

Ein kombiniertes Randwertproblem im Einheitskreis

Von MANFRED WALK (Jena)

Wir betrachten im R_2 den Einheitskreis $\Omega = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ und außerdem einen elliptischen Differentialoperator der Form

$$Lu = \Delta u + b_i D_i u - au.$$

Dabei ist Δ der Laplacesche Operator, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und es sind b_i , $i = 1, 2$ und a vorgegebene Funktionen. Wir vereinbaren, daß über doppelt auftretende Indizes stets summiert wird.

Als kombiniertes Randwertproblem bezeichnen wir die Aufgabe, eine Funktion u zu finden, die für eine auf $\partial\Omega_1 = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \geq 0\}$ gegebene Funktion ψ und für eine auf $\partial\Omega_2 = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 < 0\}$ gegebene Funktion φ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$Lu = 0$$

$$(1) \quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi$$

$$lu = M_i D_i u|_{\partial\Omega_2} = \varphi.$$

$M = (M_1, M_2)$ bezeichnet den äußeren Normalenvektor des Randes $\partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2$. In dieser Arbeit wird die Lösbarkeit der Aufgabe (1) in dem von S. L. SOBOLEW in [1] charakterisierten Raum $W_2^{(2)}(\Omega)$ untersucht. Zum Existenznachweis einer Lösung verwenden wir das Verfahren der stetigen Fortsetzung von Operatoren ausgehend von einem zu (1) anlogem kombinierten Problem für den Laplaceschen Operator. Dieses Verfahren wurde bereits in [2] von C. MIRANDA erfolgreich zum Nachweis der Existenz einer Lösung des kombinierten Problems in Hölderstetigen Räumen, die mit einer geeigneten Gewichtsfunktion ausgestattet sind, sowie in [3] von O. A. LADYJENSKAJA zum Nachweis der Existenz einer Lösung des Dirichlet-schen Problems in $W_2^{(2)}$ verwendet. Es stützt sich auf einige a priori Abschätzungen für die mutmaßliche Lösung der zu untersuchenden Probleme. In [4], Kapitel 1 wurde gezeigt, daß im Spezialfall $b_i = a = 0$ das kombinierte Problem im klassischen Sinne gelöst werden kann, wenn sich ψ und φ in Form von Fourierreihen darstellen lassen, ψ differenzierbar ist und φ sowie die Ableitungen von ψ Funktionen von beschränkter Schwankung sind. Die Lösung u ergibt sich in diesem Falle als in Ω zweimal stetig differenzierbare Funktion, die durch die Auflösung unendlich-dimensionaler algebraischer linearer Gleichungssysteme konstruiert werden kann. Verwendet man die in [4], Kapitel 1 demonstrierte Methode, so kann man zeigen,

daß das kombinierte Problem für den Laplaceschen Operator eine sogar in $\Omega + \partial\Omega$ zweimal stetig differenzierbare Lösung besitzt, wenn ψ viermal und φ dreimal stetig differenzierbar sowie ψ fünfmal und φ viermal stückweise stetig differenzierbar ist.

Bevor wir die notwendigen a priori Abschätzungen herleiten, geben wir die für die Untersuchung wichtigsten Funktionenräume an. Wir benötigen die Räume $W_2^{(k)}(\Omega)$, $k=0, 1, 2$. Dabei ist $W_2^{(0)}(\Omega) = L_2(\Omega)$ und wir verwenden als Normen:

$$u \in W_2^{(2)}(\Omega), \|u\|_{2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^2 (D_i D_j u)^2 + (\text{grad } u)^2 + u^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u \in W_2^{(1)}(\Omega), \|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 dx + \int_{\partial\Omega_1} u^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u \in W_2^{(0)}(\Omega), \|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Sobolewschen Räume $W_2^{(k)}(\partial\Omega)$, $k=1, 2$ bezüglich des Randes $\partial\Omega$ wurden in [5] präzisiert und es wurden geeignete Normen $\|u\|_{k,\partial\Omega}$ konstruiert, die wir hier nicht weiter erläutern. Eine wichtige Rolle spielen die folgenden Unterräume aus $W_2^{(2)}(\Omega)$:

$$E = \{v; v \in W_2^{(2)}(\Omega), \Delta v = 0, v|_{\partial\Omega_1} = 0, lu = 0\},$$

$$W = \{u; u \in W_2^{(2)}(\Omega), u|_{\partial\Omega_1} \in W_2^{(2)}(\partial\Omega_1), lu \in W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)\}.$$

