Sur une classe des équations diophantiennes

Par K. GYŐRY (Debrecen)

Dédié au 60ième anniversaire de M. le Professeur A. G. KUROŠ

1. Introduction. Un problème classique dans la théorie des équations diophantiennes est de déterminer toutes les équations à coefficients rationnels ayant une infinité de solutions en nombres entiers. Une méthode très utile pour considérer cette question est l'application des résultats concernant l'approximation des nombres algébriques par rationnels. En premier lieu il faut mentionner les résultats connus de A. THUE [13], de C. L. SIEGEL [11] et de K. F. ROTH [8]. D'après Roth, si α est un nombre algébrique irrationnel, et si $\varepsilon>0$ est une constante arbitraire, alors il n'existe qu'un nombre fini de fractions rationnelles p/q pour satisfaire à l'inégalité

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}. \tag{1}$$

Utilisant ce théorème, H. DAVENPORT et K. F. ROTH ont prouvé que si $F(x_1, x_2)$ est un polynome homogène irréductible de degré $n\geqq 3$ avec des coefficients entiers, et si $G(x_1, x_2)$ est un polynome à coefficients entiers de degré au plus $(n-3)$, alors l'équation

$$F(x_1, x_2)=G(x_1, x_2) \tag{2}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions (x_1, x_2) en entiers rationnels; en plus pour le nombre des solutions ils ont donné aussi une borne supérieure dépendant seulement de n et des coefficients de F et de G.

Dans ce travail nous allons considérer la cardinalité des solutions $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m)$ en nombres entiers rationnels de l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_m)=G(x_1, \ldots, x_m) \tag{3}$$

dans le cas où F est une forme irréductible, décomposable [1]) de degré n avec des coefficients rationnels, et G un polynome à coefficients rationnels.

TH. SKOLEM (voir par ex. [12] ou [1]) et puis C. CHABAUTY [3] ont traité l'équation (3) dans le cas où $m=3$ et $G\equiv a$ est un nombre rationnel. A l'aide de la méthode p-adique de Skolem ils ont montré que dans certains cas le nombre des solutions est limité.

[1]) C'est-à-dire F se décompose en facteurs linéaires dans le corps complexe.

En utilisant la conjecture connue concernant l'approximation simultanée des nombres algébriques [2]) nous allons démontrer que l'équation (3) n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers aussi dans le cas où G n'est pas nécessairement un polynome constant, mais n est assez grand (dans 3 déterminé exactement) par rapport à m et au degré de G. Pour $m=2$ il en résultera — comme nous verrons — le théorème cité de Davenport et de Roth, en plus on obtiendra aussi pour $m=3, 4$ quelques conséquences en appliquant les résultats d'approximation les plus récents de W. M. SCHMIDT [10]. D'abord il nous faut toutefois introduire quelques notions et notations.

2. Notions et notations. Soit C le corps des nombres complexes, et soit $C[x_1, \ldots, x_m]$ l'anneau de polynomes en m variables. Interprétons la notion de l'index comme une valuation spéciale de cet anneau de polynomes (voir [7], p. 135.):

Définition 1. Soit $P(x_1, \ldots, x_m) \in C[x_1, \ldots, x_m]$ un polynome non identiquement zéro. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des nombres complexes et $r_1, \ldots, r_m$ des nombres positifs. Considérons le polynome $P(x_1+\alpha_1, \ldots, x_m+\alpha_m)$ sous la forme

$$P(x_1+\alpha_1, \ldots, x_m+\alpha_m) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_m=0}^{\infty} c(j_1, \ldots, j_m) x_1^{j_1} \ldots x_m^{j_m}.$$

Le nombre

$$\Theta = \min \left(\frac{j_1}{r_1} + \ldots + \frac{j_m}{r_m} \right) \tag{4}$$

s'appelle l'index de P au point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ concernant $(r_1, \ldots, r_m)$, où le minimum concerne l'ensemble de tous les entiers non négatifs $j_1, \ldots, j_m$ tels que $c(j_1, \ldots, j_m) \neq 0$, ou de manière équivalente tels que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{j_m} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq 0.$$

On peut aisément voir que l'index est en effet une valuation, c'est-à-dire par définition $\operatorname{ind} \mathbf{O} = \infty$ où $\mathbf{O}$ est le polynome identiquement zéro, en plus au point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ concernant $(r_1, \ldots, r_m)$

$$\operatorname{ind}(P+Q) \geqq \min(\operatorname{ind} P, \operatorname{ind} Q) \tag{5}$$

et

$$\operatorname{ind} PQ = \operatorname{ind} P + \operatorname{ind} Q, \tag{6}$$

où $P, Q \in C[x_1, \ldots, x_m]$ sont de polynomes non identiquement zéro.

