

О структуре сплетения конечного числа циклических групп простого порядка

К. БУЗАШИ (Дебрецен)*

§ 1.

Введение

Как известно, силовская p -подгруппа S_n симметрической группы $\mathcal{S}_{p^n}$ является сплетением n циклических групп простого порядка p . В этом и заключается особый интерес задачи исследования строения группы S_n .

В работах Л. А. Калужнина [1], [2] описаны все характеристические подгруппы силовской p -подгруппы S_n симметрической группы $\mathcal{S}_{p^n}$. А. И. Веир в работе [3] даёт красивую модель для строения центрального ряда группы S_n . Для решения поставленной задачи автор работы [3] строит удобный базис в абелевом нормальном делителе группы S_n . Явные формулы, хорошо раскрывающие структуру этого базиса, найдены в работе [4].

Используя эти результаты, в настоящей работе даётся описание очень симметричных свойств строения коммутаторов элементов группы G .

§ 2.

Предварительные замечания

В этом параграфе мы напомним о строении центрального ряда силовской p -подгруппы S_{n+1} симметрической группы $\mathcal{S}_{p^{n+1}}$ (p — простое число) по работе [3], и приведём без доказательства формулы для взаимных коммутаторов элементов группы S_{n+1} (по [4]).

Пусть S_{n+1} — сплетение $n+1$ циклических групп простого порядка p , и задан определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 (a_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)})^p &= e & (a^{(0)})^{-1} a_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)} a^{(0)} &= a_{i_1 + 1 i_2 \dots i_m}^{(m)}, & (m = 1, 2, \dots, n) \\
 (x_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n)})^p &= e & (a_{i_1}^{(1)})^{-1} a_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)} a_{i_1}^{(1)} &= a_{i_1 i_2 + 1 i_3 \dots i_m}^{(m)}, & (m = 2, 3, \dots, n) \\
 &\vdots & (a_{i_1 i_2}^{(2)})^{-1} a_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)} a_{i_1 i_2}^{(2)} &= a_{i_1 i_2 i_3 + 1 i_4 \dots i_m}^{(m)}, & (m = 3, \dots, n) \\
 (2.1) \quad (a_{i_1 i_2}^{(2)})^p &= e & &\vdots & \\
 (a_{i_1}^{(1)})^p &= e & (a_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)})^{-1} a_{i_2 \dots i_{n-1} i_n}^{(n)} a_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} &= a_{i_1 \dots i_{n-1} i_n + 1}^{(n)} \\
 (a^{(0)})^p &= e & (a_{\lambda_1 \dots \lambda_j}^{(j)})^{-1} a_{i_1 \dots i_j \dots i_m}^{(m)} a_{\lambda_1 \dots \lambda_j}^{(j)} &= a_{i_1 \dots i_j \dots i_m}^{(m)},
 \end{aligned}$$

* K. Buzási, (Debrecen)

если $\lambda_\mu \neq i_\mu$ для некоторого μ

$$(i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots, p); \quad (1 \leq \mu \leq j, j < m).$$

Введём обозначения

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x^{(m)} &= a^{(0)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{11\dots 1}^{(m-1)}; \quad x^{(n)} = x \\ y_1^{(m)} &= a_{11\dots 1}^{(m)}; \quad y_i^{(m)} = (x^{(m)})^{-1} y_{i-1}^{(m)} x^{(m)} \quad \begin{cases} m = 1, 2, \dots, n \\ i = 2, 3, \dots, p^m \end{cases} \\ \alpha_1^{(m)} &= y_1^{(m)}; \quad \alpha_i^{(m)} = (x^{(m)}, \alpha_{i-1}^{(m)}), \end{aligned}$$

где $(x^{(m)}, \alpha_{i-1}^{(m)})$ — коммутатор элементов $x^{(m)}$ и $\alpha_{i-1}^{(m)}$.

Очевидно, обозначения (2.2) имеют смысл, так как порядок элемента $x^{(m)}$ равен p^m .

Положим теперь

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A^{(m)} &= \{\alpha_{p^m}^{(m)}, \alpha_{p^m-1}^{(m)}, \dots, \alpha_1^{(m)}\} \\ A_i^{(m)} &= \{\alpha_{p^m}^{(m)}, \alpha_{p^m-1}^{(m)}, \dots, \alpha_i^{(m)}\} \end{aligned} \quad \begin{cases} m = 1, 2, \dots, n \\ 1 < i \leq p^m \end{cases}$$

Тогда, по работе [3], центральный ряд группы S_{n+1} имеет вид

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A_{p^n}^{(n)} \subset A_{p^n-1}^{(n)} \subset \dots \subset A_{p^{n-1}+1}^{(n)} \subset A_{p^{n-1}}^{(n)} \cdot A_{p^{n-1}}^{(n-1)} \subset A_{p^{n-1}-1}^{(n)} \cdot A_{p^{n-1}-1}^{(n-1)} \subset \dots \subset \\ \subset A_{p^{n-2}+1}^{(n)} \cdot A_{p^{n-2}+1}^{(n-1)} \subset A_{p^{n-2}}^{(n)} \cdot A_{p^{n-2}}^{(n-1)} \cdot A_{p^{n-2}}^{(n-2)} \subset \dots \subset A_{p^{n-3}+1}^{(n)} \cdot A_{p^{n-3}+1}^{(n-1)} \cdot A_{p^{n-3}+1}^{(n-2)} \subset \dots \subset \\ \subset A_2^{(n)} \cdot A_2^{(n-1)} \cdot \dots \cdot A_2^{(2)} \cdot A_2^{(1)} \subset S_{n+1} = G, \end{aligned}$$

где G представляется в виде полупрямого произведения

$$(2.5) \quad G = A^{(n)} \cdot A^{(n-1)} \cdot \dots \cdot A^{(1)} \cdot \{x\}.$$

Отсюда

$$(2.6) \quad S_{n+1} = A^{(n)} \cdot S_n,$$

где S_n — сплетение n циклических групп простого порядка p .

В обозначениях (2.2) имеют место двойственные соотношения:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \alpha_i^{(m)} &= \prod_{v=1}^i (y_v^{(m)})^{(-1)^{v-1} C_{i-v}^{v-1}} \\ y_i^{(m)} &= \prod_{v=1}^i (\alpha_v^{(m)})^{(-1)^{v-1} C_{i-v}^{v-1}} \end{aligned} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p^m \\ m = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

где C_k^l — коэффициенты бинома Ньютона. Формулы (2.7) приведены без доказательства. (Они доказаны в [4]).

§ 3.

Свойства коммутаторов элементов группы G^*

В этом параграфе устанавливается одно интересное свойство коммутаторов элементов группы G , что $(a^{(m)}, a^{(r)})$ в группе $A^{(r)}$ попадает в подгруппу группы $A^{(r)}$, однозначно определённую индексами m, r ($a^{(m)} \in A^{(m)}$; $a^{(r)} \in A^{(r)}$, $m \leq r$).

Рассмотрим отображение

$$(1) \quad x \rightarrow x^{-1} A^{(n)} x.$$

Так как группу $A^{(n)}$ в аддитивной записи можно рассматривать как линейное пространство над простым полем π характеристики p , то группа автоморфизмов этой группы изоморфна группе $GL(n, \pi)$, и следовательно, соответствие (1) определяет представление циклической группы $\{x\}$ над полем π . Матрица этого представления в базисе $\{\alpha_\mu^{(n)}\}$ имеет вид

$$(2) \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & 1 & -1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда ясно, что это представление группы $\{x\}$ эквивалентно регулярному представлению группы $\{x\}$, так как последнее в базисе $1, (1-x), (1-x)^2, \dots, (1-x)^{p^n-1}$ групповой алгебры $\{x\}\pi$ также записывается в виде (2).

Известно, что циклическая группа порядка p^n над полем характеристики p содержит точно один идеал размерности k ($1 \leq k \leq p^n$). Отсюда сразу вытекает, что для каждого натурального k существует точно один нормальный делитель группы $A^{(n)}$ порядка p^{k+1} .

Рассмотрим идеал $I^{(n-1)}$, порождённый коммутаторами

$$(a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(n)}) \quad (i_1, \dots, i_{n-1}, j_1, \dots, j_n = 1, 2, \dots, p)$$

Очевидно, коммутаторы, в которых $i_k \neq j_k$ для всех $k=1, 2, \dots, n-1$, равны единице группы, так как, по определяющим отношениям (2.1), выполняется

$$(a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n-1)})^{-1} a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(n)} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} = a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(n)},$$

если $i_k \neq j_k$ хотя бы для одного k из $k=1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, идеал $I^{(n-1)}$ порождается коммутаторами

$$(3.1) \quad (a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)}), \quad i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j_n = 1, 2, \dots, p-1.$$

При фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ среди коммутаторов вида (3.1) линейно независимых имеется точно p . Действительно, из (2.1) следует

$$\begin{aligned} \prod_{j_n=1}^p (a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)}) &= \prod_{j_n=1}^p (a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n-1)})^{-1} (a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)})^{-1} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)} = \\ &= \prod_{j_n=1}^p (a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)})^{-1} a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)} = e. \end{aligned}$$

* Заметим, что некоторые утверждения этого параграфа могут быть получены также из результатов работ [2], [3].

Однако, произведение любых степеней коммутаторов

$$(a_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)})^{\delta_{j_n}},$$

число которых меньше p , не может равняться единице группы, если не все δ_{j_n} равны нулю. Значит линейно независимых элементов вида (3. 1) в идеале $I^{(n-1)}$, при фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, точно $p-1$. Тогда всех линейно независимых элементов такого вида в идеале $I^{(n-1)}$ имеется точно $p^{n-1}(p-1)$.