Dabei ist E der Raum der Eigenfunktionen des kombinierten Problems für den Laplaceschen Operator in $W_2^{(2)}(\Omega)$. Außerdem führen wir noch den Raum

$$H = W_2^{(0)}(\Omega) \times W_2^{(2)}(\partial\Omega_1) \times W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$$

und die Unterräume

$$H_0 = \left\{ (0, \psi, \varphi); \psi \in W_2^{(2)}(\partial\Omega_1), \varphi \in W_2^{(1)}(\partial\Omega_2), \int_{\partial\Omega_1} \psi M_i D_i v d\sigma = \int_{\partial\Omega_2} \varphi v d\sigma, v \in E \right\},$$

$$H_L = \{(Lu, u|_{\partial\Omega_1}, lu); u \in W\}$$

ein. H ist offensichtlich ein Banachraum und wir definieren die Norm eines Elementes $(f, \psi, \varphi) \in H$ durch

$$\|(f, \psi, \varphi)\|_H = \|f\|_{0,\Omega} + \|\psi\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}.$$

Wir werden als nächstes einige grundlegende Ungleichungen herleiten. Es seien die Funktionen b_i in Ω stetig und beschränkt und $a \in \bigcup_{q < 1} L_{\frac{2q}{q-1}}(\Omega)$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für jedes $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$

$$(2) \quad \|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} \leq C \|u\|_{1,\Omega}$$

gilt. Tatsächlich, man erhält offensichtlich nach Anwendung der Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung

$$(3) \quad \|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} \leq \max_{i=1,2} |b_i| \|D_i u\|_{0,\Omega} + \|a\|_{L_{\frac{2q}{q-1}}(\Omega)} \|u\|_{L_{2q}(\Omega)}.$$

Da auf Grund der Sobolewschen Einbettungssätze jede Funktion $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ zu jeder beliebigen Potenz integrierbar ist und es eine Konstante $C > 0$, gibt, so daß

$$\|u\|_{L_{2q}(\Omega)} \leq C \|u\|_{1,\Omega}$$

erfüllt ist, folgt (2) sofort aus (3).

Hilfssatz 1. *Es gibt eine absolute Konstante $C > 0$, so daß jede Funktion $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ der Ungleichung*

$$(4) \quad \|u\|_{1,\Omega} \leq C(\|Au\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})$$

genügt.

BEWEIS. Es ist sicher

$$(5) \quad \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 dx = - \int_{\Omega} Au \cdot u dx + \int_{\partial\Omega} lu \cdot u d\sigma.$$

Verwendet man die Höldersche Ungleichung und die Sobolewschen Einbettungssätze, so erhält man

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq C(\|Au\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2}) \|u\|_{1,\Omega} + \|u\|_{0,\partial\Omega_1}^2.$$

Da für beliebige $\varepsilon > 0$ und beliebige reelle Zahlen α, β stets

$$\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \beta^2$$

ist, ergibt sich

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{\varepsilon C}{2} \|u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{C}{2\varepsilon} (\|Au\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})^2 + \|u\|_{0,\partial\Omega_1}^2,$$

woraus (4) sofort für ein genügend kleines ε folgt. Es sei τ eine reelle Zahl mit $0 \leq \tau \leq 1$. Wir betrachten eine Familie von Operatoren der Form

$$L_{\tau} = A + \tau(L - A).$$

Hilfssatz 2. *Wenn die Funktionen b_i und a den angegebenen Bedingungen genügen und außerdem $a \equiv a_0$ für eine geeignete Konstante a_0 ist, so existiert ein $C > 0$, welches nicht von τ mit $0 < \tau_0 \leq \tau \leq 1$ abhängt, so daß jede Funktion $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ der Ungleichung*

$$(6) \quad \|u\|_{1,\Omega} \leq C(\|L_{\tau}u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2})$$

genügt.