Par exemple prenons une forme irréductible $F(x_1, x_2)$ de degré n avec des coefficients rationnels. Alors on a

$$F(x_1, x_2) = a(x_1 + \vartheta_1 x_2) \ldots (x_1 + \vartheta_n x_2)$$

[2]) Voir section 3. de ce travail.

et ainsi l'index de F concernant (1, 1) dans un point arbitraire $A=(\alpha_1, \alpha_2)\neq(0, 0)$ de l'espace euclidien réel E_2 de dimension 2 est

$$\operatorname{ind} F(A) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ind}(\alpha_1 + \vartheta_i \alpha_2)$$

d'après (6). Donc

$$\operatorname{ind} F(A) \leqq 1, \tag{7}$$

puisque F est irréductible, c'est-à-dire $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ sont différents.

Définition 2. Une forme $F(x_1, \ldots, x_m)$ à coefficients rationnels s'appelle décomposable s'elle se décompose en facteurs linéaires dans le corps complexe.

Évidemment toutes les formes en deux variables avec coefficients rationnels sont décomposables, mais les formes en plusieurs variables sont en général non décomposables (voir par ex. [1], p. 92—100.). Dans la suite nous verrons que les formes décomposables sont caractérisées complètement.

Définition 3. Une forme $F(x_1, \ldots, x_m)$ à coefficients rationnels s'appelle dérivable [3]) s'il existe une forme $H(y_1, \ldots, y_l)$ $(l<m)$ avec des coefficients rationnels telle que par la substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \\ &\vdots \\ y_l &= a_{l1}x_1 + \ldots + a_{lm}x_m, \end{aligned} \tag{8}$$

où les éléments de la matrice $A=\|a_{ik}\|$ sont entiers, la forme H sera transformée dans la forme F. Au cas contraire nous appelons la forme F indérivable.

Il faut observer que les formes $F(x_1, x_2)$ irréductibles à coefficients rationnels de degré au moins 2 sont naturellement indérivables. Dans section 4 nous caractériserons les formes irréductibles, décomposables, indérivables avec des coefficients rationnels.

Enfin, si K est un corps algébrique, alors nous désignons par $N_{K/R}$ la norme dans ce corps. En plus, nous désignons par E_m l'espace euclidien réel à m dimensions.

3. Résultats. Par le théorème classique de Dirichlet concernant l'approximation simultanée des nombres irrationnels et par les résultats d'approximation de Roth et de Schmidt, il est très probable que la conjecture suivante est vraie (voir par ex. [2] ou [9]):

Conjecture A. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des nombres réels algébriques tels que $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont linéairement indépendants dans le corps rationnel R, et soient $c>0$, $\varepsilon>0$ des constantes arbitraires. Alors les inégalités*

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{c}{q^{1+1/k+\varepsilon}} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{9}$$

n'ont qu'un nombre fini de solutions $q>0$; $p_1, \ldots, p_k$ en entiers rationnels.

[3]) Évidemment, cette notion n'a rien à faire avec l'opération de dérivation du calcul infinitésimal.

Par le principe de transposition bien connu de Khintchine [6], cette conjecture est équivalente à la conjecture suivante:

Conjecture B. *Si* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *et* $c, \varepsilon > 0$ *satisfont aux conditions de la conjecture précédente, alors l'inégalité*

$$|p + q_1\alpha_1 + \ldots + q_k\alpha_k| < \frac{c}{Q^{k+\varepsilon}}; \quad Q = \max\{|q_1|, \ldots, |q_k|\} > 0 \tag{10}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $p; q_1, \ldots, q_k$ *en entiers rationnels* [4]).

Maintenant nous pouvons formuler notre résultat concernant l'équation (3):

Théorème. *Soit* $F(x_1, \ldots, x_m)$ *une forme irréductible, décomposable, indérivable de degré* n *avec des coefficients rationnels, et soit*

$$\max_{0 \neq A \in E_m} \operatorname{ind} F(A) = r \tag{11}$$

concernant $(1, \ldots, 1)$. *En supposant* $n > mr$ *prenons un polynome* $G(x_1, \ldots, x_m)$ *à coefficients rationnels et de degré* s *tel que*

$$n - mr > s. \tag{12}$$

Si la conjecture $A \Leftrightarrow B$ *est vraie pour chaque entier* $k < m$, *alors l'équation*

$$F(x_1, \ldots, x_m) = G(x_1, \ldots, x_m) \tag{13}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ *en nombres entiers.*

Remarque 1. D'abord il faut noter que dans le cas optimal $r \leqq m-1$. Après le lemme 4 nous donnerons des exemples de telles formes. D'autre part nous prouverons qu'on a toujours $r < n$. En outre il est probable que $r \leqq n/2$ et on peut prouver que dans le cas général cette estimation ne peut pas être améliorée.

Remarque 2. Nous allons montrer que les conditions du théorème sont en général nécessaires, c'est-à-dire qu'en supprimant n'importe quelle des conditions, le théorème cessera d'être vrai en général.

Soit $F(x_1, \ldots, x_m)$ une forme à coefficients rationnels satisfaisant toutes les conditions du théorème sauf celle de l'indérivabilité. (Par les lemmes 2 et 4, dans ce cas on a généralement $n \leqq mr$.) Supposons que F procède de la forme $H(y_1, \ldots, y_l)$ $(l < m)$ par la substitution $Y = AX$, où les éléments de la matrice A sont des entiers et A contient un déterminant d'ordre l de valeur ± 1. Soit en particulier $G(x_1, \ldots, x_m) \equiv a$ un nombre rationnel. Si l'équation

$$H(y_1, \ldots, y_l) = a$$

a au moins une solution en nombres entiers $y_1, \ldots, y_l$ (ce qui se réalise toujours par exemple pour $a = 0$), alors l'équation (13) a une infinité de solutions en nombres entiers. Donc, le théorème n'est pas vrai en général pour des formes dérivables.