Покажем, что идеал $I^{(n-1)}$ инвариантен относительно всех автоморфизмов, порождённых элементами группы $\{x\}$. Действительно

$$\begin{aligned} (a^{(0)})^{-1} (a_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)}) a^{(0)} &= (a_{i_1+1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1+1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)}) \in I^{(n-1)}, \\ (a_{k_1 \dots k_m}^{(m)})^{-1} (a_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)}) a_{k_1 \dots k_m}^{(m)} &= \\ &= \begin{cases} (a_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)}), & \text{если } k_\lambda \neq i_\lambda \text{ для некоторого } 1 < \lambda \leq m, \\ (a_{k_1 \dots k_m i_{m+1}+1 \dots i_{m+2} \dots i_{n-1}}^{(n-1)}, a_{k_1 \dots k_m i_{m+1}+1 \dots i_{n-1} j_n}^{(n)}) & \text{если } k_\lambda = i_\lambda \text{ для всех } 1 < \lambda \leq m, \end{cases} \end{aligned}$$

но в обоих случаях коммутаторы лежат в $I^{(n-1)}$ для всех $k_1, k_2, \dots, k_m = 1, 2, \dots, p$; $m = 1, 2, \dots, n-1$. Так как по определению (2. 2) $x = a^{(0)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{11 \dots 1}^{(n-1)}$, то $I^{(n-1)}$ инвариантен также относительно всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами из $\{x\}$.

Однако, из определения центрального ряда (2. 4) следует, что идеалом размерности $p^{n-1}(p-1)$, инвариантным относительно этих автоморфизмов, является идеал $A_{p^{n-1}+1}^{(n)}$. Этим доказана нами

Теорема 3. 1. $(a^{(n-1)}, a^{(n)}) \in A_{p^{n-1}+1}^{(n)}$ для всех $a^{(n-1)} \in A^{(n-1)}$, $a^{(n)} \in A^{(n)}$.

Рассмотрим теперь идеал $I^{(m)}$, порождённый коммутаторами

$$(3. 2) \quad (a_{i_1 \dots i_m}^{(m)} \cdot a_{i_1 \dots i_m j_{m+1}}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)})$$

где $i_1, \dots, i_m, j_{m+1}, \dots, j_{n-1}, j_{m+1}, \dots, j_n = 1, 2, \dots, p$; $0 \leq m \leq n-1$.

При фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_m$ среди коммутаторов (3. 2) линейно независимых имеется точно $p^{n-m}-1$. Действительно, методами доказательства теоремы 3. 1 можно показать, что при изменении индексов $j_{m+1}, \dots, j_n$ от 1 до p произведение всех p^{n-m} так полученных коммутаторов равно единице, но произведение произвольных ($\neq 0$) степеней любых $p^{n-m}-1$ из этих коммутаторов не может равняться единице.

При фиксированных $i_1, i_2, \dots, i_m$ элементы

$$a_{i_1 \dots i_m}^{(m)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1}}^{(m+1)}, \dots, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)},$$

($1 \leq j_{m+1}, j_{m+1}, \dots, j_{n-1}, j_{m+1}, \dots, j_n \leq p$) порождают сплетение $\bar{S}_{i_1 \dots i_m} n-m+1$ циклических групп порядка p . Очевидно, элементы $a_{i_1 \dots i_m j_{m+1}}^{(m+1)} \dots j_n^{(n)}$ порож-

дают элементарный абелев нормальный делитель $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$ порядка $p^{p^n - m}$ в $\bar{S}_{i_1 \dots i_m}$. Так как коммутаторы (3.2) лежат в $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$, то $p^{p^n - m} - 1$ линейно независимых из этих взаимных коммутаторов образуют базис подгруппы $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$. Ясно, что взаимные коммутаторы

$$(a_{i_1 \dots i_m}^{(m)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}, \dots, (a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)})$$

лежат в $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$, даже все

$$(a_{k_1 \dots k_m}^{(m)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}, \dots, (a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}),$$

независимо от индексов $k_1, \dots, k_m, \dots, l_1, \dots, l_m$, также принадлежат $\bar{A}_{i_1 \dots i_m}$, так как, если первые m индексов не совпадают соответственно с $i_1, \dots, i_m$, то такой коммутатор равен единице группы.

Но тогда также

$$(a_{k_1 \dots k_m}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}) \in \bar{A}_{i_1 \dots i_m}$$

при фиксированных $i_1, \dots, i_m$, независимо от других индексов. Значит мы получили, что при фиксированных $i_1, \dots, i_m$ среди коммутаторов

$$(3.3) \quad (a_{k_1 \dots k_m}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)})$$

линейно независимых имеется точно $p^{p^n - 1} - 1$.

При изменении индексов $i_1, \dots, i_m$ среди коммутаторов (3.2) линейно независимых имеется точно $p^m(p^{p^n - m} - 1)$. Но тогда также среди произвольных коммутаторов вида (3.3) линейно независимых также точно $p^m(p^{p^n - m} - 1)$.

Осталось показать, что идеал $I^{(m)}$ инвариантен относительно всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами циклической группы $\{x\}$.

Так как $x = a^{(0)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{11 \dots 1}^{(p^n - 1)}$, то достаточно проверить, что идеал $I^{(m)}$ инвариантен относительно всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами $a^{(0)}, a_1^{(1)} a_{11}^{(2)}, \dots, a_{11 \dots 1}^{(p^n - 1)}$.

Для коммутаторов, где индексы $i_1, \dots, i_r$ не все равны единице, мы имеем

$$\begin{aligned} (a_{11 \dots 1}^{(r)})^{-1} (a_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}) a_{11 \dots 1}^{(r)} = \\ = (a_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}) \in I^{(m)}. \end{aligned}$$

Если $i_1 = i_2 = \dots = i_r = 1$, то

$$\begin{aligned} (a_{11 \dots 1}^{(r)})^{-1} (a_{1 \dots 1 i_{r+1} \dots i_m}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{1 \dots 1 i_{r+1} \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{1 \dots 1 i_{r+1} \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}) a_{11 \dots 1}^{(r)} = \\ = (a_{1 \dots 1 i_{r+1} + 1 i_{r+2} \dots i_m}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{1 \dots 1 i_{r+1} + 1 i_{r+2} \dots i_m j_{m+1} \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{1 \dots 1 i_{r+1} + 1 i_{r+2} \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}^{(n)}) \in I^{(m)} \end{aligned}$$

для всех $r = 0, 1, \dots, m$. При этом мы пользовались только известным свойством коммутаторов

$$c^{-1}(a, b)c = (c^{-1}ac, c^{-1}bc)$$

и определениями (2.1).

Рассмотрим теперь действие внутренних автоморфизмов, порождённых элементами $a_{1\dots 1}^{(r)}$, где $m < r \leq n-1$. При $l > r$

$$(a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m\dots i_r\dots i_l}^{(l)} a_{1\dots 1}^{(r)} = \begin{cases} a_{i_1\dots i_2\dots i_l}^{(l)}, & \text{если не все } i_1, \dots, i_r \text{ равны } 1 \\ a_{1\dots 1 i_{k+1}+1 i_{k+2}\dots i_l}^{(l)}, & \text{если } i_1 = i_2 = \dots = i_r = 1. \end{cases}$$

Но

$$\begin{aligned} & (a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_r'' \dots j_n}^{(n)} a_{1\dots 1}^{(r)} = \\ & = \begin{cases} a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)}, & \text{если не все } i_1, \dots, i_m, j_{m+1}'', \dots, j_r'' \text{ равны } 1 \\ a_{1\dots 1 j_{r+1}''+1 j_{r+2}'' \dots j_n}^{(n)}, & \text{если } i_1 = i_2 = \dots = i_m = j_{m+1}'' = \dots = j_r'' = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

поэтому

$$(a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} (a_{i_1\dots i_m\dots i_r\dots i_l}^{(l)}, a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)}) a_{1\dots 1}^{(r)} \in I^{(m)}.$$

Для $l < r$

$$(a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m\dots i_l}^{(l)} a_{1\dots 1}^{(r)} = a_{i_1\dots i_m\dots i_l}^{(l)} \cdot (a_{i_1\dots i_m\dots i_l}^{(l)})^{-1} (a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m\dots i_l}^{(l)} \cdot a_{1\dots 1}^{(r)}.$$

Если не все $i_1, i_2, \dots, i_m, \dots, i_l$ равны 1, то полученное выражение равно $a_{i_1\dots i_m\dots i_l}^{(l)}$. Если же $i_1 = i_2 = \dots = i_l = 1$, то мы получим $a_{1\dots 1}^{(l)} (a_{1\dots 1}^{(r)} a_{1\dots 1}^{(l)})^{-1} a_{1\dots 1}^{(r)}$. В первом случае

$$(a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} (a_{i_1\dots i_m\dots i_l}^{(l)}, a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)}) a_{1\dots 1}^{(r)} \in I^{(m)}.$$

Во втором случае для всех множителей выполняется

$$(a_{1\dots 1}^{(r)}, (a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)} a_{1\dots 1}^{(r)}) \in I^{(m)},$$

$$(a_{1\dots 1}^{(r)} a_{1\dots 1}^{(l)} a_{1\dots 1}^{(r)}, (a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)} a_{1\dots 1}^{(r)}) \in I^{(m)},$$

$$(a_{1\dots 1}^{(l)}, (a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)} a_{1\dots 1}^{(r)}) \in I^{(m)},$$

поэтому также

$$(a_{1\dots 1}^{(l)} \cdot (a_{1\dots 1}^{(r)} a_{1\dots 1}^{(l)} a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{1\dots 1}^{(r)}, (a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)} a_{1\dots 1}^{(r)}) \in I^{(m)},$$

то есть

$$(a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} \cdot (a_{i_1\dots i_m\dots i_l}^{(l)}, a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)}) \cdot a_{1\dots 1}^{(r)} \in I^{(m)}.$$

Так как все эти коммутаторы лежат в $I^{(m)}$, то также

$$(a_{1\dots 1}^{(r)})^{-1} \cdot (a_{i_1\dots i_m}^{(m)} \cdot \dots \cdot a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_{n-1}}^{(n-1)}, a_{i_1\dots i_m j_{m+1}'' \dots j_n}^{(n)}) a_{1\dots 1}^{(r)} \in I^{(m)}$$

для всех $m < r \leq n-1$.

