zwar derart, daß verschiedenen A-Wäldern W auch verschiedene A-Wälder $W'(W)$ entsprechen. Dabei wird die Zuordnungsvorschrift nicht am Anfang gegeben, sondern erst mit der Klasseneinteilung schrittweise vervollständigt. Nach Abschluß des Verfahrens erhält der A-Wald $W'(W)$ die gleiche Nummer wie der A-Wald W , so daß also für $i = 1, 2, \dots, a(h)$ stets $W'(W_i) = W'_i$ ist. Damit haben dann $a(h)$ der $a(h+1)$ A-Wälder W' eine Nummer erhalten, die übrigen $a(h+1) - a(h)$ A-Wälder W' werden willkürlich von $a(h)+1$ bis $a(h+1)$ numeriert.

Der A-Wald $W' = W'(W)$ wird so gewählt, daß er aus W durch Anheften eines Rand-A-Knotenpunktes an geeigneter Stelle entsteht (welcher also in bezug auf W' den Rang $g=1$ hat); dann sind wir sicher, daß $U_W(W') = u_W(W')$ positiv ausfällt, und das bedeutet, daß die Diagonalelemente der sich am Ende ergebenden Matrix

$$U = (U_{W_i}(W'_k)) \quad (i, k = 1, 2, \dots, a(h))$$

gewiß positiv sind.

Weiter werden wir bei jedem Schritt zeigen: Geht die Klasse C , welcher der A-Wald W angehört, der Klasse C^* , welcher der A-Wald W^* angehört, voran, so ist $U_W(W'(W^*)) = 0$. Hieraus folgt dann, daß alle Elemente der Matrix U ober-

halb der Diagonale verschwinden, und außerdem, daß zwei A-Wälder W' , die verschiedenen A-Wäldern W zugeordnet sind, auch wirklich voneinander verschieden sind. Damit wird dann alles bewiesen sein.

Wir benötigen noch einen neuen Begriff: Wir sagen, der A-Wald W sei in dem A-Knotenpunkt P oder in dem B-Knotenpunkt Q wesentlich verzweigt, wenn der Rang $g(P)$ von P bzw. der Grad $r(Q)$ von Q größer als 2 ist (durch Löschen eines solchen Knotenpunktes nimmt die Anzahl der Komponenten, welche A-Knotenpunkte enthalten, sicher zu). Weiter sei V ein beliebiger, in W von Rand zu Rand laufender Weg mit den Endknotenpunkten Q_1 und Q_2 . Wir durchlaufen diesen Weg in Q_1 beginnend, bis wir zum ersten mal auf einen Knotenpunkt stoßen, in welchem W wesentlich verzweigt ist, oder, wenn dieser Fall nicht eintritt, bis wir den Knotenpunkt Q_2 erreicht haben; die Länge des bis dahin durchlaufenen Wegstückes sei e_1 . Ganz entsprechend definieren wir, indem wir Q_1 und Q_2 die Rollen tauschen lassen, eine Zahl e_2 und setzen

$$\text{Max}(e_1, e_2) = e(V).$$

Endlich bezeichnen wir die größte der Zahlen $e(V)$, welche wir erhalten, wenn V alle längsten Wege von W durchläuft, mit $e(W)$:

$$e(W) = \text{Max}_{\substack{V \subset W \\ l(V) = d(W)}} e(V),$$

wobei $l(V)$ die Länge von V und $d(W) = \text{Max}_{V \subset W} l(V)$ der Durchmesser von W ist.

b) *Durchführung des Beweises.*

1. Schritt: Alle A-Wälder W gleicher Komponentenzahl n werden je zu einer Klasse C_n zusammengefaßt, die Klassen werden nach wachsendem Index n geordnet.