BEWEIS. Aus der Identität (5) folgt

$$\int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 dx + \int_{\Omega} \tau au^2 dx = - \int_{\Omega} L_{\tau}u \cdot u dx + \int_{\partial\Omega} lu \cdot u d\sigma + \int_{\Omega} \tau b_i D_i u \cdot u dx.$$

Ähnlich wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 erhält man daraus

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 dx + \tau_0 a_0 \int_{\Omega} u^2 dx \leq \\ & \leq (\|L_{\tau} u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2}) \|u\|_{1,\Omega} + \frac{\varepsilon C}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 dx + \frac{C}{2\varepsilon} \|u\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 1/C$ ergibt das

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 dx + \left(\tau_0 a_0 - \frac{C^2}{2} \right) \int_{\Omega} u^2 dx \leq \\ & \leq (\|L_{\tau} u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{0,\partial\Omega_2}) \|u\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Wird a_0 so gewählt, daß $\left(\tau_0 a_0 - \frac{C^2}{2} \right) > 0$ ist, so steht auf der linken Seite der letzten Ungleichung eine zu $\|u\|_{1,\Omega}$ äquivalente Norm. Darum ist diese Ungleichung mit der Abschätzung (6) evident.

Hilfssatz 3. Wenn die Funktionen b_i und a die Bedingungen des Hilfssatzes 2 erfüllen, so existiert eine Konstante $C > 0$, die nicht von τ mit $0 < \tau_0 \leq \tau \leq 1$ abhängt, so daß jede Funktion $u \in W$ der Ungleichung

$$(7) \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C(\|L_{\tau} u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügt.

BEWEIS. In [5] wurde gezeigt, daß für jede Funktion $u \in C_2(\Omega + \partial\Omega)$ die Ungleichung

$$(8) \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2} + \|u\|_{1,\Omega})$$

erfüllt ist, wobei C eine unabhängige Konstante ist. Daraus folgt

$$(9) \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C(\|L_{\tau} u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega_1} + \|lu\|_{1,\partial\Omega_2} + \|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}).$$

Aus den Ungleichungen (2), (6) und (9) folgt die Abschätzung (7). Indem man die Funktionen $u \in W$ durch unendlich oft differenzierbare Funktionen approximiert, erhält man die Gültigkeit der Ungleichung (7) auch für alle Funktionen $u \in W$.

Angenommen es wäre $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ eine Lösung des kombinierten Randwertproblems

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi, \quad lu = \varphi.$$

In diesem Fall müßten die vorgegebenen Funktionen ψ und φ notwendig einer Integralidentität der Form

$$(10) \quad \int_{\partial\Omega_1} M_i D_i v \cdot \psi d\sigma = \int_{\partial\Omega_2} \varphi \cdot v d\sigma$$

für alle $v \in E$ genügen. Denn für beliebige Funktionen $u, v \in W_2^{(2)}(\Omega)$ ist sicher

$$(11) \quad \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dx = \int_{\partial\Omega} M_i D_i u \cdot v d\sigma.$$

Außerdem gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\partial\Omega} M_i D_i v \cdot u \, d\sigma - \int_{\Omega} \Delta v \cdot u \, dx.$$

Ist u die angenommene Lösung des kombinierten Problems und $v \in E$, so folgt (10) unmittelbar aus den letzten beiden Gleichungen.

Satz 1. Für jedes Element $(0, \psi, \varphi) \in H_0$ existiert genau eine Funktion $u \in W$, die Lösung des kombinierten Problems

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi, \quad lu = \varphi$$

ist und die der Ungleichung

$$(12) \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügt, wobei C eine von u unabhängige absolute positive Konstante ist.

Dieser Satz besagt nichts weiter, als daß $H_0 \subset H_A$ ist.

BEWEIS. Es sei $(0, \psi, \varphi) \in H_0$. Dann gibt es Folgen ψ_v und φ_v beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit der Eigenschaft

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \psi_v = \psi, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \varphi_v = \varphi.$$

Dabei findet die Konvergenz in den entsprechenden Räumen $W_2^{(2)}(\partial\Omega_1)$ bzw. $W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$ statt. Nach den über die klassische Lösbarkeit des kombinierten Problems gemachten Bemerkungen existiert dann eine Folge $u_v \in C_2(\Omega + \partial\Omega)$, so daß

$$\Delta u_v = 0, \quad u_v|_{\partial\Omega_1} = \psi_v, \quad lu_v = \varphi_v$$

erfüllt ist. Gemäß dem Hilfssatz 1 und der Ungleichung (8) ergibt sich, daß die Funktionen u_v der Abschätzung

$$\|u_v\|_{2,\Omega} \leq C(\|\psi_v\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi_v\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügen. Infolgedessen konvergiert u_v für $v \rightarrow \infty$ in der Norm von $W_2^{(2)}(\Omega)$ gegen eine Funktion u . Für diese ist die Ungleichung (12) erfüllt. Es erweist sich, daß u die gesuchte Lösung des kombinierten Problems ist. Denn aus