Мы получили, что действие внутренних автоморфизмов, порождённых элементами $a^{(0)}, a_1^{(1)}, a_{11}^{(2)}, \dots, a_{11\dots 1}^{(n-1)}$ не выводит коммутаторы вида (3.2) из идеала $I^{(m)}$. Значит $I^{(m)}$ инвариантен также относительно внутреннего автоморфизма, порожденного элементом x .

Однако идеалом размерности $p^m(p^{n-m}-1)$, инвариантным относительно этих же автоморфизмов, является идеал $A_{p^m+1}^{(n)}$. Отсюда получается $I^{(m)} = A_{p^m+1}^{(n)}$.

Этим самым нами доказаны следующие факты:

Теорема 3. 2. $(a^{(m)}, a^{(n)}) \in A_{p^m+1}^{(n)}$ для всех $a^{(m)} \in A^{(m)}$ и $a^{(n)} \in A^{(n)}$ при $m=0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 3. 3. $(a^{(k)}, a^{(n)}) \in A_{p^k+1}^{(n)}$ для всех $a^{(k)} \in A^{(k)}$, $m \leq k \leq n-1$, $m=0, 1, \dots, n-1$.

Действительно, $(a^{(k)}, a^{(n)}) \in A_{p^k+1}^{(n)} \subseteq A_{p^m+1}^{(n)}$ по строению центрального ряда (2. 4).

Очевидным следствием из этих теорем является

Теорема 3. 4. $(g_m, a^{(n)}) \in A_{p^m+1}^{(n)}$ для всех $g_m \in A^{(n-1)} \cdot A^{(n-2)} \cdot \dots \cdot A^{(m)}$, $m=0, 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим теперь подгруппу $G' = A^{(k)} \cdot A^{(k-1)} \cdot \dots \cdot A^{(1)} \cdot \{a^{(0)}\}$, где k — произвольный индекс, для которого $0 < k \leq n$. Она, очевидно, является сплетением $k+1$ циклических групп простого порядка p , порождённых элементами $a_{i_1 \dots i_k}^{(k)}, a_{j_1 \dots j_{k-1}}^{(k-1)}, \dots, a_j^{(1)}, \dots, a^{(0)}$. В подгруппе G' подгруппа $A^{(k)}$ является элементарным абелевым нормальным делителем порядка p^k .

Тогда элемент $x^{(k)}$ имеет порядок p^k и порождает автоморфизм группы $A^{(k)}$. Подобно рассмотренному раньше случаю, соответствие

$$(3. 4) \quad x^{(k)} \rightarrow (x^{(k)})^{-1} A^{(k)} x^{(k)}$$

является представлением циклической группы $\{x^{(k)}\}$ автоморфизмами группы $A^{(k)}$, порождёнными элементами группы $\{x^{(k)}\}$. В точности повторяя рассуждения, приводящие к предыдущим теоремам этого параграфа, можем установить следующие факты:

Теорема 3. 5. $(a^{(l)}, a^{(k)}) \in A_{p^l+1}^{(k)}$ для всех $a^{(l)} \in A^{(l)}$ и $a^{(k)} \in A^{(k)}$ при $0 < k \leq n$, $0 \leq l \leq k-1$.

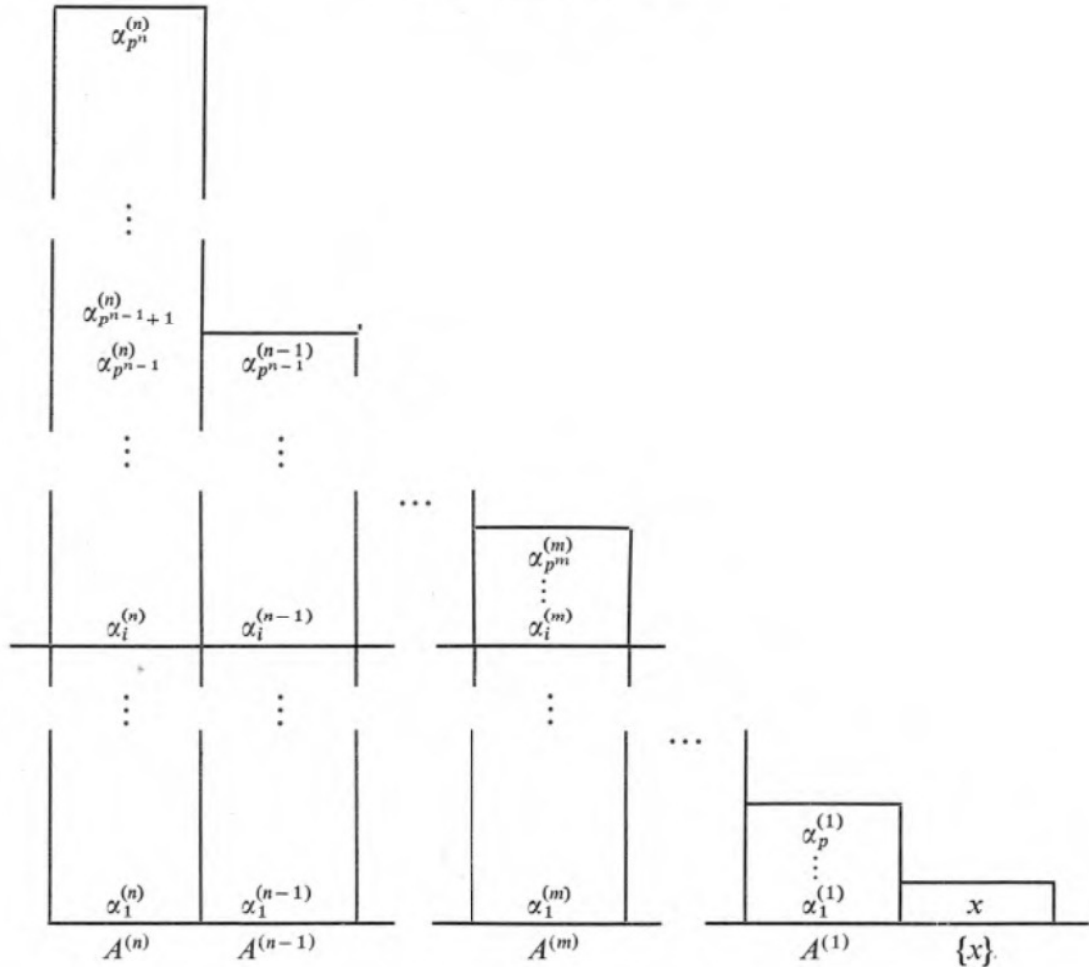
Теорема 3. 6. $(a^{(r)}, a^{(k)}) \in A_{p^l+1}^{(k)}$ для всех $a^{(r)} \in A^{(r)}$ и $a^{(k)} \in A^{(k)}$ при $l \leq r \leq k-1$, $0 < k \leq n$, $0 \leq l \leq k-1$.

Теорема 3. 7. $(g_l, a^{(k)}) \in A_{p^l+1}^{(k)}$ для всех $g_l \in A^{(k-1)} \cdot A^{(k-2)} \cdot \dots \cdot A^{(l)}$, $l=0, 1, \dots, k-1$.

В итоге получается следующая картина.

Рассмотрим диаграмму (предложенную в работе [3]), построенную следующим образом: Под столбцами диаграммы указаны подгруппы (по (2. 3)), которых они означают. В столбцы записаны образующие элементы, порождающие соответствующие подгруппы. Если на любой высоте диаграммы провести горизонтальную черту и записать полупрямое произведение подгрупп, определённых пересеченными столбцами и взятых с таким нижним индексом, которым обладает базисный элемент непосредственно над чертой, то мы получим характеристическую подгруппу нашей группы. (Например черта на нашей диаграмме определяет характеристическую подгруппу $A_i^{(n)} A_i^{(n-1)} \dots A_i^{(m)}$). С помощью этой диаграммы введём некоторые понятия.

Диаграмма группы G.



Определение 3.1. k -ой критической точкой называется черта, мысленно проведенная на диаграмме под элементами с нижним индексом p^{n-k} .

Определение 3.2. Будем говорить, что коммутатор $(a, b) \in A^{(m)}$ попадает за k -ую критическую точку, если $(a, b) \in A_{p^{n-k+1}}^{(m)}$, $m > n > k$.

С помощью этих понятий полученные в этом параграфе результаты можем сформулировать так:

Следствие 3.1. Коммутатор $(a^{(k)}, a^{(m)})$, $a^{(k)} \in A^{(k)}$, $a^{(m)} \in A^{(m)}$, $m > k$ попадает за $n-k$ -ую критическую точку в $A^{(m)}$. Более того, коммутатор $(g_k, a^{(m)})$ попадает за $m-k$ -ую критическую точку в $A^{(m)}$ для всех $a^{(m)} \in A^{(m)}$, если

$$g_k \in A^{(k)} \cdot \dots \cdot A^{(m-1)}.$$

§ 4.

Свойства коммутаторов базисных элементов группы G

В этом параграфе даётся более глубокий анализ свойств коммутаторов элементов группы G . Устанавливается, что взаимные коммутаторы двух базисных элементов группы G , записанных в приведённой в параграфе 3 диаграмме, попадают в чётко определённые, симметрично построенные области диаграммы.

В большинстве случаев будем опираться на соотношения (2. 7). Однако иногда будем пользоваться тем, уже отмеченным раньше, фактом, что отображение $x \rightarrow x^{-1}gx$ является представлением циклической группы $\{x\}$ автоморфизмами группы $A^{(n)}$, порождёнными элементами группы $\{x\}$, так как это обстоятельство позволяет перевести вычисления в групповую алгебру $A^{(n)}\pi$ группы $A^{(n)}$ над конечным полем π из p элементов.

Для произвольных $g \in A^{(n)}$ и $a \in G$ выполняется равенство

$$a^{-1}ga = g \cdot (a, g)^{-1}.$$

В аддитивной записи этот факт записуется в виде

$$ga = g - g(1 - a),$$

где оператор a действует по определению $ga = a^{-1}ga$. Значит коммутатор (a, g) в этой записи имеет вид $g(1 - a)$. Иногда будем пользоваться такой записью для коммутаторов элементов группы G .

