Die Cauchysche Funktionalgleichung über diskrete Mengen

Von Z. DARÓCZY und K. GYŐRY (Debrecen)

Einleitung

In der Zahlentheorie und in verschiedenen Charakterisierungen der informationstheoretischen Entropie spielt der folgende Satz von P. ERDŐS ([3]) eine wichtige Rolle: Gilt die Funktionalgleichung

$$f(nm)=f(n)+f(m) \qquad (n, m)=1 \tag{1}$$

für die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ und ist a) $f(n)$ monoton oder b) $\lim_{n\to\infty} [f(n+1)-f(n)]=0$, so ist $f(n)=c \log n$, wobei c ein konstanter Wert ist (s. D. K. FADDEJEW [4], A. RÉNYI [5]).

Auf Grund des obigen Satzes haben J. ACZÉL und einer der Verfasser in [2] bewiesen, daß die Funktionalgleichung

$$f(xn)=f(x)+f(n) \qquad \big(x\in[1, \infty);\ n=1, 2, \ldots\big) \tag{2}$$

die Lösung $f(x)=c \log x$ hat, wenn die Funktion $f(x)$ a) monoton oder b) stetig ist.

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns die Untersuchung einer Verallgemeinerung der Funktionalgleichung (2) als Ziel gesteckt. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß wir die Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$f(xu)=f(x)+f(u) \qquad \big(x\in[1, \infty);\ u\in U\big) \tag{3}$$

für eine beliebige nichtleere Menge $U\subset[1, \infty)$ voraussetzen, uns also nicht nur auf den Fall $U=\{1, 2, \ldots\}$ beschränken, und die allgemeinsten a) monotonen bzw. b) stetigen Lösungen dieser Funktionalgleichung angeben wollen.

Setzen wir in (3) $x=\exp t$, $u=\exp a$ $(u\in U)$ und $\varphi(t)=f(\exp t)$ $\big(t\in[0, \infty)$, $A=\{\log u | u\in U\}\subset[0, \infty)\big)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\varphi(t+a)=\varphi(t)+\varphi(a) \qquad \big(t\in[0, \infty),\ a\in A\subset[0, \infty)\big), \tag{4}$$

wobei φ eine a) monotone bzw. b) stetige Funktion ist, falls f diese Eigenschaften besitzt. Die Funktionalgleichung (4) ist eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Gleichung von Cauchy in dem Sinne, daß eine der Veränderlichen nur diskrete vorgegebene Werte annehmen kann. (S. J. ACZÉL [1]).

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der algebraischen Problemstellung. Es seien G und H additiv geschriebene abelsche Gruppen. Ferner sei $G'\subset G$ eine

Unterhalbgruppe und $A \subset G'$ eine nichtleere Menge. Wir betrachten eine eindeutige Abbildung $\varphi: G' \to H$, für welche die Gleichung

$$\varphi(g'+a) = \varphi(g') + \varphi(a) \tag{5}$$

für alle $g' \in G'$ und $a \in A$ erfüllt ist. Man bestimme die maximale Teilmenge A' der Menge G' für welche die oben definierte Abbildung φ für alle $g' \in G'$ und $a' \in A'$ additionsinvariant bleibt, d. h.

$$\varphi(g'+a') = \varphi(g') + \varphi(a')$$

gilt. § 1 enthält die Lösung dieses Problems. In § 2 wird die allgemeine Form der Abbildung φ angegeben, falls die Unterhalbgruppe G' die folgenden Eigenschaften besitzt: das neutrale Element 0 ist in G' enthalten, und für jedes Element $g \in G$ gilt: g oder $(-g)$ gehört zu G'. Auf Grund unserer algebraischen Ergebnisse beschäftigen wir uns in § 3 mit den monotonen bzw. stetigen Lösungen der Funktionalgleichung (4).

§ 1. Algebraische Untersuchungen

Satz 1. *Es seien G und H additiv geschriebene abelsche Gruppen, ferner sei $G' \subset G$ eine Unterhalbgruppe und $A \subset G'$ eine nichtleere Menge. Ist $\varphi: G' \to H$ eine eindeutige Abbildung, die die Gleichung*

$$\varphi(g'+a) = \varphi(g') + \varphi(a) \tag{6}$$

bei beliebigem $g' \in G'$ und $a \in A$ erfüllt, so gilt für die Abbildung φ

$$\varphi(g'+a') = \varphi(g') + \varphi(a') \tag{7}$$

auch dann, wenn $g' \in G'$ ist und a' ein beliebiges Element aus $A' = \{A\} \cap G'$ ist, wobei $\{A\}$ die durch die Menge A erzeugte Untergruppe von G bezeichnet.

