

## Les solutions convexes de l'équation fonctionnelle

$$g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$$

Par M. ROZMUS-CHMURA (Katowice)

C'est l'existence et l'unicité des solutions convexes dans un intervalle  $(a, b]$  de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$$

où  $\varphi(x)$  est la fonction cherchée, qui font l'objet de cette note.

Le problème de l'unicité des solutions convexes de l'équation (1) dans le cas où l'intervalle  $(a, b)$  est infini, a été déjà examiné par Kuczma [3].

Cette étude-ci comprend aussi bien le cas où l'intervalle  $(a, b)$  est infini que le cas où il est fini.

L'équation (1) est une généralisation de l'équation d'Abel

$$g[\alpha(x)] - g(x) = l$$

dont les solutions convexes ont été présentées dans l'étude [5].

Supposons que la fonction  $\alpha(x)$  satisfait aux conditions suivantes:

(H<sub>1</sub>)  $\alpha(x)$  est croissante et concave dans l'intervalle  $(a, b]$   $-\infty \leq a < b < \infty$ ,  $a < \alpha(x) < x$  dans  $(a, b]$  et que:  $\lim_{x \rightarrow a+} \alpha'(x) = 1$

et supposons que la fonction  $\varphi(x)$  satisfait aux conditions:

(H<sub>2</sub>)  $\varphi(x)$  est croissante et concave dans l'intervalle  $(a, b]$  et  $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = l$  où  $|l| < \infty$ .

La définition et des propriétés des fonctions convexes et concaves ont été présentées par Bourbaki [1]. En particulier les fonctions concaves et convexes, sont presque partout différentiables.

Les itérées naturelles de la fonction  $\alpha(x)$  sont définies par les relations:  $\alpha^1(x) = \alpha(x)$ ,  $\alpha^{n+1}(x) = \alpha[\alpha^n(x)]$ .

Pour la fonction  $\alpha(x)$  qui satisfait aux conditions (H<sub>1</sub>) toutes les itérées  $\alpha^n(x)$  sont définies, strictement croissantes et concaves dans l'intervalle  $(a, b]$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(x) = a$  pour chaque  $x \in (a, b]$ .

Pour un  $x \in (a(b), b)$  fixé nous posons:  $x_n = \alpha^n(x)$ ,  $b_n = \alpha^n(b)$ , ainsi que  $\delta_n(x) = b_n - x_n$ ,  $\Delta_n = b_{n-1} - b_n$ .

**Théorème.** Si  $\alpha(x)$  satisfait aux conditions (H<sub>1</sub>) et si  $\varphi(x)$  satisfait aux conditions (H<sub>2</sub>), alors:

$$(2) \quad g(x) = g(b) + \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] + l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est la solution convexe unique (à constante additive  $g(b)$  près) de l'équation (1).

DÉMONSTRATION. Considerons les équations:

$$(3) \quad g_1[x(x)] - g_1(x) = \varphi_1(x)$$

où  $\varphi_1(x) = \varphi(x) - l$

$$(4) \quad g_2[x(x)] - g_2(x) = l.$$

Il résulte des hypothèses (H<sub>2</sub>) que  $\lim_{x \rightarrow a_+} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} [\varphi(x) - l] = 0$ . Par conséquent, à base des résultats des études de Kuczma [4] l'équation (3) possède la solution suivante:

$$g_1(x) = g_1(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi_1(b_k) - \varphi_1(x_k)] = g_1(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)]$$

(C'est d'ailleurs la seule solution monotone de cette équation.) La fonction  $g_1(x)$  est convexe, car pour chaque  $k$   $\varphi(x_k)$  est concave étant une superposition des fonctions concaves et croissantes.

Il résulte du travail de Kuczma [5] que, au cas où  $\alpha(x)$  satisfait aux conditions (H<sub>1</sub>), alors la fonction

$$g_2(x) = g_2(b) + l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est la solution convexe unique de l'équation (4).

Il résulte de la forme des équations (3) et (4) que la fonction

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = g(b) + \sum_{k,0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] + l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est une solution convexe de l'équation (1).