В дальнейшем неоднократно будем применять следующую формулу

$$(4. 1) \quad \alpha_{i+1}^{(n)} = \alpha_1^{(n)}(1 - x)^i, \quad (i = 1, 2, \dots, p^n - 1).$$

Доказывать её будем индукцией по i . Формула верна для $i = 0$. Предположим, что имеет место

$$\alpha_i^{(n)} = \alpha_1^{(n)}(1 - x)^{i-1}.$$

Тогда из определения (2. 2) элементов $\alpha_j^{(n)}$ следует

$$\alpha_{i+1}^{(n)} = \alpha_i^{(n)}(1 - x) = [\alpha_1^{(n)}(1 - x)^{i-1}](1 - x) = \alpha_1^{(n)}(1 - x)^i.$$

Формула доказана. Отсюда следует также формула

$$(4. 2) \quad \alpha_i^{(n)}x = \alpha_i^{(n)} - \alpha_1^{(n)}(1 - x)^i, \quad (i = 1, 2, \dots, p^n - 1).$$

Рассмотрим сначала коммутаторы элементов подгруппы $A^{(n)}$ с элементами подгруппы $A^{(0)}$.

Теорема 4. 1.

$$(a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = \begin{cases} \alpha_{kp+r+1}^{(n)}, & \text{если } r \neq 0 \\ e, & \text{если } r = 0 \end{cases}$$

для всех $0 \leq k < p^{n-1}$, $0 \leq r < p$.

Доказательство. Из определений (2.1) и (2.2) следует

$$(4.1) \quad (a^{(0)})^{-1} y_{kp+r}^{(n)} a^{(0)} = \begin{cases} y_{kp+r+1}^{(n)} & \text{если } r \neq 0 \\ y_{(k-1)p+1}^{(n)} & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

Тогда, используя формулы (2.7), мы имеем

$$(a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = (a^{(0)})^{-1} \cdot \left[\prod_{v=1}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} \right] a^{(0)} \cdot \prod_{v=1}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}}.$$

Разбиваем произведение на „группы“ из p множителей, отделяя в каждой элемент с индексом, кратным p . Тогда получим

$$\begin{aligned} (a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) &= (a^{(0)})^{-1} \left[(y_p^{(n)})^{-C_{kp+r-1}^{p-1}} \cdot \prod_{v=1}^{p-1} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} \cdot (y_{2p}^{(n)})^{C_{kp+r-1}^{2p-1}} \right. \\ &\cdot \prod_{v=p+1}^{2p-1} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} \cdot \dots \cdot (y_{kp}^{(n)})^{(-1)^{kp} C_{kp+r-1}^{kp-1}} \cdot \prod_{v=(k-1)p+1}^{kp-1} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} \\ &\cdot \left. \prod_{v=kp+1}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} \right] a^{(0)} \cdot \prod_{v=1}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}}. \end{aligned}$$

Подвергаем теперь выражение в квадратной скобке внутреннему автоморфизму, порождённому элементом $a^{(0)}$:

$$\begin{aligned} (a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) &= (y_1^{(n)})^{-C_{kp+r-1}^{p-1}} \cdot \prod_{v=2}^p (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2}} \cdot (y_{p+1}^{(n)})^{C_{kp+r-1}^{2p-1}} \\ &\cdot \prod_{v=p+2}^{2p} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2}} \cdot \dots \cdot (y_{(k-1)p+1}^{(n)})^{(-1)^{kp} C_{kp+r-1}^{kp-1}} \\ &\cdot \prod_{v=(k-1)p+2}^{kp} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2}} \cdot \prod_{v=kp+2}^{kp+r+1} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2}} \\ &\cdot \prod_{v=1}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} = \prod_{i=0}^{k-1} (y_{ip+1}^{(n)})^{(-1)^{(i+1)p} C_{kp+r-1}^{(i+1)p-1}} \\ &\cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{v=ip+2}^{(i+1)p} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2}} \cdot \prod_{v=kp+2}^{kp+r+1} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2}} \cdot \prod_{v=1}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}}. \end{aligned}$$

Разложим теперь последний множитель выражения и группируем элементы с равными нижними индексами:

$$\begin{aligned} (4.2) \quad (a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) &= \prod_{i=0}^{k-1} (y_{ip+1}^{(n)})^{(-1)^{(i+1)p} C_{kp+r-1}^{(i+1)p-1} + (-1)^{ip} C_{kp+r-1}^{ip}} \\ &\cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{v=ip+2}^{(i+1)p} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2} + (-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} \cdot (y_{kp+1}^{(n)})^{(-1)^{kp} C_{kp+r-1}^{kp}} \\ &\cdot \prod_{v=kp+2}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-2} + (-1)^{v-1} C_{kp+r-1}^{v-1}} \cdot (y_{kp+r+1}^{(n)})^{(-1)^{kp+r-1} C_{kp+r-1}^{kp+r-1}}. \end{aligned}$$

Если $r \neq 0$, то $C_{kp+r-1}^{(i+1)p-1}$ делится на p для любого $i=0, 1, \dots, k-1$. Кроме того, очевидно,

$$C_{kp+r-1}^{ip} \equiv C_k \pmod{p},$$

$$C_{kp+r-1}^{v-2} + C_{kp+r-1}^{v-1} = C_{kp+r}^{v-1}.$$

Следовательно, в случае $r \neq 0$ мы получим:

$$(a^{(0)}, a_{kp+r}^{(n)}) = \prod_{i=0}^{k-1} (y_{ip+1}^{(n)})^{(-1)^{ip} C_k^i} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{v=ip+2}^{(i+1)p} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r}^{v-1}} \cdot$$

$$\cdot (y_{kp+1}^{(n)})^{(-1)^{kp} C_k^k} \cdot \prod_{v=kp+2}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r}^{v-1}} \cdot (y_{kp+r+1}^{(n)})^{(-1)^{kp+r} C_{kp+r}^{kp+r}}.$$

Учитывая теперь, $C_{kp+r}^{ip} \equiv C_k^i \pmod{p}$, имеем

$$(a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = \prod_{i=0}^{k-1} (y_{ip+1}^{(n)})^{(-1)^{ip} C_{kp+r}^{ip}} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{v=ip+2}^{(i+1)p} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r}^{v-1}} \cdot$$

$$\cdot (y_{kp+1}^{(n)})^{(-1)^{kp} C_{kp+r}^{kp}} \cdot \prod_{v=kp+2}^{kp+r} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r}^{v-1}} \cdot (y_{kp+r+1}^{(n)})^{(-1)^{kp+r} C_{kp+r}^{kp+r}} =$$

$$= \prod_{v=1}^{kp+r+1} (y_v^{(n)})^{(-1)^{v-1} C_{kp+r}^{v-1}} = \alpha_{kp+r+1}^{(n)}.$$

Если $r=0$, то $(a^{(0)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = e$. Действительно,

$$C_{kp-1}^{(i+1)p-1} \equiv C_{k-1}^i \pmod{p};$$

$$C_{kp-1}^{ip} \equiv C_{k-1}^i$$

значит

$$-(-1)^{(i+1)p-1} C_{k-1}^i + (-1)^{ip} C_{k-1}^i = (-1)^{(i+1)p} C_{k-1}^i + (-1)^{ip} C_{k-1}^i = 0.$$

Кроме того,

$$C_{kp-1}^{v-2} + C_{kp-1}^{v-1} = C_{kp}^{v-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

для всех $ip+2 \leq v \leq (i+1)p$, ($i=0, 1, \dots, k-1$). Остальные множители при $r=0$ в (4.2) отсутствуют.

Теорема доказана.

Введём несколько понятий.

Определение 4.1. Запишем последовательность $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \dots, \alpha_{p^m}^{(m)}$ базисных элементов группы $A^{(m)}$, расположенных на диаграмме предыдущего параграфа, в виде столбца с возрастающими снизу вверх индексами. Назовем $k+1$ -ым периодом j -ого порядка группы $A^{(m)}$ отрезок $\alpha_{kpj+1}^{(m)}, \alpha_{kpj+2}^{(m)}, \dots, \alpha_{(k+1)pj}^{(m)}$ длины p^j этой последовательности элементов ($1 \leq k \leq p^{m-j}$).

Определение 4.2. Для периода j -ого порядка $\alpha_{kpj+1}^{(m)}, \dots, \alpha_{(k+1)pj}^{(m)}$ группы $A^{(m)}$ период j -ого порядка $\alpha_{(k+1)pj+1}^{(m)}, \dots, \alpha_{(k+2)pj}^{(m)}$ называется следующим.

Определение 4.3. Элемент $\alpha_{kpj+1}^{(m)}$ называется главной буквой $k+1$ -ого периода j -ого порядка $\alpha_{kpj+1}^{(m)}, \dots, \alpha_{(k+1)pj}^{(m)}$ группы $A^{(m)}$. Об элементах

$\alpha_{kpj+2}^{(m)}, \dots, \alpha_{pm}^{(m)}$ будем говорить, что они находятся выше элемента $\alpha_{kpj+1}^{(m)}$. Элемент $\alpha_1^{(m)}$ называется главной буквой группы $A^{(m)}$. Элемент $\alpha_{kpj+r}^{(m)}$ назовём r -ым элементом $k+1$ -ого периода j -ого порядка группы $A^{(m)}$.

Определение 4.4. Если $(a, b) = c$, то мы будем говорить, что элемент a переводит элемент b в элемент c .

В терминах этих определений нами установлен следующий факт:

Следствие 4.1. Элемент $a^{(0)}$ группы $A^{(0)} = \{a^{(0)}\}$ переводит главные буквы периода 0-ого порядка группы $A^{(n)}$ в главные буквы следующего периода 0-ого порядка группы $A^{(n)}$, за исключением последнего элемента периода 1-ого порядка, которого он переводит в единицу группы.

Рассмотрим теперь коммутаторы элементов группы $A^{(1)}$ с элементами группы $A^{(n)}$.