Beweis. Es bezeichne n eine natürliche Zahl, und es sei $a \in A \subset G'$. Aus (6) folgt die Gleichung

$$\varphi(na) = n\varphi(a).$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi(g'+na) = \varphi[g'+(n-1)a] + \varphi(a) = \ldots = \varphi(g') + n\varphi(a) = \varphi(g') + \varphi(na) \tag{8}$$

für beliebiges $g' \in G'$. Wir nehmen jetzt an, daß mit $g' \in G'$ auch $(g' - na) \in G'$ ist. Dann erhalten wir aus (8)

$$\varphi(g') = \varphi(g'-na+na) = \varphi(g'-na) + \varphi(na),$$

d. h.

$$\varphi(g'-na) = \varphi(g') - \varphi(na). \tag{9}$$

Es sei jetzt $a' \in \{A\}$ beliebig. Dann existiert die Darstellung

$$a' = \sum_{i=1}^{j} n_i a_i - \sum_{l=j+1}^{k} n_l a_l,$$

wobei $a_i \in A$ und n_i natürliche Zahlen ($i=1, 2, \ldots, k$) sind. Gehört a' auch zu G', d. h. gilt $a' \in A' = \{A\} \cap G'$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (9) und (8)

$$\varphi(g'+a') = \varphi\left(g' + \sum_{i=1}^{j} n_i a_i - \sum_{l=j+1}^{k} n_l a_l\right) =$$
$$= \varphi\left(g' + \sum_{i=1}^{j} n_i a_i - \sum_{l=j+1}^{k-1} n_l a_l\right) - \varphi(n_k a_k) = \ldots =$$
$$= \varphi(g') + \sum_{i=1}^{j} \varphi(n_i a_i) - \sum_{l=j+1}^{k} \varphi(n_l a_l) =$$
$$= \varphi(g') + \varphi\left(\sum_{i=1}^{j} n_i a_i\right) - \varphi\left(\sum_{l=j+1}^{k} n_l a_l\right) = \varphi(g') +$$
$$+ \varphi\left(\sum_{i=1}^{j} n_i a_i - \sum_{l=j+1}^{k} n_l a_l\right) = \varphi(g') + \varphi(a'),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Korollar. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gilt für beliebiges $a' \in A'$ die Gleichheit*

$$\varphi(a') = \sum_{i=1}^{k} n_i \varphi(a_i), \tag{10}$$

falls a' die Darstellung

$$a' = \sum_{i=1}^{k} n_i a_i \qquad (a_i \in A,\ n_i \text{ ganz})$$

besitzt.

Satz 2. *Die in dem Satz 1 angegebene Menge A' ist maximal in dem Sinne, daß solche G, H, G', A und φ angegeben werden können, für welche die Bedingungen des Satzes* 1 *erfüllt sind und zugleich*

$$\varphi(g'+g'') \neq \varphi(g') + \varphi(g'')$$

gilt, sobald $g', g'' \in G'$ und $g', g'' \notin A'$ sind.

Beweis. Es mögen G und H die Gruppe der ganzen Zahlen bezeichnen, ferner sei $G' \subset G$ die Unterhalbgruppe der natürlichen Zahlen. Ist $A = \{a | a = 2\}$, so ist $\{A\}$ die von $a=2$ erzeugte zyklische Gruppe und $A' = \{A\} \cap G' = \{2k | k = 1, 2, \ldots\}$ die Unterhalbgruppe der geraden Zahlen. Wir betrachten die Abbildung $\varphi: G' \to H$, die durch die folgende Form

$$\varphi(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in G')$$

definiert ist. Es ist leicht zu zeigen, daß $\varphi(n+2) = \varphi(n) + \varphi(2)$ für beliebiges $n \in G'$ gilt, d. h. (6) für φ erfüllt ist. Nun sei $n, m \in G'$ und $n, m \notin A'$, dann sind n und m ungerade Zahlen, also

$$\varphi(n+m) = n+m \neq n-1+m-1 = \varphi(n) + \varphi(m).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 2. Allgemeine Lösungen