$$\|\Delta u\|_{0,\Omega} \leq \|u - u_v\|_{2,\Omega} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$$

folgt $\Delta u = 0$. Außerdem ist gemäß den Sobolewschen Einbettungssätzen

$$\|u - \psi\|_{0,\partial\Omega_1} \leq \|u - u_v\|_{0,\partial\Omega_1} + \|\psi_v - \psi\|_{0,\partial\Omega_1} \leq$$

$$\leq C(\|u - u_v\|_{2,\Omega} + \|\psi_v - \psi\|_{2,\partial\Omega_1}) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0,$$

woraus $u|_{\partial\Omega_1} = \psi$ folgt. Da die Identität (11) auch für alle $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1} = 0$ erfüllt ist und φ_v für $v \rightarrow \infty$ in der Norm von $W_2^{(1)}(\partial\Omega_2)$ gegen φ konvergiert, erhält man für die gewonnene Funktion u und $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1} = 0$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_2} \varphi v \, d\sigma &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_2} \varphi_v v \, d\sigma = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \Delta u_v \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{grad} u_v \cdot \operatorname{grad} v \, dx \right) = \\ &= \int_{\partial\Omega_2} lu \cdot v \, d\sigma. \end{aligned}$$

Also ist für alle Funktionen $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ mit $v|_{\partial\Omega_1} = 0$

$$(13) \quad \int_{\partial\Omega_2} (\varphi - lu)v \, d\sigma = 0.$$

Insbesondere ist (13) für alle $v \in \dot{C}_\infty(\Omega + \partial\Omega) = \{v; v \in C_\infty(\Omega + \partial\Omega), v|_{\partial\Omega_1} = 0\}$ und damit für alle $v \in L_p(\partial\Omega_2)$ mit $p > 1$ erfüllt, da die Einschränkung der Funktionen aus $\dot{C}_\infty(\Omega + \partial\Omega)$ auf $\partial\Omega_2$ in $L_p(\partial\Omega_2)$ dicht liegt. Andererseits sind die Funktionen φ und lu auf Grund der Sobolewschen Einbettungssätze über $\partial\Omega_2$ zu jeder Potenz integrierbar. Darum ist $(\varphi - lu) \in L_q(\partial\Omega_2)$ für eine reelle Zahl q mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ und somit ist die Identität (13) nur möglich, wenn $lu = \varphi$ ist. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt unmittelbar aus der Ungleichung (12).

Wir betrachten die Parameter τ mit $0 \leq \tau \leq 1$. Dann wird durch die Gleichung

$$\Phi_\tau(u) = (L_\tau u, u|_{\partial\Omega_1}, lu)$$

eine Familie parameterabhängiger Abbildungen von W in H definiert. Diese Abbildungen sind linear und darum gilt

$$\Phi_\tau(u) = \Phi_0(u) + \tau(\Phi_1(u) - \Phi_0(u)).$$

Der Satz 1 besagt dann, daß H_0 in $H_A = \Phi_0(W)$ enthalten ist, Φ_0 den Raum W umkehrbar eindeutig auf H_A abbildet und daß auf Grund der Ungleichung (8) und des Hilfssatzes 1 eine absolute Konstante $C > 0$ existiert, so daß

$$\|\Phi_0^{-1}\| \leq C$$

ist.

Satz 2. Es seien b_i stetige beschränkte Funktionen in Ω und a eine Funktion aus $\bigcup_{q>1} L_{\frac{2q}{q-1}}(\Omega)$, die stets größer als eine gewisse Konstante a_0 ist. Dann existiert für jedes Element $(0, \psi, \varphi) \in H_0$ genau eine Funktion $u \in W$, die Lösung des kombinierten Problems

$$Lu = 0, \quad u|_{\partial\Omega_1} = \psi, \quad lu = \varphi$$

ist und die der Ungleichung

$$(14) \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2})$$

genügt, wobei C eine von u unabhängige absolute positive Konstante ist.

Der Satz 2 sagt aus, daß H_0 in $H_L = \Phi_1(W)$ enthalten ist, Φ_1 den Raum W umkehrbar eindeutig auf H_L abbildet und daß eine absolute Konstante $C > 0$ existiert, so daß

$$\|\Phi_1^{-1}\| \leq C$$

ist.