Теорема 4.2. $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(n)}) = \alpha_{p+1}^{(n)}$

Доказательство. Так как

$$x^p = (a^{(0)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{11\dots 1}^{(n-1)})^p = a_{p-1}^{(1)} \cdot a_{p-11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{p-11\dots 1}^{(n-1)} \cdot a_{p-2}^{(1)} \cdot a_{p-21}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{p-21\dots 1}^{(n-1)} \cdot \dots \cdot a_2^{(1)} \cdot a_{21}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{21\dots 1}^{(n-1)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{11\dots 1}^{(n-1)},$$

то, используя формулу (4.1), получим

$$\alpha_{p+1}^{(n)} = \alpha_1^{(n)} (1-x)^p = \alpha_1^{(n)} (1-x^p) = \alpha_1^{(n)} (1 - a_1^{(1)} a_{11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{11\dots 1}^{(n-1)}) = \alpha_1^{(n)} (1 - a_1^{(1)}).$$

Действительно, операторы $a_{p-1}^{(1)}, a_{p-11}^{(2)}, \dots, a_{p-11\dots 1}^{(n-1)}, a_{p-2}^{(1)}, a_{p-21}^{(2)}, \dots, a_{p-21\dots 1}^{(n-1)}, \dots, a_2^{(1)}, a_{21}^{(2)}, \dots, a_{21\dots 1}^{(n-1)}$ оставляют на месте элемент $\alpha_1^{(n)}$, а элемент $\alpha_1^{(n)} a_1^{(1)}$ уже инвариантен относительно операторов $a_{11}^{(2)}, \dots, a_{11\dots 1}^{(n-1)}$. Теорема доказана.

Подобно (4.1) легко доказать формулу

$$(4.3) \quad \alpha_{i+1}^{(m)} = \alpha_1^{(m)} (1-x^{(m)})^i, \quad (i = 1, 2, \dots, p^m - 1; 1 \leq m \leq n).$$

Теорема 4.3.

$$(\alpha_1^{(1)}, \alpha_{kp^2+l}^{(n)}) = \begin{cases} \alpha_{kp^2+(l+1)p+1}^{(n)}, & \text{если } 0 \leq l < p-1 \\ e, & \text{если } l = p-1 \end{cases}$$

для всех $0 \leq k < p^{n-2}$.

Доказательство. Очевидно, теорему можно сформулировать в виде:

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = \begin{cases} \alpha_{(k+1)p+1}^{(n)}, & \text{если } k \neq rp-1 \\ e, & \text{если } k = rp-1 \end{cases}$$

для всех $0 \leq k < p^{n-1}$, $r = 1, 2, \dots, p^{n-2}$, так как $a_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)}$. Доказывать теорему будем в таком виде. Из определений (2.1) и (2.2) следует

$$(a_1^{(1)})^{-1} y_{\mu p+1}^{(n)} a_1^{(1)} = \begin{cases} y_{(\mu+1)p+1}^{(n)}, & \text{если } \mu \neq rp-1 \\ y_{(\mu-p+1)p+1}^{(n)}, & \text{если } \mu = rp-1. \end{cases}$$

Пусть сначала $k = rp - 1$. В этом случае, используя соотношения (2.7), имеем

$$\begin{aligned}(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) &= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{v=1}^{kp+1} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{kp}^{v-1}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} = \\&= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{v=0}^k [y_{vp+1}^{(n)}]^{-(-1)^{v-1} C_{kp}^{v-1}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} = \\&= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{kp}^{(\lambda p + \mu)p}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)},\end{aligned}$$

так как $C_{kp}^{hp+\eta} \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $1 \leq \eta < p$.

Однако непосредственным подсчётом можно показать, что

$$C_{(rp-1)p}^{(\lambda p + \mu)p} \equiv C_{rp-1}^{\lambda p + \mu} \equiv (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda \pmod{p}.$$

Следовательно

$$(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{(rp-1)p}^{(\lambda p + \mu)p} \equiv (-1)^{(\lambda p + \mu)p} \cdot (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda = (-1)^{\lambda p} C_{r-1}^\lambda \pmod{p},$$

значит можно записать

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = (a_1^{(1)})^{-1} \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{\lambda p} C_{r-1}^\lambda} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)}.$$

Кроме того,

$$(a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)} \cdot a_1^{(1)} = \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)},$$

так как множители произведения под действием записанного внутреннего автоморфизма только перемещаются в циклическом порядке.

Отсюда уже следует, что

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = e, \quad \text{если } k = rp - 1.$$

Пусть теперь $k \neq rp - 1$ и пусть $k = rp + r_1$, где $0 \leq r \leq p - 1$.

Тогда

$$\begin{aligned}(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) &= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \prod_{v=0}^{kp+1} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{kp}^{v-1}} \cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} = \\&= (a_1^{(1)})^{-1} \cdot \left\{ \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-2} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{kp}^{(\lambda p + \mu)p}} \cdot \right. \\&\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{(\lambda p + p-1)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + p-1)p} C_{kp}^{(\lambda p + p-1)p}} \cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p} C_{kp}^{(rp + \mu)p}} \left. \right\} \cdot \\&\cdot a_1^{(1)} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} = \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-2} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{kp}^{(\lambda p + \mu)p}} \cdot \\&\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{(\lambda p + p-1)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + p-1)p} C_{kp}^{(\lambda p + p-1)p}} \cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p} C_{kp}^{(rp + \mu)p}} \cdot \alpha_{kp+1}^{(n)} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{kp}^{(\lambda p + \mu - 1)p}} \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{\lambda p^2+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p + p)p} C_{kp}^{(\lambda p + p - 1)p}} \cdot \\
&\cdot \prod_{\mu=1}^{r_1+1} [y_{(rp + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp + \mu)p} C_{kp}^{(rp + \mu - 1)p}} \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{kp}^{(\lambda p + \mu)p}} \cdot \\
&\cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp + \mu)p} C_{kp}^{(rp + \mu)p}} = \\
&= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p + \mu)p} [C_{kp}^{(\lambda p + \mu - 1)p} + C_{kp}^{(\lambda p + \mu)p}]} \cdot \\
&\cdot \prod_{\lambda=0}^r [y_{\lambda p^2+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p^2} [C_{kp}^{2\lambda p^2} - C_{kp}^{(\lambda p + p - 1)p}]} \cdot \prod_{\mu=1}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp + \mu)p} [C_{kp}^{(rp + \mu - 1)p} + C_{kp}^{(rp + \mu)p}]} \cdot \\
&\cdot [y_{(rp + r_1 + 1)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp + r_1 + 1)p} C_{kp}^{(rp + r_1)p}}.
\end{aligned}$$

Однако, как уже отмечалось,

$$C_{kp}^{hp} \equiv C_k^h \pmod{p}, \quad C_{kp}^{\lambda p^2} \equiv C_{rp}^{\lambda} \pmod{p}, \quad C_{kp}^{(\lambda p + p - 1)p} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Кроме того, по известным свойствам биномиальных коэффициентов

$$C_k^{\lambda p + \mu - 1} + C_k^{\lambda p + \mu} = C_{k+1}^{\lambda p + \mu}, \quad C_k^{rp + \mu - 1} + C_k^{rp + \mu} = C_{k+1}^{rp + \mu}.$$

Следовательно, при $k \neq rp - 1$ мы имеем

$$\begin{aligned}
(a_1^{(1)}, a_{kp+1}^{(n)}) &= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{(k+1)p}^{(\lambda p + \mu)p}} \cdot \\
&\cdot \prod_{\lambda=0}^r [y_{\lambda p^2+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p^2} C_{(k+1)p}^{2\lambda p^2}} \cdot \prod_{\mu=1}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp + \mu)p} C_{(k+1)p}^{(rp + \mu)p}} \cdot \\
&\cdot [y_{(rp + r_1 + 1)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp + r_1 + 1)p} C_{(k+1)p}^{(rp + r_1 + 1)p}} = \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(\lambda p + \mu)p} C_{(k+1)p}^{(\lambda p + \mu)p}} \cdot \\
&\cdot \prod_{\mu=0}^{r_1+1} [y_{(rp + \mu)p+1}^{(n)}]^{(-1)^{(rp + \mu)p} C_{(k+1)p}^{(rp + \mu)p}} = \alpha_{(k+1)p+1}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4.3 легко получить следующую формулу

$$(4.4) \quad \alpha_{vp^2 + \mu p + 1}^{(n)} = \alpha_{vp^2 + 1}^{(n)} (1 - a_1^{(1)})^\mu$$

для всех $0 \leq v < p^{n-2}$; $0 \leq \mu < p$.

Действительно, формула верна для любого фиксированного v и $\mu = 1$ (по теореме 4.3). Предположим, что она верна для того же v и всех $r < \mu$, то есть

$$\alpha_{vp^2 + rp + 1}^{(n)} = \alpha_{vp^2 + 1}^{(n)} (1 - a_1^{(1)})^r.$$

Тогда, на основании теоремы 4.3,

$$\alpha_{vp^2+(r+1)p+1}^{(n)} = \alpha_{vp^2+rp+1}^{(n)} (1 - a_1^{(1)}).$$

Отсюда, пользуясь предположением индукции, получим

$$\alpha_{vp^2+(r+1)p+1}^{(n)} = [\alpha_{vp^2+1}^{(n)} (1 - a_1^{(1)})^r] \cdot (1 - a_1^{(1)}) = \alpha_{vp^2+1}^{(n)} (1 - a_1^{(1)})^{r+1}.$$

Лемма 4.1. $(a_i^{(1)}, \alpha_{kp+1}^{(n)}) = e$ ($1 < i \leq p$, $0 \leq k < p^{n-1}$).

Лемма очевидна, так как

$$\alpha_{kp+1}^{(n)} = \prod_{\lambda=0}^k [y_{\lambda p+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p} C_{kp}^{\lambda p}},$$

но оператор $a_i^{(1)}$ при $i > 1$ оставляет на месте все элементы вида $y_{\lambda p+1}^{(n)}$.