---

[4]) Comme il est connu, si la conjecture A ou B est vraie pour une certaine constante $c > 0$, alors elle est vraie aussi pour une constante positive arbitraire.

En général la condition (12) et ainsi $n>mr$ est également nécessaire. En effet, soit $F(x_1, x_2)=x_1^2-2x_2^2$ et $G(x_1, x_2)=1$. Dans ce cas $n=m=2$, $r=1$, $s=0$ et toutes les conditions du théorème se réalisent sauf (12), pourtant l'équation (13) a une infinité de solutions en nombres entiers.

Enfin nous montrons qu'en général il faut aussi supposer l'irréducibilité de F. A cette fin prenons les polynomes $F(x_1, x_2) = (x_1+x_2)(x_1^2+2x_2^2)^k$ ($k\geqq 2$ entier) et $G(x_1, x_2)=x_1+x_2$. Dans ce cas $r=1$ et les conditions supplémentaires du théorème se réalisent, mais le théorème n'est pas vrai.

Il faut toutefois observer que le théorème est vrai aussi dans le cas où F n'est pas nécessairement irréductible, mais tous ses facteurs irréductibles sont indérivables. Pour $m=2$ on en obtient justement un de nos résultats antérieurs [5].

Remarque 3. On voit aisément que pour $m=2$ notre théorème donne justement le résultat cité de Roth et de Davenport. En effet, si $F(x_1, x_2)$ est une forme irréductible de degré $n\geqq 3$ avec des coefficients rationnels, alors elle est décomposable, indérivable et d'après (7) $r\leqq 1$. Puisque dans le cas $k=1$ la conjecture $A \Leftrightarrow B$ est démontrée par Roth, pour un polynome $G(x_1, x_2)$ de degré au plus $(n-3)$ avec des coefficients rationnels, en conséquence de notre théorème l'équation (13), c'est-à-dire l'équation (2) n'admet qu'un nombre fini de solutions en entiers rationnels.

Vu que pour $k=2$ les conjectures A et B se trouvent démontrées par Schmidt [10], du théorème précédent on obtient le

Corollaire 1. *Soit $F(x_1, x_2, x_3)$ une forme irréductible, décomposable, indérivable de degré $n\geqq 4$ avec des coefficients rationnels, et soit*

$$\max_{0\neq A\in E_3} \operatorname{ind} F(A) = r \tag{11'}$$

concernant $(1, 1, 1)$. *En supposant $n>3r$ prenons un polynome $G(x_1, x_2, x_3)$ à coefficients rationnels et de degré s tel que*

$$n-3r>s. \tag{12'}$$

Alors l'équation

$$F(x_1, x_2, x_3)=G(x_1, x_2, x_3) \tag{13'}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ en nombres entiers. [5])

Dans le mémoire cité de Schmidt on peut trouver également le théorème suivant: Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des nombres réels algébriques tels que $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont linéairement indépendants, et soient $c>0$, $\varepsilon>0$ des constantes arbitraires. Alors l'inégalité

$$|p+q_1\alpha_1+q_2\alpha_2+q_3\alpha_3| < \frac{c}{Q^{5+\varepsilon}};\ Q=\max\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}>0 \tag{14}$$

[5]) C'est après que ce travail fût complété et reçu par la rédaction, que j'ai pris connaissance du travail de W. M. Schmidt: Some diophantine equations in three variables with only finitely many solutions, *Mathematika* **14** (1967) No. 2. p. 113—120. Ce travail contient pour $m=3$ un théorème meilleur que notre corollaire 1, tandis que pour $m=4$ l'auteur mentionne (sans démonstration) un résultat un peu plus faible que notre corollaire 2. Des résultats de ce travail il s'en suit (à l'aide de notre lemme 4) que dans le cas $m=3$ on a $r\leqq n/2$.

n'a qu'un nombre fini de solutions $p; q_1, q_2, q_3$ en entiers rationnels. Au moyen de ce résultat et de notre théorème, on peut aisément obtenir une conséquence pour des équations du type (3) à quatre inconnues:

Corollaire 2. *Soit* $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *une forme irréductible, décomposable, indérivable de degré* $n \geqq 7$ *avec des coefficients rationnels, et soit*

$$\max_{0 \neq A \in E_4} \operatorname{ind} F(A) = r \tag{11''}$$

concernant (1, 1, 1, 1). *En supposant* $n > 6r$ *prenons un polynome* $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *à coefficients rationnels et de degré* s *tel que*

$$n - 6r > s. \tag{12''}$$

Alors l'équation

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{13''}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *en nombres entiers.*

4. Lemmes. On appelle une forme $F(x_1, \ldots, x_m)$ à coefficients rationnels unimodulairement équivalente ou simplement équivalente à la forme $F'(x_1', \ldots, x_m')$ à coefficients rationnels, s'il existe une transformation unimodulaire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} \tag{15}$$

par laquelle la forme F se trouve transformée dans la forme F', et les éléments de la matrice $C = \|c_{ik}\|$ étant des entiers et $\det |C| = \pm 1$.

