

О НЕКОТОРЫХ РАСШИРЕНИЯХ ПОЛУПРОСТЫХ АВТОМАТОВ

И. ПЕАК (Сегед)*

В настоящей работе рассматриваются автоматы без выходных сигналов. Исследуются некоторые, так называемые ядровые расширения полупростых автоматов. Вводятся понятия эквивалентности и оптимальности относительно таких расширений, и доказывается, что автоматам, являющимся эквивалентными расширениями некоторого полупростого автомата, принадлежат изоморфные между собой полугруппы. Далее, дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторое ядровое расширение такого автомата было оптимальным. Что касается терминологии этой статьи, мы ссылаемся на работы В. М. Глушкова [1] и И. Пеак [2].

Пусть задан автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$. Возьмем следующее известное расширение функции переходов δ : для каждого $a \in \mathfrak{A}$ и $p = x_1 x_2 \dots x_k (\in F(\mathfrak{X}))$ ¹⁾ мы полагаем $\delta(a, p) = a_1 a_2 \dots a_k$, где $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathfrak{A}$ и $a_1 = \delta(a, x_1)$, $a_2 = \delta(a_1, x_2)$, $\dots$, $a_k = \delta(a_{k-1}, x_k)$ ²⁾. Таким образом, каждое состояние $a \in \mathfrak{A}$ автомата A индуцирует некоторое отображение

$$\varphi_a^\delta(p) (= \delta(a, p)) \quad (p \in F(\mathfrak{X}))$$

свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ в свободную полугруппу $F(\mathfrak{A})$. Отображение φ_a^δ мы назовем отображением, индуцируемым состоянием $a \in \mathfrak{A}$ в автомате A . Состояния a и a' того же самого автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ называются эквивалентными, если они индуцируют одно и то же отображение в A , т. е.

$$\forall_{p \in F(\mathfrak{X})} p[\varphi_a^\delta(p) = \varphi_{a'}^\delta(p)].$$

Упоминаем теперь, как определяются (первое) ядро автомата и полупростой автомат. Для произвольного автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ через $K(A)$ обозначается ядро автомата A , т. е. $\mathfrak{A}$ -подавтомат автомата A , множеством состояний которого является множество $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}) (\subseteq \mathfrak{A})$ всех состояний $a \in \mathfrak{A}$ автомата A , для которых найдутся $a_1 \in \mathfrak{X}$ и $x \in \mathfrak{A}$, таковы, что имеет место $a = \delta(a_1, x)$. Автомат, совпадающий со своим ядром, называется полупростым автоматом.

* I. Peák (Szeged)

¹⁾ Здесь, и везде в этой статье, через $F(\mathfrak{X})$ и $F(\mathfrak{A})$ мы обозначаем свободные полугруппы без единицы в алфавитах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{A}$, соответственно.

²⁾ В дальнейшем мы пользуемся еще следующим обозначением: в случае $\delta(a, p) = a_1 a_2 \dots a_k$, последнее состояние a_k мы условимся обозначать через $(ap)_\delta$.

Пусть задан полупростой автомат $A = (\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \delta)$ и возьмем произвольное непустое множество $\mathfrak{B}$, пересечение которого с множеством $\mathfrak{M}$ является пустым. Автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'} = (\mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \delta')$ называется *ядровым расширением* заданного полупростого автомата $A = (\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$, если автомат A является $\mathfrak{M}$ -подавтоматом автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и для ядра автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ имеет место $K(A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}) = A$.

Фиксируем теперь некоторый полупростой автомат $A = (\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \delta)$ и непустое множество $\mathfrak{B}$, пересечение которого с $\mathfrak{M}$ является пустым, и рассмотрим все возможные ядровые расширения автомата A при множестве $\mathfrak{B}$. Два таких расширения $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ мы назовем *эквивалентными*, если для каждого $s' \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}$ найдется $s'' \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}$, таково, что имеет место

$$\forall_{p \in F(\mathfrak{X})} p[\varphi_{s'}^{\delta'}(p) = \varphi_{s''}^{\delta''}(p)],$$

и наоборот.

При заданном автомате A и фиксированном множестве $\mathfrak{B}$ из всех ядровых расширений автомата A при множестве $\mathfrak{B}$ мы выделяем некоторые расширения, являющиеся с некоторой точки зрения наилучшими. Именно, ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата $A = (\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ называется *оптимальным*, если оно является автоматом, не имеющим двух различных эквивалентных между собой состояний, по крайней мере одно из которых содержится в множестве $\mathfrak{B}$.

Как в статье [2], так и здесь, через $S(A)$ обозначается полугруппа, принадлежащая автомату A . Имеет место следующее предложение:

Теорема 1. *Полугруппы, принадлежащие автоматам, являющимся эквивалентными между собой ядровыми расширениями некоторого полупростого автомата, являются изоморфными.*

Доказательство. Пусть заданы полупростой автомат $A = (\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \delta)$ и некоторое непустое множество $\mathfrak{B}$, пересечение которого с множеством $\mathfrak{M}$ является пустым, и возьмем два эквивалентных между собой расширения $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ автомата A . Нам нужно доказать, что тогда имеет место $S(A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}) \approx S(A_{\mathfrak{B}}^{\delta''})$. Для этой цели достаточно показать, что соотношения конгруэнтности $\varrho' = \varrho(A_{\mathfrak{B}}^{\delta'})$ и $\varrho'' = \varrho(A_{\mathfrak{B}}^{\delta''})$ в свободной полугруппе $F(\mathfrak{X})$, принадлежащие автоматам $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$, соответственно, совпадают.