Лемма 4.2.

$$(a_1^{(1)}, \alpha_{kp+r}^{(n)}) = \begin{cases} e & \text{если } k = mp - 1 \\ \alpha_{(k+1)p+1}^{(n)}, & \text{если } k \neq mp - 1 \end{cases}$$

для всех $0 \leq k < p^{n-1}$, $1 < r < p$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \alpha_{kp+r}^{(n)} (1 - a_1^{(1)}) &= \alpha_{kp+1}^{(n)} (1 - x)^{r-1} \cdot (1 - a_1^{(1)}) = \\ &= \alpha_{kp+1}^{(n)} (1 + a_1^{(1)}) + \alpha_{kp+1}^{(n)} \cdot \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j C_{r-1}^j x^j (1 - a_1^{(1)}). \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned} x^j a_1^{(1)} &= a_{p-(j-1)}^{(1)} \cdot x^j \cdot (a_{1\dots 1}^{(n-1)})^{-1} \cdot \dots \cdot (a_{11}^{(2)})^{-1} \cdot a_{12}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{121\dots 1}^{(n-1)} = \\ &= a_{p-(j-1)}^{(1)} \cdot a_{p-(j-1)1}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{p-(j-1)1\dots 1}^{(n-1)} \cdot (a_{p-(j-1)p\dots p}^{(n-1)})^{-1} \cdot x^j \cdot \\ &\cdot (a_{1\dots 1}^{(n-1)})^{-1} \dots (a_{11}^{(2)})^{-1} = \dots = a_{p-(j-1)}^{(1)} \cdot a_{p-(j-1)1}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{p-(j-1)1\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\cdot (a_{p-(j-1)p\dots p}^{(n-1)})^{-1} \cdot \dots \cdot (a_{p-(j-1)p}^{(2)})^{-1} \cdot x^j = a_v x^j, \end{aligned}$$

где элемент a_v является произведением элементов, первый нижний индекс которых равен $p - (j - 1)$, так как $j \leq r - 1 < p$. Поэтому оператор a_v оставляет на месте элемент

$$\alpha_{kp+1}^{(n)} = \prod_{\lambda=0}^k [y_{\lambda p+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p} C_{kp}^{\lambda p}}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{kp+1}^{(n)} \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j C_{r-1}^j x^j (1 - a_1^{(1)}) = \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j C_{r-1}^j \alpha_{kp+1}^{(n)} (1 - a_v) x^j = e.$$

Поэтому

$$\alpha_{kp+r}^{(n)} (1 - a_1^{(1)}) = \alpha_{kp+1}^{(n)} (1 - a_1^{(1)}) = \begin{cases} e, & \text{если } k = mp - 1 \\ \alpha_{(k+1)p+1}^{(n)}, & \text{если } k \neq mp - 1 \end{cases}$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3. $(a_i^{(1)}, \alpha_{k_p+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p+1}^{(n)}$, $(1 < i \leq p, 0 \leq k < p^{n-1}, 1 < r < p)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \alpha_{k_p+r}^{(n)}(1 - a_i^{(1)}) &= \alpha_{k_p+1}^{(n)}(1 - x)^{r-1}(1 - a_i^{(1)}) = \\ &= \alpha_{k_p+1}^{(n)}(1 - a_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j C_{r-1}^j \alpha_{k_p+1}^{(n)} x^j (1 - a_i^{(1)}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно единице (Лемма 4.1). Для второго слагаемого

$$x^j(1 - a_i^{(1)}) = (1 - a_{i-j}^{(1)} a') x^j.$$

Очевидно, для каждого фиксированного индекса i найдётся точно один номер j , при котором $i - j \equiv 1 \pmod{p}$. Остальные члены суммы обращаются в единицу. Действительно, для членов с индексом $j < i - 1$ выполняется $x^j a_i^{(1)} = a_{i-j}^{(1)} x^j$. Для $j = i - 1$ имеем $x^j a_i^{(1)} = a_1^{(1)} x^j$, то есть для $j = i - 1$ элемент $a' = e$. Если же $i \leq j$, то $x^j a_i^{(1)} = a_{p-(j-i)}^{(1)} a'$, где элемент a' является произведением элементов, первый индекс которых равен $p - (j - i - 1)$, а операторы с такими нижними индексами оставляют на месте элемент $\alpha_{k_p+1}^{(n)}$. Поэтому, (по (4.2))

$$\alpha_{k_p+r}^{(n)}(1 - a_i^{(1)}) = C_{r-1}^{i-1} (-1)^{i-1} \cdot \alpha_{k_p+1}^{(n)} (1 - a_1^{(1)}) x^{i-1} \in A_{(k+1)p+1}^{(n)}.$$

Лемма доказана.

Из лемм 4.2 и 4.3 сразу вытекает

Следствие 4.2. $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{k_p+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p+1}^{(n)}$, $(1 < i \leq p, 0 \leq k < p^{n-1}, 1 \leq r < p)$.

Действительно, из соотношений (2.7) и определений (2.1), (2.2) следует, что элемент $\alpha_i^{(1)}$ является произведением некоторых степеней элементов $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_i^{(1)}$. Так как коммутаторы этих элементов с элементом $\alpha_{k_p+r}^{(n)}$ лежит в подгруппе $A_{(k+1)p+1}^{(n)}$ (по леммам 4.2 и 4.3), значит и следствие 4.1 верно.

Следствие 4.3. Главная буква группы $A^{(1)}$ переводит любой элемент периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$ в главную букву следующего периода 1-го порядка, за исключением элементов последнего периода 1-го порядка в периодах 2-го порядка, которых он переводит в единицу.

Элементы, находящиеся выше главной буквы группы $A^{(1)}$, переводят все элементы периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$ в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже главной буквы следующего периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$.

Теорема 4.4. $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{k_p}^{(n)}) \in A_{k_p+2}^{(n)}$, $(1 < i \leq p, 0 < k < p^{n-1})$.

Доказательство. Для любого $1 < i \leq p$ имеем

$$\begin{aligned} (\alpha_i^{(1)}, \alpha_{k_p}^{(n)}) &= ((a^{(0)}, \alpha_{i-1}^{(1)}), \alpha_{k_p}^{(n)}) = ((a^{(0)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1} \cdot a^{(0)} \cdot \alpha_{i-1}^{(1)}, \alpha_{k_p}^{(n)}) = \\ &= ((a^{(0)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}, \alpha_{k_p}^{(n)}) \cdot (a^{(0)} \cdot \alpha_{i-1}^{(1)}, \alpha_{k_p}^{(n)}) \cdot (((a^{(0)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}, \alpha_{k_p}^{(n)}), a^{(0)} \cdot \alpha_{i-1}^{(1)}), \end{aligned}$$

где последний множитель уже принадлежит группе $A_{k_p+2}^{(n)}$.

Рассмотрим остальные множители:

$$((a^{(0)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}) = ((a^{(0)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}) \cdot ((\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}) \cdot (((a^{(0)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}), (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}),$$

где последний множитель лежит в $A_{kp+2}^{(n)}$. Так как $(a^{(0)}, \alpha_{kp}^{(n)}) = e$ (по теореме 4. 1), то также $((a^{(0)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}) = e$. Однако

$$\begin{aligned} ((\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}, \alpha_{kp}^{(n)}) &= \alpha_{i-1}^{(1)} \cdot (\alpha_{kp}^{(n)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1} \cdot \alpha_{kp}^{(n)} = \alpha_{i-1}^{(1)} (\alpha_{kp}^{(n)}, \alpha_{i-1}^{(1)}) \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1} = \\ &= (\alpha_{kp}^{(n)}, \alpha_{i-1}^{(1)}) \cdot ((\alpha_{kp}^{(n)}, \alpha_{i-1}^{(1)}), (\alpha_{i-1}^{(1)})^{-1}), \end{aligned}$$

где последний множитель лежит в $A_{kp+2}^{(n)}$. Для второго множителя имеем

$$(a^{(0)} \cdot \alpha_{i-1}^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) = (a^{(0)}, \alpha_{kp}^{(n)}) \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) \cdot ((a^{(0)}, \alpha_{kp}^{(n)}), \alpha_{i-1}^{(1)}),$$

где

$$(a^{(0)}, \alpha_{kp}^{(n)}) = e, \quad ((a^{(0)}, \alpha_{kp}^{(n)}), \alpha_{i-1}^{(1)}) \in A_{kp+2}^{(n)}.$$

Следовательно

$$(\alpha_{i-1}^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) = a_{kp+2}^{(n)} (\alpha_{kp}^{(n)}, \alpha_{i-1}^{(1)}) \cdot (\alpha_{i-1}^{(1)}, \alpha_{kp}^{(n)}) = a_{kp+2}^{(n)}$$

где $a_{kp+2}^{(n)} \in A_{kp+2}^{(n)}$. Теорема доканаза.

Следствие 4. 4. Элементы, находящиеся выше главной буквы группы $A^{(1)}$, переводят последний элемент любого периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$ в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже второго элемента следующего периода 1-го порядка группы $A^{(n)}$.

Рассмотрим теперь коммутаторы базисных элементов группы $A^{(m)}$ для произвольного $m < n$ с элементами группы $A^{(n)}$.

Теорема 4. 5. $(\alpha_1^{(m)}, \alpha_1^{(n)}) = \alpha_{p^m+1}^{(n)}$ для всех $1 \leq m < n$.

Доказательство. Как известно (формула (4. 1)),

$$\alpha_{p^m+1}^{(n)} = \alpha_1^{(n)} (1-x)^{p^m} = \alpha_1^{(n)} (1-x^{p^m}).$$

Но

$$\begin{aligned} x^{p^m} &= a_{pp\dots p}^{(m)} \cdot a_{pp\dots p1}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{pp\dots p1\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \cdot a_{p-1p\dots p}^{(m)} \cdot a_{p-1p\dots p1}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{p-1p\dots p1\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cdot a_{1p\dots p}^{(m)} \cdot a_{1p\dots p1}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{1p\dots p1\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \cdot a_{pp-1p\dots p}^{(m)} \cdot a_{pp-1p\dots p1}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{pp-1p\dots p1\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cdot a_{1p-1p\dots p}^{(m)} \cdot a_{1p-1p\dots p1}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{1p-1p\dots p1\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cdot a_{p1\dots 1}^{(m)} \cdot a_{p1\dots 11}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{p1\dots 11\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \cdot a_{p-11\dots 1}^{(m)} \cdot a_{p-11\dots 11}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{p-11\dots 11\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cdot a_{21\dots 1}^{(m)} \cdot a_{21\dots 11}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{21\dots 11\dots 1}^{(n-1)} \cdot \\ &\quad \cdot a_{11\dots 1}^{(m)} \cdot a_{11\dots 11}^{(m+1)} \cdot \dots \cdot a_{11\dots 11\dots 1}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

В этом произведении только операторы $a_{1\dots 1}^{(m)}, \dots, a_{1\dots 1}^{(n-1)}$ двигают элемент $\alpha_1^{(n)}$, а все операторы $a_{1\dots 1}^{(m+1)}, \dots, a_{1\dots 1}^{(n-1)}$ уже оставляют на месте элемент $\alpha_1^{(n)} a_{1\dots 1}^{(m)}$. Следовательно, $\alpha_{p^m+1}^{(n)} = \alpha_1^{(n)} (1 - a_{1\dots 1}^{(m)})$, что и требовалось доказать.

