

Über eine Operatorgleichung im Hilbertraum

Von Z. DARÓCZY (Debrecen)

Einleitung. Es sei H ein reeller Hilbertraum, ferner seien $A: H \rightarrow H$ und $B: H \rightarrow H$ beschränkte von Null verschiedene lineare Operatoren. Wir betrachten eine stetige eindeutige Abbildung $f: H \rightarrow H$, welche der Operatorgleichung

$$(1) \quad f[A(x) + y] = B[f(x)] + f(y)$$

für alle $x, y \in H$ genügt.

Ist H ein eindimensionaler Raum, so kann man H als die Menge der reellen Zahlen betrachten. Dann haben A bzw. B die Gestalt $A(x) = \alpha x$, $B(x) = \beta x$ ($\alpha\beta \neq 0$), und die Operatorgleichung (1) geht in die Funktionalgleichung

$$(1') \quad f(\alpha x + y) = \beta f(x) + f(y)$$

über. Es ist bekannt, dass die Gleichung (1') dann und nur dann eine stetige nicht-konstante Lösung hat, wenn $\alpha = \beta$ ist (S. [1], [2] und vgl. [3]). (Wenn wir keine Regularitätsvoraussetzungen über f in (1') machen, so kann man notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen der Gleichung (1') angeben. (S. [3], [4], [5], [2].) In der vorliegenden Arbeit wollen wir dieses Ergebnis verallgemeinern und die allgemeinen stetigen Lösungen der Operatorgleichung (1) in H darstellen.

1. Bezeichnungen

Es bezeichne $\mathfrak{R}(H)$ die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $A: H \rightarrow H$. Ist $A \in \mathfrak{R}(H)$, so schreibt man $A(H) = \{y | y = A(x), x \in H\}$ und es sei $\overline{A(H)}$ die Abschließung von $A(H)$. Es sei $L^\perp$ das orthogonale Komplement eines abgeschlossenen linearen Teilraums $L \subset H$. Dann ist $H = L \oplus L^\perp$, d.h. ein beliebiges $x \in H$ besitzt die eindeutige Zerlegung

$$x = l + l' \quad (l \in L, l' \in L^\perp).$$

Dann sind die Projektionen von x auf L bzw. $L^\perp$ $l = P_L(x)$ bzw. $l' = P_{L^\perp}(x)$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(L \rightarrow H)$ die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $C: L \rightarrow H$. (vgl. [6]).

2. Allgemeine Lösung

Wir beweisen den folgenden

Satz. Die allgemeine stetige Lösung der Operatorgleichung (1) ist

$$(2) \quad f(x) = F[P_L(x)] + \varphi[P_L^\perp(x)] + b \quad (x \in H),$$

wobei $L = \overline{A(H)}$, $B(b) = 0$ ist, und die Abbildungen $F \in \mathfrak{N}(L \rightarrow H)$, $\varphi: L^\perp \rightarrow H$ (φ stetig mit $\varphi(0) = 0$) beliebig sind mit der Eigenschaft

$$(3) \quad FA = BFP_L + B\varphi P_L^\perp.$$

BEWEIS. Erstens zeigen wir, daß eine stetige Lösung $f: H \rightarrow H$ von (1) (wo $A, B \in \mathfrak{N}(H)$ von Null verschiedene Operatoren sind) in der Gestalt (2) dargestellt werden kann. Es sei $b = f(0)$, dann erhalten wir aus (1) mit der Substitution $x = y = 0$, daß $B(b) = 0$ gilt. Setzen wir jetzt in (1) $y = 0$, so ergibt sich

$$(4) \quad f[A(x)] = B[f(x)] + b \quad (x \in H)$$

und mit der Bezeichnung $g(x) = f(x) - b$ ($x \in H$) erhalten wir

$$(5) \quad g[A(x) + y] = g[A(x)] + g(y) \quad (x, y \in H).$$

Aus der Stetigkeit von f folgt, daß $g: H \rightarrow H$ stetig ist, und aus (5) ergibt sich die Gleichung