Wir haben zu zeigen: Unter der Voraussetzung $n(W) < n(W^*)$ ist stets $U_W(W'(W^*)) = 0$. — Da $W'(W^*)$ aus W^* durch Anheften eines Rand-A-Knotenpunktes hervorgeht, ist $n(W'(W^*)) = n(W^*) > n(W)$. Der Fall $U_W(W'(W^*)) > 0$ könnte höchstens dann eintreten, wenn $n(W'(W^*)) = n(W) + 1$ ist und W aus $W'(W^*)$ durch Fortlassen eines quasi-isolierten A-Knotenpunktes entsteht, denn in jedem anderen Falle wird die Anzahl der Komponenten durch Fortlassen eines A-Knotenpunktes nicht geringer. Aber auch dann ist nach (15)

$$U_W(W'(W^*)) = (n(W) - n(W'(W^*)) + 1)u_W(W'(W^*)) = 0.$$

2. Schritt: Alle A-Wälder der Klasse C_n , welche den gleichen Durchmesser d haben, werden zu einer Klasse C_{nd} zusammengefaßt, und die C_{nd} werden innerhalb C_n nach wachsendem d geordnet. $W'(W)$ wird aus W gewonnen, indem der zusätzliche Rand-A-Knotenpunkt so angeheftet wird, daß der Durchmesser von $W'(W)$ um (genau) 2 größer ist als der Durchmesser von W :

$$d(W'(W)) = d(W) + 2;$$

das ist offenbar immer möglich.

Wir haben zu zeigen: Unter den Voraussetzungen $n(W) = n(W^*)$ und $d(W) < d(W^*)$ ist stets $U_W(W'(W^*)) = 0$. — Das ist klar, denn wird von $W'(W^*)$ ein

A-Knotenpunkt fortgelassen und hat der entstehende A-Wald W° $n(W^\circ) = n(W)$ Komponenten, so ist der fortgelassene A-Knotenpunkt notwendig ein Rand-A-Knotenpunkt und es gilt

$$d(W^\circ) \cong d(W'(W^*)) - 2 = d(W^*) > d(W),$$

es kann also $W'(W^*)$ durch Fortlassen eines A-Knotenpunktes niemals in W übergehen.

3. Schritt: Alle A-Wälder W der Klasse C_{nd} , für welche $e(W)$ den gleichen Wert e hat, werden zu einer Klasse C_{nde} zusammengefaßt, und die C_{nde} werden innerhalb C_{nd} nach wachsendem e geordnet. $W'(W)$ wird aus W gewonnen, indem der zusätzliche Rand-A-Knotenpunkt so angeheftet wird, daß $e(W'(W))$ um (genau) 2 größer ist als $e(W)$:

$$e(W'(W)) = e(W) + 2;$$

das ist offenbar immer möglich.

4. Schritt: Innerhalb einer jeden Klasse C_{nde} bildet jeder A-Wald eine Klasse für sich, und diese Klassen werden willkürlich angeordnet. Wir haben noch zu zeigen: Ist $n(W) = n(W^*)$, $d(W) = d(W^*)$ und $e(W) \leq e(W^*)$, so ist $U_W(W'(W^*))$ nur dann von Null verschieden, wenn $W = W^*$ ist.

Unter den genannten Bedingungen gilt

$$n(W'(W^*)) = n(W^*) = n(W),$$

$$d(W'(W^*)) = d(W^*) + 2 = d(W) + 2,$$

$$e(W'(W^*)) = e(W^*) + 2 \cong e(W) + 2.$$

Wir setzen weiter $U_W(W'(W^*)) > 0$ voraus und zeigen, daß hieraus $W = W^*$ folgt.