Теорема 4.6.

$$(\alpha_1^{(m)}, \alpha_{k p^m+1}^{(n)}) = \begin{cases} e, & \text{если } k = rp - 1 \\ \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если } k \neq rp - 1, \end{cases}$$

$$(0 \leq k < p^{n-m}, \quad 0 < m < n).$$

Доказательство. Из определений (2.1) и (2.2) следует,

$$(a_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \cdot y_{\mu p^m+1}^{(n)} \cdot a_{1\dots 1}^{(m)} = \begin{cases} y_{(\mu+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если } \mu \neq rp - 1 \\ y_{(\mu-p+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если } \mu = rp - 1. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь соотношениями (2.7), мы имеем

$$\begin{aligned} (a_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{k p^m+1}^{(n)}) &= (a_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{v=1}^{k p^m+1} (y_v^{(n)})^{-(-1)^{v-1} C_{k p^m}^{v-1}} \right\} \cdot a_{1\dots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{k p^m+1}^{(n)} = \\ &= (a_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \cdot \left\{ \prod_{v=0}^k (y_{v p^m+1}^{(n)})^{-(-1)^v C_{k p^m}^{v p^m}} \right\} \cdot a_{1\dots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{k p^m+1}^{(n)}. \end{aligned}$$

Пусть $k = rp - 1$. Тогда

$$(a_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{k p^m+1}^{(n)}) = (a_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m} C_{k p^m}^{(\lambda p + \mu)p^m}} \right\} \cdot a_{1\dots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{k p^m+1}^{(n)}.$$

Заметим, что

$$(a_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)} \right\} \cdot a_{1\dots 1}^{(m)} = \prod_{\mu=0}^{p-1} y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)},$$

так как под действием внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $a_{1\dots 1}^{(m)}$, множители произведения только перемещаются в циклическом порядке. Осталось заметить, что

$$C_{k p^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} \equiv (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda \pmod{p},$$

значит

$$(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m} C_{k p^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} \equiv (-1)^{\lambda p + \mu} \cdot (-1)^\mu C_{r-1}^\lambda = (-1)^{\lambda p} C_{r-1}^\lambda \pmod{p},$$

то есть в произведении

$$\prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m} C_{k p^m}^{(\lambda p + \mu)p^m}}$$

все множители имеют равные показатели степени. Мы получим, что $(a_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \alpha_{k p^m+1}^{(n)} a_{1\dots 1}^{(m)} = \alpha_{k p^m+1}^{(n)}$, если $k = rp - 1$, то есть $(a_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{k p^m+1}^{(n)}) = e$.

Пусть теперь $k = rp + r_1$, где $0 \leq r_1 < p - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} (a_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) &= (a_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-2} [y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{(\lambda p + p-1)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + p-1)p^m}} C_{kp^m}^{(\lambda p + p-1)p^m} \cdot \\ &\quad \cdot \left. \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(rp + \mu)p^m} \right\} \cdot a_{1\dots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{kp^m+1}^{(n)}. \end{aligned}$$

Учитывая (4.3), получим

$$\begin{aligned} (a_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) &= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-2} [y_{(\lambda p + \mu + 1)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} \cdot \\ &\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + p-1)p^m}} C_{kp^m}^{(\lambda p + p-1)p^m} \cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp + \mu + 1)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(rp + \mu)p^m} \cdot \\ &\cdot \alpha_{kp^m+1}^{(n)} = \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu - 1)p^m} \cdot \\ &\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + p)p^m}} C_{kp^m}^{(\lambda p + p-1)p^m} \cdot \prod_{\mu=1}^{r_1+1} [y_{(rp + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(rp + \mu - 1)p^m} \cdot \\ &\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=0}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} \cdot \prod_{\mu=0}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p^m}} C_{kp^m}^{(rp + \mu)p^m}. \end{aligned}$$

Произведём умножение элементов с одинаковыми индексами:

$$\begin{aligned} (a_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) &= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m}} [C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu - 1)p^m} + C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu)p^m}] \cdot \\ &\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + p)p^m}} [C_{kp^m}^{(\lambda p + p-1)p^m} - C_{kp^m}^{\lambda p^m+1}] \cdot [y_{rp^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{rp^m+1}} C_{kp^m}^{rp^m+1} \cdot \\ &\cdot \prod_{\mu=1}^{r_1} [y_{(rp + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p^m}} [C_{kp^m}^{(rp + \mu)p^m} + C_{kp^m}^{(rp + \mu - 1)p^m}] \cdot [y_{(rp + r_1 + 1)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + r_1 + 1)p^m}}. \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned} C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu - 1)p^m} + C_{kp^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} &\equiv C_{(k+1)p^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} \pmod{p}, \\ C_{kp^m}^{(\lambda p + p-1)p^m} &\equiv 0 \pmod{p}, \quad C_{kp^m}^{\lambda p^m+1} \equiv C_{(k+1)p^m}^{\lambda p^m+1} \pmod{p}, \\ C_{kp^m}^{(rp + \mu)p^m} + C_{kp^m}^{(rp + \mu - 1)p^m} &\equiv C_{(k+1)p^m}^{(rp + \mu)p^m} \pmod{p}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} (a_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) &= \prod_{\lambda=0}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{p-1} [y_{(\lambda p + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(\lambda p + \mu)p^m}} C_{(k+1)p^m}^{(\lambda p + \mu)p^m} \cdot \\ &\cdot \prod_{\lambda=0}^{r-1} [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{\lambda p^m+1}} C_{(k+1)p^m}^{\lambda p^m+1} \cdot \prod_{\mu=0}^{r_1+1} [y_{(rp + \mu)p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{(rp + \mu)p^m}} C_{(k+1)p^m}^{(rp + \mu)p^m} = \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(n)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 4.5. Главная буква группы $A^{(m)}$ переводит главную букву любого периода m -го порядка в главную букву следующего периода m -го порядка группы $A^{(n)}$, за исключением главной буквы последнего периода m -го порядка в периоде $m+1$ -го порядка, которую она переводит в единицу.

Лемма 4.4 $(a_{1\dots 1}^{(i)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) = e$ для всех $0 \leq i < m$, $0 < m < n$, $1 \leq k \leq p^{n-m}$.

Действительно, для произвольного фиксированного i

$$(a_{1\dots 1}^{(i)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) = (a_{1\dots 1}^{(i)})^{-1} \left\{ \prod_{\mu=0}^{k-1} \prod_{v=1}^{p^m} [y_{\mu p^m+v}^{(n)}]^{(-1)^{\mu p^m+v-1}} C_{kp^m-1}^{\mu p^m+v-1} \right\} \cdot a_{1\dots 1}^{(i)} \cdot \alpha_{kp^m}^{(n)}.$$

Однако для фиксированного μ выполняется

$$(-1)^{\mu p^m+v-1} C_{kp^m-1}^{\mu p^m+v-1} \equiv (-1)^{\mu p^m+v-1} \cdot (-1)^{v-1} C_{k-1}^{\mu} = (-1)^{\mu} C_{k-1}^{\mu} \pmod{p},$$

то есть показатели степеней элементов произведения

$$\prod_{v=1}^{p^m} [y_{\mu p^m+v}^{(n)}]^{(-1)^{\mu p^m+v-1}} C_{kp^m-1}^{\mu p^m+v-1}$$

равны. Кроме того это произведение инвариантно относительно внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $a_{1\dots 1}^{(i)}$, так как произведение можно разбить на такие группы из p^i элементов, элементы которых под действием упомянутого внутреннего автоморфизма переставляются в циклическом порядке. Лемма доказана.

Следствие 4.6. $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \in A_{kp^m+2}^{(n)}$ для всех $1 < i \leq p^m$, $1 \leq m < p^{n-m}$.

Доказательство следует из леммы 4.4. Действительно,

$$\begin{aligned} (\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) &= ((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(m)})^{-1} \cdot x^{(m)} \cdot \alpha_{i-1}^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) = ((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(m)})^{-1}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \cdot \\ &\cdot (x^{(m)} \cdot \alpha_{i-1}^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \cdot (((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(m)})^{-1}, \alpha_{kp^m}^{(n)}), x^{(m)} \cdot \alpha_{i-1}^{(m)}). \end{aligned}$$

Последний множитель принадлежит подгруппе $A_{kp^m+2}^{(n)}$. Остаётся рассмотреть первые множители.

$$\begin{aligned} ((x^{(m)})^{-1} \cdot (\alpha_{i-1}^{(m)})^{-1}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) &= ((x^{(m)})^{-1}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \cdot ((\alpha_{i-1}^{(m)})^{-1}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \cdot \\ &\cdot (((x^{(m)})^{-1}, \alpha_{kp^m}^{(n)}), (\alpha_{i-1}^{(m)})^{-1}). \end{aligned}$$

Последний множитель лежит в $A_{kp^m+2}^{(n)}$. Первый множитель равен единице по лемме 4.4, так как

$$x^{(m)} = a^{(0)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_{11}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{11\dots 1}^{(m-1)},$$

а элемент $\alpha_{kp^m}^{(n)}$ остаётся на месте под действием всех внутренних автоморфизмов, порождённых элементами

$$a^{(0)}, a_1^{(1)}, a_{11}^{(2)}, \dots, a_{11\dots 1}^{(m-1)}.$$

Но

$$((\alpha_{i-1}^{(m)})^{-1}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) = (\alpha_{kp^m}^{(n)}, \alpha_{i-1}^{(m)}) \cdot a_{kp^m+2},$$

где $a_{kp^m+2} \in A_{kp^m+2}^{(n)}$. Точно так же подсчитаем коммутатор

$$\begin{aligned} (x^{(m)} \cdot \alpha_{i-1}^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) &= (x^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \cdot (\alpha_{i-1}^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \cdot ((x^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}), \alpha_{i-1}^{(m)}) = \\ &= (\alpha_{i-1}^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) \cdot a_{kp^m+2}^*, \end{aligned}$$

и получим

$$(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) = a_{kp^m+2}' (\alpha_{kp^m}^{(n)}, \alpha_{i-1}^{(m)}) \cdot (\alpha_{i-1}^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(n)}) = a_{kp^m+2}' \in A_{kp^m+2}^{(n)}.$$

Следствие доказано.