Nous mentionnons d'abord une caractérisation des formes irréductibles, décomposables à coefficients rationnels.

Lemme 1. *Si* $\mu_2, \ldots, \mu_m$ *sont des nombres algébriques tels que* $K = R(\mu_2, \ldots \mu_m)$, *alors la forme à coefficients rationnels*

$$F(x_1, \ldots, x_m) = N_{K/R}(x_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_m\mu_m) \tag{16}$$

est irréductible dans le corps rationnel R. De l'autre côté chacun des formes irréductibles, décomposables en m variables à coefficients rationnels peut être représentée dans la forme (16) *à un facteur constant près.*

DÉMONSTRATION. Ce lemme peut se trouver dans [1], p. 97—98. Plus précisément les auteurs y ont démontré la première part de ce lemme, en plus ils ont prouvé que chaque forme irréductible, décomposable de degré n en m variables avec des coefficients rationnels est unimodulairement équivalente à une forme du type (16) à une constante près, où $[K: R] = n$. Par conséquent, si $F_1(x_1', \ldots, x_m')$ est une forme irréductible, décomposable à coefficients rationnels, alors elle est équivalente à une forme du type (16) par la transformation (15), c'est-à-dire on en obtient

$$aF_1(x_1', \ldots, x_m') = N_{K/R}(x_1'\xi_1 + \ldots + x_m'\xi_m)$$

où

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{m1} \\ \\ \vdots & & \\ c_{1m} & \ldots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$a \neq 0$ est un nombre rationnel et d'après (17) $R(\xi_1, \ldots, \xi_m) = R(\mu_2, \ldots, \mu_m) = K$. Puisque F a m variables, ainsi $\xi_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ et par exemple

$$aF_1(x_1', \ldots, x_m') = N_{K/R}(\xi_1) N_{K/R}(x_1' + x_2'\xi_2/\xi_1 + \ldots + x_m'\xi_m/\xi_1).$$

Maintenant on a nécessairement $K' = R(\xi_2/\xi_1, \ldots, \xi_m/\xi_1) = K$, parce que dans le cas $K \supset K'$ F_1 serait une puissance d'une forme en m variables de degré $[K: K'] \geqq 2$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, F_1 peut être représentée en effet dans la forme (16) à une constante près.

Dans la suite nous allons caractériser les formes irréductibles, décomposables, indérivables avec des coefficients rationnels.

Lemme 2. *Pour qu'une forme irréductible, décomposable à coefficients rationnels soit indérivable, il faut et il suffit que les coefficients de tous ses facteurs linéaires soient linéairement indépendants.*

DÉMONSTRATION. Soit $F(x_1, \ldots, x_m)$ une forme irréductible, décomposable, indérivable à coefficients rationnels. D'après le lemme précédent on a

$$F(x_1, \ldots, x_m) = aN_{K/R}(x_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_m\mu_m), \tag{18}$$

où $K = R(\mu_2, \ldots, \mu_m)$ et a est un nombre rationnel. Supposons que les coefficients $1, \mu_2^{(i)}, \ldots, \mu_m^{(i)}$ du i-ième facteur linéaire de F sont linéairement dépendants. C'est-à-dire $1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont également linéairement dépendants. Prenons un sous-ensemble maximal de ces nombres — par exemple les nombres $1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ — tel que $1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ soient déjà linéairement indépendants (F étant indérivable, les nombres μ_i ne sont pas tous rationnels). Par conséquent il existe un entier $c \neq 0$ tel que

$$\begin{aligned} c\mu_{l+1} &= \lambda_{l+1,1} + \lambda_{l+1,2}\mu_2 + \ldots + \lambda_{l+1,l}\mu_l \\ &\vdots \\ c\mu_m &= \lambda_{m,1} + \lambda_{m,2}\mu_2 + \ldots + \lambda_{m,l}\mu_l, \end{aligned} \tag{19}$$

où les $\lambda_{i,k}$ sont tous entiers. D'après (18) il résulte

$$c^n F(x_1, \ldots, x_m) = aN_{K/R}(cx_1 + \ldots + cx_m\mu_m).$$

En appliquant la substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= cx_1 + \lambda_{l+1,1}x_{l+1} + \ldots + \lambda_{m,1}x_m \\ &\vdots \\ y_l &= cx_l + \lambda_{l+1,l}x_{l+1} + \ldots + \lambda_{m,l}x_m \end{aligned} \tag{20}$$

on a d'après (19)

$$c^n F = aN_{K/R}(y_1 + y_2\mu_2 + \ldots + y_l\mu_l) = H(y_1, \ldots y_l)$$

où H est une forme à coefficients rationnels, ce qui est impossible par l'hypothèse.