$$(6) \quad g(a + y) = g(a) + g(y)$$

für alle $a \in \overline{A(H)} = L$ und $y \in H$. Ist $x \in H$ beliebig, so gilt die Darstellung $x = P_L(x) + P_L^\perp(x)$, und wir erhalten aus (6)

$$g(x) = g[P_L(x) + P_L^\perp(x)] = g[P_L(x)] + g[P_L^\perp(x)].$$

Es sei jetzt $F(a) = g(a)$ falls $a \in L$ und $\varphi(a') = g(a')$ falls $a' \in L^\perp$. Dann sind $F: L \rightarrow H$ und $\varphi: L^\perp \rightarrow H$ ($\varphi(0) = 0$) stetig. Ferner gilt nach (6)

$$F(a_1 + a_2) = g(a_1 + a_2) = g(a_1) + g(a_2) = F(a_1) + F(a_2)$$

für alle $a_1, a_2 \in L$. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von F , daß F ein Element von $\mathfrak{N}(L \rightarrow H)$ ist.

Nun gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + b = g[P_L(x) + P_L^\perp(x)] + b = \\ &= g[P_L(x)] + g[P_L^\perp(x)] + b = F[P_L(x)] + \varphi[P_L^\perp(x)] + b, \end{aligned}$$

d.h. f besitzt die Gestalt (2). Ferner gilt nach (4)

$$B[f(x)] = F[A(x)] - b = g[A(x)],$$

und daraus folgt

$$B[F(P_L(x))] + B[\varphi(P_L^\perp(x))] = F[A(x)] \quad (x \in H),$$

d.h. die Identität (3).

Zweitens genügt es zu zeigen, dass (2) (unter den angegebenen Bedingungen) eine stetige Lösung von (1) ist. Die Stetigkeit ist trivial, ferner gilt

$$\begin{aligned} f[A(x) + y] &= FP_L[A(x) + y] + \varphi[P_L^\perp(A(x) + y)] + b = \\ &= F[P_L(A(x)) + P_L(y)] + \varphi[P_L^\perp(A(x)) + P_L^\perp(y)] + b = \\ &= F[A(x)] + F[P_L(y)] + \varphi[P_L^\perp(y)] + b = \\ &= B[F(P_L(x))] + B[\varphi(P_L^\perp(x))] + f(y) = \\ &= B[F(P_L(x)) + \varphi(P_L^\perp(x)) + b] + f(y) = B[f(x)] + f(y), \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Korollar. Ist $A(H)$ eine dichte Menge in H , so hat (1) die allgemeine stetige Lösung

$$f(x) = F(x) + b,$$

wobei $F \in \mathfrak{N}(H)$, $B(b) = 0$ ist, und es gilt die Gleichung $FA = BF$.

BEWEIS. Wegen der Gleichheit $L = \overline{A(H)} = H$ und aus (2), (3) folgt die Behauptung. (Bemerkung: Das Korollar gilt auch dann, wenn H ein topologischer linearer Raum über den Körper der reellen Zahlen ist).

Im eindimensionalen Fall ist $b = 0$, und die einzige Lösung der Gleichung $\xi\alpha = \beta\xi$ (mit $F(x) = \xi x$) ist $\xi = 0$ falls $\alpha \neq \beta$ und ξ beliebig falls $\alpha = \beta$.

Literatur

- [1] J. ACZÉL, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comm. Math. Helvetici*, **21** (1948), 247—256.
- [2] J. ACZÉL, Lectures on functional equations and their applications, *New York—London*, 1966.
- [3] Z. DARÓCZY, Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.* **22** (1961), 31—41.
- [4] DARÓCZY Z., A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Mat. Lapok*, **15** (1964), 52—86.
- [5] L. LOSONCZI, Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 250—254.
- [6] F. RIESZ—B. SZ.—NAGY, Vorlesungen über Funktionalanalysis, *Berlin* 1956.

(Eingegangen am 6. Dezember 1966.)