Es sei G eine additive abelsche Gruppe, und es sei $G' \subset G$ eine Unterhalbgruppe, für die $0 \in G'$ gilt und die g oder $(-g)$ für jedes $g \in G$ enthält. Ferner sei $A \subset G'$ eine nichtleere Menge. Wir erklären jetzt folgende Klassen-einteilung $\varepsilon(G')$ von G': Wir nennen zwei Elemente g' und g'' der Halbgruppe G' äquivalent (in Zeichen $g' \sim g''$), wenn $(g'-g'')$ oder $(g''-g') \in A' = \{A\} \cap G'$ ist, wobei $\{A\}$ die von der Menge A erzeugte Untergruppe von G ist. Es ist leicht einzusehen, daß diese Äquivalenz symmetrisch, reflexiv, transitiv ist und A' eine Klasse von $\varepsilon(G')$ ist.

Wir betrachten jetzt eine eindeutige Abbildung $\varphi: G' \to H$, die $\varphi(g'+a) = \varphi(g') + \varphi(a)$ erfüllt, wobei $g' \in G'$ und $a \in A$ beliebig sind. Es gilt der

Satz 3. *Es sei E ein Repräsentantensystem von $\varepsilon(G')$, in dem kein Element aus der Klasse A' vorkommt. Dann hat die Abbildung $\varphi: G' \to H$ die Gestalt*

$$\varphi(g') = \begin{cases} \psi(e) \in H & \textit{beliebig, falls} \quad g' = e \in E \\ \chi(a') \in H, & \textit{falls} \quad g' = a' \in A' \\ \psi(e) \pm \chi(a'), & \textit{falls} \quad g' = e \pm a' \quad (e \in E, a' \in A'), \end{cases} \tag{11}$$

wobei $\chi: A' \to H$ eine beliebige homomorphe Abbildung von A' in H ist.

BEWEIS. Nach Satz 1 gilt

$$\varphi(g'+a') = \varphi(g') + \varphi(a') \qquad (g' \in G', a' \in A'), \tag{12}$$

woraus

$$\varphi(a'+a'') = \varphi(a') + \varphi(a'') \tag{13}$$

für beliebige $a', a'' \in A'$ folgt. Also ist φ eine homomorphe Abbildung. Sind $e \in E$ und $g' \in G'$ $(g' \notin A')$ beliebig, und $e \sim g'$, so ist $g' = e + a'$ oder $g' = e - a'$ $(a' \in A')$, d. h. aus (12) folgt

$$\varphi(g') = \varphi(e) \pm \varphi(a'). \tag{14}$$

Damit haben wir bewiesen, daß die Abbildung φ die Form (11) besitzt.

Umgekehrt genügt auch jede Abbildung (11) von G' in H der Gleichung

$$\varphi(g'+a) = \varphi(g') + \varphi(a) \qquad (g' \in G', a \in A).$$

Ist $g' \in A'$, so ist diese Behauptung trivial. Es sei jetzt $g' \in G'$ und $g' \notin A'$. Dann existiert ein Element $e \in E$, so daß $g' \sim e$ ist, d. h. $g' = e + a'$ oder $g' = e - a'$ für ein geeignetes Element $a' \in A'$ gilt. Ist $g' = e + a'$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(g'+a) &= \varphi(e+a'+a) = \psi(e) + \chi(a'+a) = \\ &= \psi(e) + \chi(a') + \chi(a) = \varphi(e+a') + \varphi(a) = \varphi(g') + \varphi(a). \end{aligned}$$

Ist $g' = e - a'$, so ist $(a - a') \in A'$, oder $(a' - a) \in A'$, woraus sich

$$\begin{aligned} \varphi(g'+a) &= \varphi(e-a'+a) = \psi(e) \pm \chi(\pm(a-a')) = \psi(e) \pm \\ &\pm [\pm(\chi(a) - \chi(a'))] = \psi(e) - \chi(a') + \chi(a) = \varphi(g') + \varphi(a) \end{aligned}$$

ergibt. Damit haben wir den Satz 3 bewiesen.

Beispiel. Es seien G, H die additive Gruppe der reellen Zahlen, $G=H=(-\infty, \infty)$, und es sei $G'=[0, \infty)$ die Unterhalbgruppe der nichtnegativen reellen Zahlen.