Следствие 4.7. Элементы, находящиеся выше главной буквы группы $A^{(m)}$, переводят последний элемент любого периода m -го порядка в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже второго элемента следующего периода m -го порядка группы $A^{(n)}$.

Лемма 4.5. $(a_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = e$ для всех $0 \leq k < p^{n-m}$, если некоторое $\lambda_i \neq 1$. Утверждение очевидно, так как (по соотношениям (2.7)) элемент $\alpha_{kp^m+1}^{(n)}$ распадается в произведение некоторых степеней элементов, первые m индексов которых равны единице. Но такие элементы остаются на месте под действием внутреннего автоморфизма, порожденного любым элементом вида $a_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{(m)}$ где $\lambda_i \neq 1$.

Из теоремы 4.6 и леммы 4.5 непосредственно получается

Теорема 4.7.

$$(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}) = \begin{cases} \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если } k \neq rp-1 \\ e, & \text{если } k = rp-1, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, p^m; 0 \leq k < p^{n-m}$.

Лемма 4.6.

$$(a_{1 \dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) = \begin{cases} \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(n)}, & \text{если } k \neq \mu p-1 \\ e, & \text{если } k = \mu p-1, \end{cases}$$

$0 \leq k < p^{n-m}, 1 \leq r < p^m$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (a_{1 \dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) &= (a_{1 \dots 1}^{(m)})^{-1} \cdot \left\{ \prod_{\lambda=0}^{k-1} \prod_{\mu=0}^{p^m} [y_{\lambda p^m+\mu}^{(n)}]^{-(-1)^{\lambda p^m+\mu-1}} c_{kp^m+r-1}^{\lambda p^m+\mu-1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \prod_{\mu=1}^r [y_{kp^m+\mu}^{(n)}]^{-(-1)^{kp^m+\mu-1}} c_{kp^m+r-1}^{kp^m+\mu-1} \right\} \cdot a_{1 \dots 1}^{(m)} \cdot \alpha_{kp^m+r}^{(n)} = \\ &= (a_{1 \dots 1}^{(m)})^{-1} \prod_{\lambda=0}^k [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{-(-1)^{\lambda p^m}} c_{kp^m+r-1}^{\lambda p^m} \cdot a_{1 \dots 1}^{(m)} \cdot \prod_{\lambda=0}^k [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p^m}} c_{kp^m+r-1}^{\lambda p^m}, \end{aligned}$$

так как внутренний автоморфизм, порожденный элементом $a_{1 \dots 1}^{(m)}$ оставляет на месте все элементы вида $y_{\lambda p^m+\mu}^{(n)}$, где $\mu \neq 1$.

Однако

$$C_{kp^m+r-1}^{\lambda p^m} \equiv C_k^{\lambda} \equiv C_{kp^m}^{\lambda p^m} \pmod{p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\alpha_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) &= (\alpha_{1\dots 1}^{(m)})^{-1} \prod_{\lambda=0}^k [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p^m} c_{kp^m}^{\lambda p^m}} \cdot \alpha_{1\dots 1}^{(m)} \cdot \\ &\cdot \prod_{\lambda=0}^k [y_{\lambda p^m+1}^{(n)}]^{(-1)^{\lambda p^m} c_{kp^m}^{\lambda p^m}} = (\alpha_{1\dots 1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(n)}). \end{aligned}$$

Лемма 4.7. $(\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(n)}$, где $1 \leq r \leq p^m$, $0 \leq k < p^{n-m}$, $m < n$, $\lambda_i = 1, 2, \dots, p$.

Доказательство. По определению (2.2), $y_1^{(m)} = \alpha_{1\dots 1}^{(m)}$, и элементы $y_v^{(m)} = (x^{(m)})^{-1} y_{v-1}^{(m)} x^{(m)}$ пробегают все образующие элементы $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{(m)}$ группы $A^{(m)}$. Поэтому теорему можем перефразировать так

$$(y_v^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(n)},$$

где $1 \leq r < p^m$, $0 \leq k < p^{n-m}$, $m < n$, $v = 1, 2, \dots, p$. Лемма верна для $v=1$ (по лемме 4.6). Предположим, что

$$(y_\mu^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(n)}$$

для всех $1 \leq \mu < p^m$, $1 \leq r < p^m$, $0 \leq k < p^{n-m}$. Тогда

$$\begin{aligned} (y_{\mu+1}^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) &= ((x^{(m)})^{-1} \cdot y_\mu^{(m)} \cdot x^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) = \\ &= (x^{(m)})^{-1} \cdot (y_\mu^{(m)}, x^{(m)} \cdot \alpha_{kp^m+r}^{(n)} \cdot (x^{(m)})^{-1}) \cdot x^{(m)}. \end{aligned}$$

Однако, как и все члены центрального ряда группы $A^{(n)}$, так же и группа $A_{kp^m+r}^{(n)}$ инвариантна относительно внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $x^{(m)}$, значит и относительно инверсного к нему автоморфизма. Следовательно элемент $x^{(m)} \alpha_{kp^m+r}^{(n)} (x^{(m)})^{-1} \in A_{kp^m+r}^{(n)}$, значит его можно записать в виде произведения некоторых степеней элементов $\alpha_{p^n}^{(n)}, \alpha_{p^n-1}^{(n)}, \dots, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}$. По предположению индукции коммутатор каждого из этих элементов с элементом $y_\mu^{(m)}$ лежит в $A_{(k+1)p^m+1}^{(n)}$, следовательно и коммутатор $(y_\mu^{(m)}, x^{(m)} \cdot \alpha_{kp^m+r}^{(n)} \cdot (x^{(m)})^{-1})$ принадлежит подгруппе $A_{(k+1)p^m+1}^{(n)}$. Из инвариантности подгруппы $A_{(k+1)p^m+1}^{(n)}$ относительно внутреннего автоморфизма, порождённого элементом $x^{(m)}$, лемма уже следует.

Теорема 4.8. $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m+r}^{(n)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(n)}$ для всех $1 \leq i \leq p^m$, $0 \leq k < p^{n-m}$, $m < n$, $1 \leq r \leq p^m$.

Теорема непосредственно вытекает из лемм 4.6 и 4.7.

Следствие 4.8. Любой элемент группы $A^{(m)}$ переводит все элементы любого периода m -го порядка в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже главной буквы следующего периода m -го порядка группы $A^{(n)}$.

Заметим теперь, что $S_{n+1} \cong A^{(n)} \cdot S_n$, и вообще $S_{r+1} \cong A^{(r)} \cdot S_r$, где S_r — сплетение циклических групп простого порядка p . Следовательно, все доказанные нами результаты для группы $A^{(n)}$ справедливы также для произвольной группы $A^{(r)}$. Имеют место следующие факты:

Теорема 4. 9.

$$(\alpha_1^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) = \begin{cases} \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(r)}, & \text{если } k \neq vp-1 \\ e, & \text{если } k = vp-1 \end{cases}$$

для всех $0 < r \leq n$, $0 \leq k < p^{r-m}$, $1 < r \leq n$, $1 \leq \mu \leq p^m$.

Теорема 4. 10. $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(r)}$ для всех $1 \leq i \leq p^m$, $m < r \leq n$, $0 \leq k < p^{r-m}$, $1 \leq \mu < p^m$.

Теорема 4. 11. $(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(r)}) \in A_{kp^m+2}^{(r)}$ для всех $1 \leq i \leq p^m$, $m < r \leq n$, $0 < k \leq p^{r-m}$.

Из этих теорем сразу получается

Следствие 4. 9. $(a^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(r)}$ для всех $m < r \leq n$, $0 \leq k < p^{r-m}$, $1 \leq \mu \leq p^m$, $a^{(m)} \in A^{(m)}$.

Следствие 4. 10. $(a^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(r)}) \in A_{kp^m+2}^{(r)}$ для всех $m < r \leq n$, $0 < k < p^{r-m}$, $a^{(m)} \in A^{(m)}$.

В итоге

Следствие 4. 11. Все элементы группы $A^{(m)}$ переводят любой базисный элемент произвольного периода m -го порядка группы в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже главной буквы следующего периода m -го порядка группы $A^{(r)}$.

Следствие 4. 12. Все элементы группы $A^{(m)}$ переводят последний базисный элемент любого периода m -го порядка группы $A^{(r)}$ в произведение некоторых степеней элементов, находящихся не ниже второго базисного элемента следующего периода m -го порядка группы $A^{(r)}$.

Литература

- [1] L. KALUJNINE, Sur les p -groupes de Sylow du groupe symetrique de degré m , *C. R. Acad. Sci. Paris*, **221** (1945), 222—224.
- [2] L. KALUJNINE, La structure des p -groupes de Sylow des groupes symetriques finis, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (3) **65** (1948) 239—276.
- [3] A. I. WEIR, The Sylow subgroups of the symmetric group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955) 534—541.
- [4] К. Бузаши. Ядра неприводимых представлений силовской p -подгруппы S_3 симметрической группы Sp^3 , *Publ. Math. Debrecen*, **14** (1967) 285—310.

(Поступило 10. VI. 1967.)