BEWEIS. Wir zeigen, daß es ein $\tau_1 > 0$ gibt, so daß für jedes $(0, \psi, \varphi) \in H_0$ ein $u \in W$ mit

$$(15) \quad \Phi_{\tau_1}(u) = \Phi_0(u) + \tau_1(\Phi_1(u) - \Phi_0(u)) = (0, \psi, \varphi)$$

existiert. Offensichtlich ist die Lösbarkeit der Gleichung (15) äquivalent mit der Lösbarkeit von

$$(16) \quad [I + \tau_1 \Phi_0^{-1}(\Phi_1 - \Phi_0)]u = \Phi_0^{-1}(0, \psi, \varphi),$$

wobei I den identischen Operator bezeichnet. Aus einem bekannten Satz der Funktionalanalysis folgt, daß die Gleichung (16) lösbar ist, wenn

$$\tau_1 \|\Phi_0^{-1}(\Phi_1 - \Phi_0)\| < 1$$

ist. Das ist aber für ein geeignetes $\tau_1 > 0$ der Fall, denn es gilt

$$\|\Phi_0^{-1}(\Phi_1 - \Phi_0)u\|_{2,\Omega} \leq C\|(\Phi_1 - \Phi_0)u\|_H = C\|b_i D_i u - au\|_{0,\Omega} \leq C^* \|u\|_{2,\Omega}.$$

Folglich muß $0 < \tau_1 < \frac{1}{C^*}$ gewählt werden.

Es sei $0 < \tau_0 \leq \tau_1$. Dann erfüllt die Lösung der Gleichung (15) infolge des Hilfssatzes 3 die Ungleichung

$$(17) \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C(\|\psi\|_{2,\partial\Omega_1} + \|\varphi\|_{1,\partial\Omega_2}).$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$(18) \quad \|\Phi_{\tau_1}^{-1}\| \leq C.$$

Es gibt eine konstante Schrittlänge $d > 0$, so daß auch die Gleichungen

$$\Phi_{\tau_1+d}(u) = (0, \psi, \varphi), \quad \Phi_{\tau_1+2d}(u) = (0, \psi, \varphi), \dots$$

lösbar sind und man erreicht damit nach endlich vielen Schritten die Lösbarkeit der Gleichung

$$\Phi_1(u) = (0, \psi, \varphi).$$

Tatsächlich, es ist

$$\Phi_{\tau_1+d}(u) = \Phi_{\tau_1}(u) + d(\Phi_1(u) - \Phi_0(u)) = (0, \psi, \varphi)$$

äquivalent mit

$$[I + d\Phi_{\tau_1}^{-1}(\Phi_1 - \Phi_0)]u = \Phi_{\tau_1}^{-1}(0, \psi, \varphi).$$

Die letzte Gleichung ist aber für eine reelle Zahl d mit

$$0 < d < \frac{1}{\|\Phi_{\tau_1}^{-1}(\Phi_1 - \Phi_0)\|}$$

lösbar und die Lösung genügt gemäß der Behauptung des Hilfssatzes 3 der Ungleichung (17) mit einer absoluten Konstanten C , die nicht mehr von d abhängt. Darum ist

$$(19) \quad \|\Phi_{\tau_1+d}^{-1}\| \leq C,$$

wobei die Konstanten in (18) und (19) übereinstimmen. Damit wurde gezeigt, daß d eine konstante Schrittlänge ist und man nach endlich vielen Schritten die Abbildung Φ_1 erreicht.

Literaturverzeichnis

- [1] S. L. SOBOLEW, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik, *Leningrad*, (1950)
- [2] C. MIRANDA, Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche *Ann. Mat. purch. appl.*, IV Ser. **39** (1955), 279—303.
- [3] O. A. LADYJENSKAJA, Ein einfacher Beweis der Lösbarkeit von Randwertaufgaben und Eigenwertaufgaben für lineare elliptische Gleichungen *Vestnik Leningradskogo Universitetja Ser. Matematik*, No **11** (1955).
- [4] KANTOROWITSCH—KRYLOW, Näherungsmethoden der höheren Analysis, *Moskau—Leningrad* (1952).
- [5] M. WALK, Verallgemeinerte Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen *Wissensch. Zeitschr. der Friedrich-Schiller Univ. Jena, Mathematisch—Naturwissenschaftliche Reihe*, Heft **5**, (1965).

(Eingegangen am 15. August 1966.)