1. $A=\{1\}$. Dann ist $\{A\}=\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ die Gruppe der ganzen Zahlen und $A'=\{A\}\cap G'=\{0, 1, 2, \ldots\}$. Wir betrachten die reelle Funktion $\varphi(t)$ $(t\in[0, \infty))$, für die

$$\varphi(t+1) = \varphi(t)+\varphi(1)$$

erfüllt ist. Bekanntlich hat eine homomorphe Abbildung $\chi\colon A'\to H$ die allgemeine Form $\chi(k)=\varphi(k)=ck$ $(k\in A')$, wobei c ein konstanter Wert ist. Hier ist $E=(0, 1)$ ein Repräsentantensystem von $\varepsilon(G')$, d. h., jedes $t\in[0, \infty)$ $(t\neq 0, 1, 2, \ldots)$ kann in der Gestalt $t=x+k$ $\big(x\in(0, 1), k\in\{0, 1, 2, \ldots\}\big)$ dargestellt werden. Nach (11) ist $\varphi(t)=\psi(x)+\chi(k)=\psi(x)+ck$, wobei $\psi(x)$ $\big(x\in(0, 1)\big)$ eine beliebige Funktion ist.

2. $A=\left\{\frac{1}{k!}\,\middle|\, k=1, 2, \ldots\right\}$. Es ist bekannt, daß die Menge $\{A\}$ mit der Gruppe der rationalen Zahlen zusammenfällt. Wir betrachten die Funktionalgleichung

$$\varphi\left(t+\frac{1}{k!}\right) = \varphi(t)+\varphi\left(\frac{1}{k!}\right) \qquad (t\in[0, \infty), k=1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Nach Satz 1 genügt jede Lösung von (15) der Gleichung

$$\varphi(t+r) = \varphi(t)+\varphi(r),$$

wobei $t\in[0, \infty)$ und $r\in A'=\{A\}\cap[0, \infty)=R^+$ ist. Hier bezeichnet R^+ die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen. Dann und nur dann gehören t' und $t''\in[0, \infty)$ zu einer Klasse von $\varepsilon(G')$, wenn $t'-t''$ eine rationale Zahl ist. Die Menge E kann mit transfiniten Mitteln konstruiert werden. Es sei jetzt $\psi(x)$ $(x\in E)$ eine beliebige Funktion, dann erhalten wir nach (11) die allgemeine Lösung von (15) in der Gestalt

$$\varphi(t) = \begin{cases} cr & \text{falls} \quad t = r\in R^+ \\ \psi(x)\pm cr & \text{falls} \quad t = x\pm r \quad (x\in E, r\in R^+). \end{cases}$$

§ 3. Monotone und stetige Lösungen

Wir betrachten jetzt die Funktionalgleichung (4), wobei $t\in G'=\langle\alpha, \infty)$ $(\alpha\geqq 0)$, und $a\in A\subset G'$ ist. Hier ist A eine nichtleere Menge.

Satz 4. *Ist $\varphi(t)$ eine in dem Intervall $G'=\langle\alpha, \infty)$ monotone Funktion, $\{A\}$ diejenige Untergruppe der reellen Zahlen G die durch die Menge $A\subset G'$ erzeugt wird, und ist die Gleichung*

$$\varphi(t+a) = \varphi(t)+\varphi(a) \qquad (t\in G', a\in A) \tag{16}$$

erfüllt, so gilt für beliebiges $a'\in A'=\{A\}\cap G'$

$$\varphi(a')=ca', \tag{17}$$

wobei c ein konstanter Wert ist.

Beweis. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\varphi(t)$ eine monoton steigende Funktion ist. Es sei $a_1\in A$, $a_1>0$ und $\varphi(a_1)=ca_1$. Wir zeigen, daß für ein beliebiges $a\in A$ stets $\varphi(a)=ca$ gilt. Dies ist trivial, wenn