Pour prouver l'unicité nous allons nous servir de la fonction  $\bar{g}(x) = \frac{g(x+c) - g(c)}{x}$  où  $c$  est une constante. Comme  $\alpha(x)$  est convexe, la fonction  $\bar{g}(x)$  est croissante. Supposons que  $x \in (b_1, b)$ . Il est facile à prouver que  $\delta_n(x) < \Delta_{n+1}$ . Par conséquent, quand on admet que  $c = b_n$ , nous avons:

$$\bar{g}(-\Delta_{n+1}) = \frac{g(b_{n+1}) - g(b_n)}{-b_n + b_{n+1}} \cong \frac{g(x_n) - g(b_n)}{-b_n + x_n} = \bar{g}(-\delta_n(x))$$

c'est à dire

$$(5) \quad \frac{\varphi(b_n)}{\Delta_{n+1}} \cong \frac{g(x_n) - g(b_n)}{\delta_n(x)}.$$

De même

$$\bar{g}(-\delta_n(x)) = \frac{g(x_n) - g(b_n)}{-b_n + x_n} \cong \frac{g(b_{n-1}) - g(b_n)}{b_{n-1} - b_n} = \bar{g}(\Delta_n)$$

c'est à dire

$$(6) \quad \frac{g(x_n) - g(b_n)}{\delta_n(x)} \cong \frac{\varphi(b_{n-1})}{\Delta_n}.$$

Vu conditions (5) et (6) nous avons

$$(7) \quad \frac{\delta_n(x)}{\Delta_n} \varphi(b_{n-1}) \leq g(x_n) - g(b_n) \leq \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \varphi(b_n).$$

Mais

$$\begin{aligned} g(x_n) - g(b_n) &= g(x_n) - g(x) + g(x) - g(b_n) + g(b) - g(b) = \\ &= \sum_{k,0}^{n-1} [g(x_{k+1}) - g(x_k)] + g(x) - \sum_{k,0}^{n-1} [g(b_{k+1}) - g(b_k)] - g(b) = \\ &= g(x) - g(b) - \sum_{k,0}^{n-1} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, il résulte de (7)

$$(8) \quad \begin{aligned} &\frac{\delta_n(x)}{\Delta_n} \varphi(b_{n-1}) - \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \varphi(b_n) \leq \\ &\leq g(x) - \left\{ g(b) + \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \varphi(b) + \sum_{k,0}^{n-1} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

En désignant

$$(9) \quad g_n(x) = g(b) + \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} + \sum_{k,0}^{n-1} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)]$$

nous avons

$$(10) \quad \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \left[ \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \varphi(b_{n-1}) - \varphi(b_n) \right] \leq g(x) - g_n(x) \leq 0.$$

KUCZMA et SMAJDOR [6] ont prouvé que, au cas où la fonction  $\alpha(x)$  satisfait aux conditions  $(H_1)$ , alors

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n-1}(x) - \alpha^n(x)}{\alpha^{n-1}(y) - \alpha^n(y)} = 1$$

pour n'importe quels  $x, y \in (a, b]$ .

En admettant  $x = b_1, y = b$  dant (11) nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n+1}}{b_{n-1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = 1$$

De plus, par hypothèse  $\lim_{x \rightarrow a_+} \varphi(x) = l$  où  $|l| < \infty$  c'est à dire:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(b_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(b_n) = l$ .

A cause de l'inégalité  $0 < \delta_n(x) < \Delta_{n+1}$  la séquence  $\left\{ \frac{\delta_n(x)}{\Delta_{n+1}} \right\}$  est limitée. De là et de l'inégalité (10) nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{pour } x \in (b_1, b).$$

Il résulte immédiatement de la form de la séquence (9) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(b) = g(b)$$

C'est à dire pour chaque  $x \in (b_1, b]$  la fonction  $g(x)$  est la limite de la séquence  $g_n(x)$ . KORDYLEWSKI et KUCZMA [2] ont prouvé qu'une fonction qui remplit l'équation (1) est déterminée par ses valeurs dans l'intervalle  $(b_1, b]$ . On a prouvé ainsi l'unicité des solutions dans l'intervalle  $(a, b]$ .

### Bibliographie

- [1] N. BOURBAKI, Les structures fondamentales de l'analyse Livre IV. Fonctions d'une variable<sup>1</sup> réelle, *Paris* 1951.
- [2] J. KORDYLEWSKI—M. KUCZMA, On some linear functional equation *Ann. Polon. Math.* **9** (1960), 119—136.
- [3] M. KUCZMA, On convex solution of the functional equation  $g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$  *Publ. Math. (Debrecen)* **6** (1959), 40—47.
- [4] M. KUCZMA, Sur une équation fonctionnelle, *Mathematica Cluj*, **3** **26** (1961), 79—87.
- [5] M. KUCZMA, On convex solutions of Abel's functional equation, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys.* **13** (1965), 645—648.
- [6] M. KUCZMA—A. SMAJDOR, Note on iteration of concave functions *Amer. Math. Monthly* (to appear).

(Reçu le 8. december 1966.)