$W'(W^*)$ gehe aus W^* durch Hinzunahme des Rand-A-Knotenpunktes P^* , W gehe aus $W'(W^*)$ durch Fortlassen eines A-Knotenpunktes P' hervor (wegen $U_W(W'(W^*)) > 0$ existiert ein solcher A-Knotenpunkt P'). P' ist ein Rand-A-Knotenpunkt von $W'(W^*)$, denn sonst wäre $n(W'(W^*)) \neq n(W)$. P' gehört einem den Knotenpunkt P^* enthaltenden längsten Wege V' von $W'(W^*)$ an, weil sonst $d(W) = d(W'(W^*)) > d(W^*)$ wäre. Besitzt V' einen Knotenpunkt, in welchem $W'(W^*)$ wesentlich verzweigt ist, so ist $P' = P^*$ und damit $W' = W^*$, weil anderenfalls $e(W) \cong e(W'(W^*)) > e(W^*)$ wäre; ist aber $W'(W^*)$ in keinem Knotenpunkt von V' wesentlich verzweigt, so besitzt diejenige Komponente von $W'(W^*)$, welcher P^* angehört, genau zwei Rand-A-Knotenpunkte, nämlich die beiden V' angehörenden A-Knotenpunkte P_1, P_2 vom Range 1, und durch Fortlassen des A-Knotenpunktes P' , der notwendig mit P_1 oder mit P_2 übereinstimmt, entsteht in jedem Falle ein zu W^* isomorpher A-Wald, so daß sich auch hier (da wir zwischen isomorphen A-Wäldern nicht unterscheiden) $W = W^*$ ergibt.

Damit ist die Unabhängigkeit der linearen Relationen (II) für $r \geq 2, s \geq 2$ bewiesen.

7. Zusammenfassung des Ergebnisses

Satz. Es sei $G = G(r, s)$ ein biregulärer Graph mit p A-Knotenpunkten vom Grade r und q B-Knotenpunkten vom Grade s . G habe die Taillenweite $t \geq 6$. h sei eine beliebige natürliche Zahl, kleiner als $\frac{1}{2}t - 1$. W und W' seien A-Wälder, deren A-Knotenpunkte den Grad r und deren B-Knotenpunkte einen Grad $\leq s$ haben; W besitze genau h und W' genau $h+1$ A-Knotenpunkte; die Anzahl der nichtisomorphen solchen A-Wälder W bzw. W' sei $a(h)$ bzw. $a(h+1)$. $A(W)$, $A(W')$ seien die Anzahlen der in G enthaltenen verschiedenen zu W bzw. W' isomorphen A-Wälder. Ferner bedeute

- $n(W)$ die Anzahl der Komponenten von W ,
 $q(W)$ die Anzahl der B-Knotenpunkte von W ,
 $f(W)$ die Anzahl der freibleibenden Kantenansätze von W in bezug auf s (das ist die Anzahl der Kantenansätze von W , in denen keine Kante entspringt, wenn man jeden B-Knotenpunkt von W mit genau s Kantenansätzen ausstattet denkt).
 $u_W(W')$ die Anzahl der verschiedenen zu W isomorphen A-Wälder, welche aus W' hervorgehen, wenn in W' jeder seiner A-Knotenpunkte einmal fortgelassen wird,

und es sei

$$U_W(W') = (n(W) - n(W') + 1)u_W(W').$$

Dann gilt

$$f(W) = s \cdot q(W) - rh = (rs - r - s)h + s \cdot n(W),$$

und zwischen den Größen $A(W)$, $A(W')$ bestehen die folgenden $2a(h)$ linearen Relationen:

$$(16) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \sum_{W'} u_W(W') A(W') = (p - h) A(W), \\ \text{(II)} & \sum_{W'} U_W(W') A(W') = f(W) A(W) \end{cases}$$

(die Gleichungen (II) sind nur für $s \geq 2$ sinnvoll). Die $a(h)$ Gleichungen des Systems (I) sind für beliebige Zahlen $r \geq 0, s \geq 0$ linear unabhängig. Die $a(h)$ Gleichungen des Systems (II) sind für beliebige Zahlen $r \geq 2, s \geq 2$ linear unabhängig.

Bemerkung: Der Fall $r=1$ ist nicht trivial: Die Gleichungen des Systems (II) sind für $r=1$ in manchen Fällen linear abhängig, in anderen linear unabhängig.