$A = \{a_1\}$ ist. Es sei jetzt $a \in A$ $(a \neq a_1)$ beliebig. Wir setzen voraus, daß $0 < a_1 < a$ gilt. (Ist $0 < a < a_1$, so verläuft der Beweis ähnlich.) Ist k eine beliebige natürliche Zahl, so existiert eine natürliche Zahl m, so daß

$$ma_1 < ka \leqq (m+1)a_1 \tag{18}$$

gilt. Wegen der Monotonität von φ gilt

$$\varphi(ma_1) \leqq \varphi(ka) \leqq \varphi((m+1)a_1),$$

woraus nach dem Korollar des Satzes 1

$$mca_1 \leqq k\varphi(a) \leqq c(m+1)a_1$$

folgt, d. h.

$$ca_1 \frac{m}{k} \leqq \varphi(a) \leqq ca_1 \left(\frac{m}{k} + \frac{1}{k}\right). \tag{19}$$

Ist $c = 0$, so ist $\varphi(a) = 0$ $(a \in A)$. Ist $c \neq 0$, so ist $c > 0$ wegen des Wachstums von φ, und aus (18) folgt

$$ca_1 \frac{m}{k} \leqq ca \leqq ca_1 \left(\frac{m}{k} + \frac{1}{k}\right). \tag{20}$$

Aus (19) und (20) ergibt sich

$$|\varphi(a) - ca| \leqq ca_1 \frac{1}{k},$$

woraus $\varphi(a) = ca$ folgt. Nach Korollar des Satzes 1 folgt dann $\varphi(a') = ca'$ für beliebiges $a' \in A'$.

Korollar. *Ist $\{A\}$ eine in G überall dichte Menge, so gilt $\varphi(t) = ct$ $(t \in G')$.*

Beweis. Jedenfalls ist A' eine in G' überall dichte Menge. Es sei $t \in (\alpha, \infty)$ beliebig. Dann gibt es die Folgen $a'_n \nearrow t$ und $A'_n \searrow t$ $(a'_n, A'_n \in A')$. Aus der Ungleichung

$$a'_n < t < A'_n$$

folgt unmittelbar

$$\varphi(a'_n) \leqq \varphi(t) \leqq \varphi(A'_n)$$

d. h.

$$ca'_n \leqq \varphi(t) \leqq cA'_n.$$

Daraus kann man $\varphi(t) = ct$ erhalten. Ist jetzt noch $\alpha \in G'$, so ist mit $a' \in A'$, $(\alpha + a') \in \in (\alpha, \infty)$ und es gilt $\varphi(\alpha + a') = c(\alpha + a') = \varphi(\alpha) + \varphi(a')$, woraus $\varphi(\alpha) = c\alpha$ folgt.

Satz 5. *Ist $\varphi(t)$ stetig, und $\{A\}$ eine überall dichte Menge, dann gilt $\varphi(t) = ct$ $(t \in G')$.*

Beweis. Es sei $s \in G'$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $a'_n \in A$, so daß $\lim_{n \to \infty} a'_n = s$ gilt. Nach Satz 1 gilt

$$\varphi(t + a'_n) = \varphi(t) + \varphi(a'_n),$$

woraus wegen der Stetigkeit von φ

$$\varphi(t+s) = \varphi(t) + \varphi(s) \qquad (t, s \in G')$$

folgt. Diese Gleichung hat die stetige Lösung $\varphi(t) = ct$. (S. Aczél [1]).

Beispiel. Sei $A=\{1, a\}$, wobei $a>0$ eine irrationale Zahl ist. Dann ist $\{A\}$ eine in $(-\infty, \infty)$ überall dichte Menge. Also ist die monotone bzw. stetige Lösung des Funktionalgleichungssystems

$$\varphi(t+1)=\varphi(t)+\varphi(1) \qquad (t \in \langle 0, \infty), \; a>0 \quad \text{eine irrationale Zahl})$$
$$\varphi(t+a)=\varphi(t)+\varphi(a)$$
$$\varphi(t)=ct.$$

Literatur

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Basel—Stuttgart—Berlin*, 1961.

[2] J. Aczél—Z. Daróczy, Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 95—121.

[3] P. Erdős, On the distribution function of additive functions, *Ann. Math.* **47** (1946), 1—20.

[4] D. K. Faddejew, Zum Begriff der Entropie eines endlichen Wahrscheinlichkeitsschemas, *Arbeiten zur Informationstheorie I. Berlin,* 1957.

[5] A. Rényi, On a theorem of P. Erdős and its application in information theory, *Mathematica (Cluj)*, **1**, **(24)** (1959), 341—344.

(Eingegangen am 26. Oktober 1965.)