D'autre part, supposons que les coefficients du facteur linéaire $L^{(1)}(\mathbf{x}) = x_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_m\mu_m$ de F sont linéairement indépendants. Alors les coefficients des facteurs $L^{(i)}(\mathbf{x}) = x_1 + x_2\mu_2^{(i)} + \ldots + x_m\mu_m^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont également linéairement indépendants. En supposant que F est dérivable, elle s'obtient d'une forme $H(y_1, \ldots, y_l)$ $(l < m)$ à coefficients rationnels par une substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \\ &\vdots \\ y_l &= a_{l1}x_1 + \ldots + a_{lm}x_m. \end{aligned}$$

Pour $Y=0$ le système d'équations $A\cdot X=0$ a au moins une solution nontriviale $X^*=(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ en nombres rationnels. Donc, on en conclut

$$0=H(0, \ldots, 0)=F(X^*)=L^{(1)}(X^*)\ldots L^{(n)}(X^*),$$

ainsi $L^{(i)}(X^*)=0$ pour un i, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Du lemme précédent on obtient sans peine le

Lemme 3. *Pour qu'une forme $F(x_1, \ldots, x_m)$ irréductible, décomposable à coefficients rationnels soit indérivable, il faut et il suffit que le rang de la matrice des coefficients de ses facteurs linéaires soit m.* [6])

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1 la forme F peut être écrit sous la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m) = aN_{K/R}(x_1+x_2\mu_2+\ldots+x_m\mu_m),$$

où $K=R(\mu_2, \ldots, \mu_m)$ et a est un nombre rationnel.

Supposons d'abord que F est dérivable. Alors d'après le lemme précédent ils existent des nombres rationnels non tous zéro $c_1, \ldots, c_m$ tels que

$$c_1+c_2\mu_2^{(i)}+\ldots+c_m\mu_m^{(i)} = 0 \qquad (i=1, \ldots, n)$$

et on en déduit en effet

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & \mu_2 & \ldots & \mu_m \\ 1 & \mu_2^{(2)} & \ldots & \mu_m^{(2)} \\ \vdots & & \cdots & \\ 1 & \mu_2^{(n)} & \ldots & \mu_m^{(n)} \end{pmatrix} < m.$$

Supposons ensuite que la forme F est indérivable. Alors, d'après le lemme précédent $1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont linéairement indépendants. Dans le cas $m=n$ ces nombres forment une base dans K, et pour $n>m$ on les peut compléter à une base $1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \ldots, \mu_n^*$ de K. Donc, leur discriminant est

$$0 \neq \Delta(1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \ldots, \mu_n^*) = \begin{vmatrix} 1 & \mu_2 & \ldots & \mu_m & \ldots & \mu_n^* \\ 1 & \mu_2^{(2)} & \ldots & \mu_m^{(2)} & \ldots & \mu_n^{*(2)} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \mu_2^{(n)} & \ldots & \mu_m^{(n)} & \ldots & \mu_n^{*(n)} \end{vmatrix}^2.$$

On en conclut que le lemme est démontré pour $m=n$. Dans le cas contraire, en développant ce déterminant par les déterminants de ses premières m colonnes, il existe au moins un déterminant d'ordre m différent de zéro, ce qui prouve notre proposition.

Lemme 4. *Soit $F(x_1, \ldots, x_m)$ une forme irréductible, décomposable, indérivable de degré n avec des coefficients rationnels. Désignons par M la matrice des coefficients des facteurs linéaires de F et soit t le nombre maximal des lignes de M desquelles*

[6]) C'est-à-dire il existe m facteurs linéaires de F qui sont linéairement indépendants dans le corps K.

on peut former une matrice de rang $<m$. *Alors on a*

$$\max_{0 \neq A \in E_m} \operatorname{ind} F(A) = r \leqq t, \tag{22}$$

et si F *est décomposable dans le corps réel, alors on a exactement* $r=t$.

DÉMONSTRATION. Soit de nouveau

$$F(x_1, \ldots, x_m) = aN_{K/R}(x_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_m\mu_m),$$

où $K=R(\mu_2, \ldots, \mu_m)$; $1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont linéairement indépendants et $a \neq 0$ est un nombre rationnel. En écrivant F sous la forme

$$F(\mathbf{x}) = aL^{(1)}(\mathbf{x}) \ldots L^{(n)}(\mathbf{x}),$$

on peut voir que dans un point arbitraire $A \neq 0$ de E_m on a

$$\operatorname{ind} F(A) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ind} L^{(i)}(A)$$

concernant $(1, \ldots, 1)$. Pour qu'on ait $\operatorname{ind} L^{(i)}(A)=1$, il faut et il suffit par définition que $L^{(i)}(A)=0$. Dans le cas contraire on a toujours $\operatorname{ind} L^{(i)}(A)=0$. Donc, désignant par q le nombre maximal des formes linéaires $L^{(i_1)}, \ldots, L^{(i_q)}$ telles que

$$L^{(i_1)}(A) = 0, \ldots, L^{(i_q)}(A) = 0,$$

on a nécessairement $\operatorname{ind} F(A)=q$. On en déduit

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & \mu_2^{(i_1)} & \ldots & \mu_m^{(i_1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & \mu_2^{(i_q)} & \ldots & \mu_m^{(i_q)} \end{pmatrix} < m,$$

c'est-à-dire $q=\operatorname{ind} F(A) \leqq t$, et finalement $r \leqq t$, A étant arbitrairement choisi.