8. Bemerkungen; Beispiele

Bemerkung 1. Als nächste Frage taucht die nach der Anzahl der linear unabhängigen unter den $2a(h)$ Gleichungen (16) auf. Die Untersuchung von Graphen $G(2, 3)$ und $G(3, 2)$ lieferte folgendes Resultat:

$r=2, s=3$

h	1	2	3	4	5	6	7	...
Anzahl der Unbekannten $= a(h+1)$	2	4	7	13	25	46	87	
Anzahl der Gleichungen $= 2a(h)$	2	4	8	14	26	50	92	
darunter linear unabhängige	2	4	7	13	<u>24</u>			

 $r=3, s=2$

h	1	2	3	4	5	6	7	...
Anzahl der Unbekannten $= a(h+1)$	2	3	6	9	17	28	52	
Anzahl der Gleichungen $= 2a(h)$	2	4	6	12	18	34	56	
darunter linear unabhängige	2	3	<u>5</u>	9				

Es zeigt sich also, daß in den untersuchten Fällen die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen zwar niemals kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten, daß aber die Gleichungen (16) allein nicht in jedem Falle zur Bestimmung der Unbekannten $A(W')$ ausreichen (siehe Unterstreichungen in den Tabellen).

Bemerkung 2. Zur Vereinfachung der numerischen Auflösung von (16) ist es oft zweckmäßig, statt der Systeme (I), (II) folgende, durch die symbolischen Gleichungen

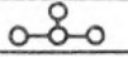
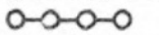
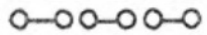
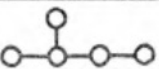
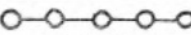
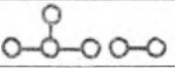
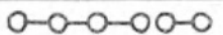
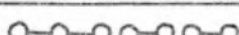
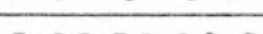
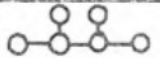
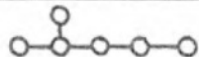
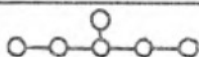
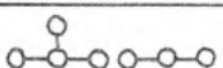
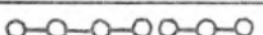
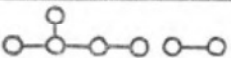
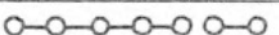
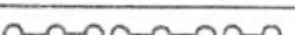
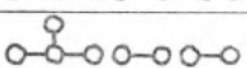
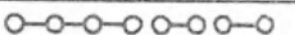
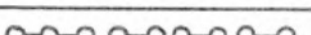
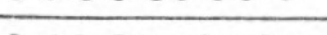
$$\begin{cases} (I') = a(I) - (II) \\ (II') = b(I) - (II) \end{cases}$$

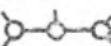
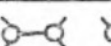
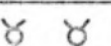
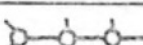
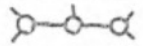
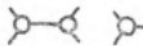
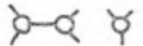
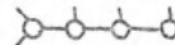
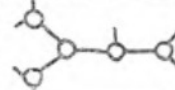
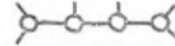
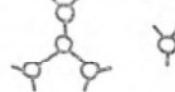
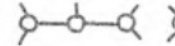
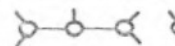
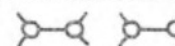
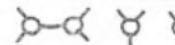
gegebenen Systeme zu betrachten, welche im Falle $b \neq a$ zusammen offenbar dem System (16) äquivalent sind:

$$(16') \quad \begin{cases} (I') & \sum_{W'} (n(W') - n(W) + a - 1) \cdot u_W(W') \cdot A(W') = [a(p - h) - f(W)] \cdot A(W) \\ (II') & \sum_{W'} (n(W') - n(W) + b - 1) \cdot u_W(W') \cdot A(W') = [b(p - h) - f(W)] \cdot A(W); \end{cases}$$

geht W aus W' durch Fortlassen des A-Knotenpunktes P hervor, so ist $n(W') - n(W) + a - 1 = a - g(P)$, und durch geeignete Wahl von a und b läßt sich erreichen, daß viele Koeffizienten des Systems verschwinden.