По определению ϱ' для каждого $p, q \in F(\mathfrak{X})$ мы имеем

$$(1) \quad p \equiv q(\varrho') \Leftrightarrow \forall_{s' \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}} s'[(s'p)_{\delta'} = (s'q)_{\delta'}].$$

Пусть s'' есть произвольное состояние из $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}$. При условиях теоремы найдется состояние s' из $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}$, такое, что для s' и s'' имеет место:

$$(2) \quad \forall_{r \in F(\mathfrak{X})} r[\delta'(s', r) = \delta''(s'', r)].$$

Из этого следует

$$\forall_{r \in F(\mathfrak{X})} r[(s'r)_{\delta'} = (s''r)_{\delta''}].$$

В частности, мы получаем,

$$(s'p)_{\delta'} = (s''p)_{\delta''}, \quad (s'q)_{\delta'} = (s''q)_{\delta''}.$$

И так из правой стороны (1) следует

$$(3) \quad (s''p)_{\delta''} = (s''q)_{\delta''}.$$

Так как $s''(\in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{B})$ мы выбрали произвольно, то из правой стороны (1) из-за (3) следует

$$\forall_{s'' \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}} s''[(s''p)_{\delta''} = (s''q)_{\delta''}],$$

т. е. $p \equiv q(q'')$. Итак, мы доказали заключение

$$p \equiv q(q') \Rightarrow p \equiv q(q'') \quad (p, q \in F(\mathfrak{X})).$$

Таким же образом получается и обратное заключение

$$p \equiv q(q'') \Rightarrow p \equiv q(q') \quad (p, q \in F(\mathfrak{X})).$$

А это именно означает совпадение отношений конгруэнтности q' и q'' , принадлежащих автоматам $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$, соответственно. Теорема доказана.

В дальнейшем мы дадим необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторое ядровое расширение заданного полупростого автомата было оптимальным.

Пусть задан произвольный автомат $A = (\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \delta)$, имеющий некоторый $\mathfrak{M}$ -подавтомат $A_1 = (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{X}, \delta_1)$. Однозначное отображение η множества $\mathfrak{M}$ в себя называется относительным $\mathfrak{M}$ -эндоморфизмом автомата A над подавтоматом A_1 , если для всякой пары $a(\in \mathfrak{M})$, $x(\in \mathfrak{X})$ имеет место

$$(4) \quad \eta(\delta(a, x)) = \delta(\eta(a), x)$$

и при этом состояния из $\mathfrak{M}_1$ при отображении η являются неподвижными. Относительный $\mathfrak{M}$ -эндоморфизм автомата A над подавтоматом A_1 называется собственным, если он не является тождественным отображением множества $\mathfrak{M}$ на себя.

Мы докажем следующее предложение:

Теорема 2. Ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата A при множестве $\mathfrak{B}$ является оптимальным тогда и только тогда, если оно не имеет собственного относительного $\mathfrak{M}$ -эндоморфизма над A .

Доказательство. Для доказательства необходимости мы предполагаем, что ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата $A = (\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ является оптимальным, и при этом автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ обладает собственным относительным $\mathfrak{M}$ -эндоморфизмом η над подавтоматом A . Мы придем к противоречию. Из предыдущих предположений следует существование состояния $s(\in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{B})$ автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$, для которого $s \neq \eta(s)$ и поэтому s не содержится в множестве $\mathfrak{M}$. Для того, чтобы получить противоречие, достаточно показать, что состояния s и $\eta(s)$ автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ являются эквивалентными между собой. Пусть $p = x_1 x_2 \dots x_k$ есть произвольное слово из $F(\mathfrak{X})$ и пусть

$$q_s^{\delta'}(p) = s_1 s_2 \dots s_k, \quad q_{\eta(s)}^{\delta'}(p) = t_1 t_2 \dots t_k \quad (s_i, t_i \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{B}; i = 1, \dots, k).$$

Так как при отображении η все состояния из множества $\mathfrak{A}$ являются неподвижными, то для всех $s \in (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$ и $x \in \mathfrak{X}$ имеет место $\delta'(\eta(s), x) = \delta'(s, x)$. Отсюда мы получаем, что $s_1 = \delta'(s, x_1) = \delta'(\eta(s), x_1) = t_1$, $s_2 = \delta'(s_1, x_2) = \delta'(t_1, x_2) = t_2$, ..., $s_k = \delta'(s_{k-1}, x_k) = t_k$, т. е. для произвольного $p \in F(\mathfrak{X})$ имеет место равенство $\varphi_{\delta'}^s(p) = \varphi_{\eta(s)}^{\delta'}(p)$. А это именно означает, что (различные друг от друга) состояния s и $\eta(s)$ автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ являются эквивалентными. Так как при этом $s \notin \mathfrak{A}$, то это противоречит тому, что автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ был оптимальным ядровым расширением заданного полупростого автомата A при множестве $\mathfrak{B}$.