Soit ensuite F une forme décomposable dans le corps réel. Si t désigne le nombre maximal des lignes de M desquelles on peut former une matrice de rang $<m$ et si l'on a par exemple

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & \mu_2^{(i_1)} & \ldots & \mu_m^{(i_1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & \mu_2^{(i_t)} & \ldots & \mu_m^{(i_t)} \end{pmatrix} < m,$$

alors le système d'équations

$$L^{(i_1)}(\mathbf{x}) = 0, \ldots, L^{(i_t)}(\mathbf{x}) = 0$$

a au moins une solution nontriviale $A \in E_m$. Il en résulte que $\operatorname{ind} F(A)=t$, autrement dit $r=t$.

Exemple 1. Comme nous avons mentionné après le théorème, dans le cas optimal on a $r \leqq m-1$. Maintenant nous en donnons un exemple: Soient $m \geqq 2$ et $n > m(m-1)$ des nombres entiers et considérons un corps algébrique K de degré n. Soit $\vartheta \in K$ un élément primitif, c'est-à-dire $K=R(\vartheta)$. D'après le lemme 4 on peut aisément voir qu'on a $r \leqq m-1$ pour la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m) = N_{K/R}(x_1 + x_2\vartheta + \ldots + x_m\vartheta^{m-1}),$$

de plus si K est totalement réel, alors on a exactement $r=m-1$. Enfin, il faut observer que F satisfait à toutes les conditions de notre théorème.

Exemple 2. Pour une forme F satisfaisant à toutes les conditions sauf $n>mr$, on a évidemment $r<n$ d'après les lemmes 3 et 4. Il est très probable qu'on a toujours même $r\leqq n/2$. Au moyen d'un exemple nous montrons que cette estimation ne peut plus être améliorée en général.[7]) A cette fin soit $m\geqq 2$ un nombre entier, $n\geqq m$ un nombre pair et soit K un corps algébrique totalement réel de degré n contenant un sous-corps quadratique. Supposons que $K=R(\mu_2, \ldots, \mu_m)$, où 1, $\mu_2, \ldots, \mu_m$ sont linéairement independants et μ_2 est du deuxième degré. Dans le cas de la forme

$$N_{K/R}(x_1+x_2\mu_2+\ldots+x_m\mu_m)$$

on a en effet $t=r\geqq n/2$, vu qu'on a $n/2$ égaux parmi les conjugués relatifs de μ_2. D'ailleurs cette forme satisfait aux conditions complémentaires du théorème.

Montrons enfin que si la conjecture B est vraie pour chaque entier $\leqq k$, alors elle est valable aussi dans le cas où les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ne sont pas nécessairement réels.

Lemme 5. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des nombres algébriques non tous réels tels que $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont linéairement indépendants dans R, et soient $c>0$, $\varepsilon>0$ des constantes arbitraires. Si la conjecture B est valable pour chaque entier $\leqq k$, alors l'inégalité*

$$|p+q_1\alpha_1+\ldots+q_k\alpha_k|<\frac{c}{Q^{k+\varepsilon}};\ Q=\max\{|q_1|, \ldots, |q_k|\}>0 \tag{23}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions $p, q_1, \ldots, q_k$ en nombres entiers.[8])

Démonstration. Évidemment il suffit de considérer seulement le cas $k\geqq 2$. Supposons qu'il existe une infinité de solutions de (23) en nombres entiers.

On peut supposer que $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sont des nombres imaginaires et $\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres réels (par hypothèse $1\leqq l\leqq k$). Par suite on peut écrire

$$\alpha_j=\beta_j+i\gamma_j \qquad (j=1, \ldots, k), \tag{24}$$

où les nombres β_j, γ_j sont réels algébriques et par hypothèse $\gamma_1, \ldots, \gamma_l\neq 0$; $\gamma_{l+1}=\ldots=\gamma_k=0$. Ainsi d'après (23) les inégalités

$$|p+q_1\beta_1+\ldots+q_k\beta_k|<\frac{c}{Q^{k+\varepsilon}};\ Q=\max\{|q_1|, \ldots, |q_k|\}>0 \tag{25}$$

et

$$|q_1\gamma_1+\ldots+q_l\gamma_l|<\frac{c}{Q^{k+\varepsilon}};\ Q=\max\{|q_1|, \ldots, |q_k|\}>0 \tag{26}$$

---

[7]) Soit $F(x_1, \ldots, x_m)=aN_{K/R}(x_1+x_2\mu_2+\ldots+x_m\mu_m)$. Si le module $\{1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$ est dégénéré, alors il existe un nombre rationnel $c\neq 0$ tel que l'équation $F=c$ a une infinité de solutions $\mathbf{x}$ en nombres entiers (voir [1], p.322.) Donc, si la conjecture $A\Leftrightarrow B$ est vraie, on a nécessairement $n-mr\leqq 0$, d'où $r\geqq n/m$. Lorsque le module $\{1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$ est non dégénéré, il est probable qu'on a en général $r<n/m$, en supposant naturellement que n est assez grand par rapport à m.