Beispiel: Wir suchen die Anzahlen der in kubischen Graphen enthaltenen Wälder, welche zu den Wäldern mit $h+1$ Kanten (deren Mitten wir als A-Knotenpunkte auffassen) isomorph sind, zu bestimmen. Im Falle $h=6$ ergibt sich eine

h	W	$A(W)$
1		l
2		$2l$
		$\frac{1}{2}l(l-5)$
3		$\frac{2}{3}l$
		$4l$
		$2l(l-7)$
		$\frac{1}{8}l(l^2-15l+58)$
4		$4l$
		$8l$
		$l(2l-19)$
		$\frac{2}{3}l(l-9)$
		$4l(l-9)$
		$l(l^2-19l+94)$
		$\frac{1}{4!}l(l^3-30l^2+307l-1086)$
5		l
		$8l$
		$8l$
		$16l$
		$\frac{4}{3}l(l-12)$
		$8l(l-12)$
		$4l(l-11)$
		$8l(l-11)$
		$l(2l^2-47l+291)$
		$\frac{1}{3}l(l^2-23l+138)$
		$2l(l^2-23l+138)$
		$\frac{1}{3}l(l^3-36l^2+445l-1914)$
		$\frac{1}{5!}l(l^4-50l^3+995l^2-8330l+28344)$

k	W	$A(W)$
1		k
2		$\frac{3}{2} k$
		$\frac{1}{2} k(k-4)$
3		$3k$
		$\frac{3}{2} k(k-6)$
		$\frac{1}{3!} k(k^2 - 12k + 38)$
4		$6k$
		k
		$3k(k-8)$
		$\frac{3}{8} k(3k-26)$
		$\frac{3}{4} k(k^2 - 16k + 68)$
		$\frac{1}{4!} k(k^3 - 24k^2 + 200k - 588)$
5		$12k$
		$6k$
		$6k(k-10)$
		$k(k-10)$
		$\frac{3}{2} k(3k-34)$
		$\frac{3}{2} k(k^2 - 20k + 106)$
		$\frac{3}{8} k(3k^2 - 62k + 344)$
		$\frac{1}{4} k(k^3 - 30k^2 + 314k - 1164)$
		$\frac{1}{5!} k(k^4 - 40k^3 + 620k^2 - 4460k + 12744)$

Koeffizientenmatrix von $2 \cdot a(h) \cdot a(h+1) = 2 \cdot 25 \cdot 46 = 2300$ Elementen; von diesen sind, wenn wir das System (16) zugrundelegen, 331, wenn wir aber das System (16') mit $a=1$ und $b=2$ zugrunde legen, nur 203 von Null verschieden.

Beispiele: Unter einem Quasiwald verstehen wir ein Gebilde, das aus einem Wald hervorgeht, wenn von dessen Rand-Knotenpunkten (=Knotenpunkten vom Grade 1) keiner, einige oder alle entfernt werden, ohne daß jedoch die zugehörigen Kanten gelöscht werden.

In den vorangehenden zwei Tabellen sind die mittels (16) berechneten Anzahlen $A(W)$ für kubische Graphen $G=G(3)$ mit k Knotenpunkten und l Kanten (und hinreichend großer Taillenweite) zusammengestellt, und zwar in der ersten Tabelle für alle Wälder mit nicht mehr als 5 Kanten und in der zweiten für alle Quasi-Wälder, deren Knotenpunkte sämtlich den Grad 3 haben, mit nicht mehr als 5 Knotenpunkten.

Literatur

- [1] H. SACHS, Abzählung von Wäldern eines gegebenen Typs in regulären und biregulären Graphen
I. *Diese Zeitschrift* **11** (1964), 74–84.

(Eingegangen am 3. Nov. 1963.)