Пусть наоборот, предполагается, что ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ не имеет собственного относительного $\mathfrak{A}$ -эндоморфизма над A . Покажем, что тогда $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ является оптимальным расширением. В противоположном случае нашли бы различные, эквивалентные между собой состояния s_1 и s_2 автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$, по крайней мере одно из которых не содержалось бы в множестве $\mathfrak{A}$. Пусть например $s_1 \notin \mathfrak{A}$. В дальнейшем мы фиксируем эти состояния s_1 и s_2 и конструируем некоторый собственный относительный $\mathfrak{A}$ -эндоморфизм автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ над A . Возьмем следующее отображение η множества $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ в себя:

$$\eta(s) = \begin{cases} s & \text{если } s \neq s_1 \\ s_2 & \text{если } s = s_1 \end{cases} \quad (s \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}).$$

Мы покажем, что η удовлетворяет условию (4). Пусть $s \neq s_1$. Тогда из $\delta'(s, x) \in \mathfrak{A}$ и $s_1 \notin \mathfrak{A}$ следует $\delta'(s, x) \neq s_1$ и мы имеем

$$\eta(\delta'(s, x)) = \delta'(s, x) = \delta'(\eta(s), x).$$

В случае $s = s_1$ из $\delta'(s_1, x) \neq s_1$ для эквивалентных между собой состояний s_1 и s_2 получается

$$\eta(\delta'(s_1, x)) = \delta'(s_1, x) = \delta'(s_2, x) = \delta'(\eta(s_1), x).$$

В обоих случаях мы получили, что для η имеет место (4). Осталось еще показать, что при η все состояния из $\mathfrak{A}$ являются неподвижными. А это следует из того, что при η подвигается только единственное состояние s_1 и $s_1 \notin \mathfrak{A}$. Итак, мы построили относительный $\mathfrak{A}$ -эндоморфизм автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ над A , не являющийся тождественным отображением множества $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ на себя. А это противоречит условиям. Тем самым теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь все ядровые расширения полупростого автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при некотором множестве $\mathfrak{B}$. Мы говорим, что автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ является относительным $\mathfrak{A}$ -гомоморфным образом автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$, если автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ обладает $\mathfrak{A}$ -гомоморфным отображением на автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$, при котором все состояния из $\mathfrak{A}$ являются неподвижными.

Легко доказывается следующее утверждение:

Теорема 3. *Оптимальное ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta^*}$ полупростого автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ является относительным $\mathfrak{A}$ -гомоморфным образом любого из эквивалентных ему ядровых расширений $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$.*

Доказательство. Пусть автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta^*}$ является оптимальным расширением полупростого автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ при множестве $\mathfrak{B}$ и возьмем произвольное, эквивалентное ему расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ автомата A . Тогда, по определению эквивалентности расширений для всякого $s (\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$ существует некоторое $s^* (\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$, удовлетворяющее условию

$$(5) \quad \forall_{x \in \mathfrak{X}} [\delta'(s, x) = \delta^*(s^*, x)]$$

и ясно, что такое s^* однозначно определено через s . Мы определим теперь следующее отображение: в случае $s \in \mathfrak{A}$ мы полагаем $\eta(s) = s$, а если $s \in \mathfrak{B}$, тогда пусть $\eta(s) = s^*$, где s^* — однозначно определенное состояние в $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, принадлежащее состоянию s и удовлетворяющее условию (5). Легко убедиться, что отображение η будет относительным $\mathfrak{A}$ -гомоморфизмом автомата $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ на автомат $A_{\mathfrak{B}}^{\delta^*}$. Действительно, для всякой пары $s (\in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$, $x (\in \mathfrak{X})$ из-за $\delta'(s, x) \in \mathfrak{A}$ мы имеем $\eta(\delta'(s, x)) = \delta'(s, x) = \delta^*(s^*, x) = \delta^*(\eta(s), x)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Эквивалентные между собой оптимальные ядровые расширения некоторого полупростого автомата являются изоморфными.

Следствие 2. Для каждого ядрового расширения полупростого автомата существует (с точностью до изоморфизма) не более одного эквивалентного ему оптимального расширения того же самого автомата.

Ядровое расширение $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ полупростого автомата A при конечном множестве $\mathfrak{B}$ называется конечным ядровым расширением автомата A .

Следствие 3. Если по крайней мере одно из конечных эквивалентных между собой ядровых расширений $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ некоторого полупростого автомата A является оптимальным, то автоматы $A_{\mathfrak{B}}^{\delta'}$ и $A_{\mathfrak{B}}^{\delta''}$ будут изоморфными.

Литература

- [1] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи матем. наук*, **16:5** (101) (1961), 3—62.
- [2] И. Пеак, Автоматы и полугруппы I, *Acta Sci. Math.* **25** (1964), 193—201.

(Поступило 22. XII. 1963.)