[8]) Il est probable que dans ce cas l'exposant $k+\varepsilon$ peut être encore diminué.

ont une infinité de solutions communes $p, q_1, \ldots, q_k$ en nombres entiers. Si maintenant $1, \beta_1, \ldots, \beta_k$ ou bien $1, \gamma_1, \ldots, \gamma_l$ sont linéairement indépendants dans R et si la conjecture B est vraie, alors nous obtenons une contradiction. Donc, il suffit de considérer seulement le cas où $1, \beta_1, \ldots, \beta_k$ et $1, \gamma_1, \ldots, \gamma_l$ sont linéairement dépendants dans R.

Étudions d'abord l'inégalité (25). Si les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_k$ sont tous rationnels, alors en multipliant (25) par le produit des dénominateurs de ces nombres, nous obtenons du côté gauche des nombres entiers qui sont zéro d'après $Q \to \infty$ sauf pour un nombre fini de solutions $p, q_1, \ldots, q_k$. Évidemment, cela veut dire que sauf pour un nombre fini de systèmes $p, q_1, \ldots, q_k$ on a

$$p + q_1\beta_1 + \ldots + q_k\beta_k = 0. \tag{27}$$

Supposons ensuite que $1, \beta_1, \ldots, \beta_k$ ne sont pas tous rationnels. Prenons un sous-ensemble maximal de ces nombre — par exemple les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_u$ où on a évidemment $1 \leqq u < k$ — tel que les nombres $1, \beta_1, \ldots, \beta_u$ soient déjà linéairement indépendants. Alors ils existent des nombres rationnels c_{ik} tels que

$$\begin{aligned} \beta_{u+1} &= c_{u+1,0} + c_{u+1,1}\beta_1 + \ldots + c_{u+1,u}\beta_u \\ &\vdots \\ \beta_k &= c_{k,0} + c_{k,1}\beta_1 + \ldots + c_{k,u}\beta_u. \end{aligned} \tag{28}$$

En éliminant donc $\beta_{u+1}, \ldots, \beta_k$ de (25) et en multipliant (25) avec un nombre entier $a \neq 0$ convenablement choisi, on aura l'inégalité

$$|P + Q_1\beta_1 + \ldots + Q_u\beta_u| < \frac{c_2}{Q^{k+\varepsilon}};\ Q = \max\{|q_1|, \ldots, |q_k|\} > 0 \tag{29}$$

où

$$\begin{aligned} P &= pa + q_{u+1}c'_{u+1,0} + \ldots + q_kc'_{k,0} \\ Q_1 &= q_1a + q_{u+1}c'_{u+1,1} + \ldots + q_kc'_{k,1} \\ &\vdots \\ Q_u &= q_ua + q_{u+1}c'_{u+1,u} + \ldots + q_kc'_{k,u}, \end{aligned} \tag{30}$$

et puisque les nombres $c'_{ik} = ac_{ik}$ sont des entiers, les nombres $P, Q_1, \ldots, Q_u$ seront également des entiers.

On peut distinguer de nouveau deux cas. Supposons d'abord qu'il y a une infinité de solutions $P, Q_1, \ldots, Q_u$ de (29) procédant des solutions $p, q_1, \ldots, q_k$ de (25). Si l'on avait $Q_1 = \ldots = Q_u = 0$ sauf pour un nombre fini de solutions $P, Q_1, \ldots, Q_u$, alors d'après (29) il en résulterait $P = 0$ sauf pour un nombre fini de solutions $p, q_1, \ldots, q_k$, contrairement à l'hypothèse précédente. Donc, pour une infinité de solutions $P, Q_1, \ldots, Q_u$ de (29) on a

$$Q_* = \max\{|Q_1|, \ldots, |Q_u|\} > 0 \tag{31}$$

et d'après (30) on en déduit

$$Q_* < c_3Q$$

pour chaque pair de solutions correspondantes $p, q_1, \ldots, q_k$ et $P, Q_1, \ldots, Q_u$ avec une constante $c_3 > 0$ convenablement choisie. Par conséquent l'inégalité

$$|P + Q_1\beta_1 + \ldots + Q_u\beta_u| < \frac{c_2}{Q^{k+\varepsilon}} < \frac{c_4}{Q_*^{k+\varepsilon}} < \frac{c_4}{Q_*^{u+\varepsilon}}\ .$$

admet une infinité de solutions en nombres entiers $P, Q_1, \ldots, Q_u$ satisfaisant à (31), ce qui est impossible si l'on suppose que la conjecture B vraie.

Supposons enfin qu'il n'existe qu'un nombre fini de solutions $P, Q_1, \ldots, Q_u$ de (29) procédant des solutions $p, q_1, \ldots, q_k$ de (25) par (30). Alors il y a au moins une solution $P, Q_1, \ldots, Q_u$ qui procède d'une infinité de solutions différentes $p, q_1, \ldots, q_k$. Toutefois pour chaque solution $P, Q_1, \ldots, Q_u$ de cette sorte on a nécessairement

$$P+Q_1\beta_1+\ldots+Q_u\beta_u=0,$$

puisque d'après (29) et $Q\to\infty$

$$|P+Q_1\beta_1+\ldots+Q_u\beta_u|\neq 0$$

entraîne une contradiction. Donc, d'après (28) et (30) nous en obtenons de nouveau l'égalité (27) pour chaque solution de (25) sauf un nombre fini de $p, q_1, \ldots, q_k$.

De l'inégalité (26) il résulte de la même manière

$$q_1\gamma_1+\ldots+q_l\gamma_l=0 \tag{32}$$

pour chaque solution de (26) sauf pour un nombre fini de $p, q_1, \ldots, q_k$. D'après (24) et (27) on en déduit en fin de compte

$$p+q_1\alpha_1+\ldots+q_k\alpha_k=0$$

pour chaque solution commune des inégalités (25) et (26) sauf pour un nombre fini de systèmes $p, q_1, \ldots, q_k$, ce qui entraîne une contradiction, $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ étant linéairement indépendants par hypothèse.

Remarque. Vu que pour $k=1$ et pour $k=2$ la conjecture B a été démontrée par Roth et par Schmidt respectivement, on peut démontrer de la même façon le théorème cité de Schmidt formulé par (14) pour des nombres algébriques non réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

5. Démonstration du théorème. Soient $F(x_1, \ldots, x_m)$ et $G(x_1, \ldots, x_m)$ des polynomes satisfaisant aux conditions du théorème. Supposons, contrairement à la proposition, que l'équation (13) a une infinité de solutions $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m)$ en nombres entiers.

D'après le lemme 1 la forme F peut être écrite sous la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m)=aN_{K/R}(x_1+x_2\mu_2+\ldots+x_m\mu_m)$$

où $a\neq 0$ est un nombre rationnel et $K=R(\mu_2, \ldots, \mu_m)$. De plus, d'après le lemme 2 $1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont linéairement indépendants dans R, puisque F n'est pas dérivable par hypothèse. Si nous désignons maintenant par $L^{(1)}(\mathbf{x}), \ldots, L^{(n)}(\mathbf{x})$ les facteurs linéaires de F, alors l'équation (13) s'écrit sous la forme

$$F(\mathbf{x}) = aL^{(1)}(\mathbf{x})\ldots L^{(n)}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}). \tag{33}$$

Nous montrons que (33) a une infinité de solutions $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m)$ en nombres entiers, ayant au moins deux inconnues fixées qui sont toujours différentes de zéro. En effet, par l'hypothèse indirecte il existe évidemment une infinité de solutions dans lesquelles il y a une inconnue fixée différente toujours de zéro. Si dans ces solutions les inconnues complémentaires n'avaient qu'un nombre fini de valeurs

différentes de zéro, alors on aurait un nombre infini de solutions dans lesquelles les valeurs de l'inconnue fixée seraient toutes différentes et dans lesquelles la valeur de chaque inconnue complémentaire resterait constante. Donc, de (33) on obtiendrait une équation à une inconnue ayant une infinité de solutions dans l'inconnue fixée, ce qui est impossible.

Parmi les solutions restées se trouve une infinité de solutions $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m)$ telles que

$$|x_i| \leqq |x_j| \qquad (i=1, \ldots, m;\ x_j \neq 0) \tag{34}$$

pour un index fixé j. D'après (33) on en déduit

$$|F(\mathbf{x})| = |G(\mathbf{x})| \leqq c_1 |x_j|^s$$

pour ces solutions, c'est-à-dire en vue de l'homogénéité de F on a

$$\left| F\left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_m}{x_j}\right) \right| \leqq \frac{c_1}{|x_j|^{n-s}} \tag{35}$$

avec une constante $c_1 > 0$ convenablement choisie. Vu que pour chaque solution $\mathbf{x}$ de cette sorte on a $|x_i|/|x_j| \leqq 1$ $(i=1, \ldots, m)$, les m-tuples $\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_m}{x_j}\right)$ procédant des solutions restées, considérés comme des points de E_m, forment un ensemble borné de points. De plus nous montrons qu'à ces m-tuples correspond une infinité de points différents dans E_m. En effet, dans le cas contraire cet ensemble de points aurait un élément $P=(p_1, \ldots, 1, \ldots, p_m)$ (où les coordonnées p_i comme nous allons voir — seraient toutes rationnelles et par convention $p_j=1$) tel que

$$\frac{x_i}{x_j} = p_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

pour des m-tuples $\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x_m}{x_j}\right)$ procédant d'une infinité de solutions $\mathbf{x}$. On en obtiendrait $x_i = p_i x_j$ $(i=1, \ldots, m)$ et en substituant ces valeurs dans (33), nous aurions d'après $L^{(i)}(P) \neq 0$ une équation en x_j de degré n ayant une infinité de solutions différentes, ce qui est impossible. Donc, par le théorème de Bolzano, l'ensemble de points $\bar{\mathbf{x}}$ procédant des solutions précédentes $\mathbf{x}$ possède un point d'accumulation $A=(\alpha_1, \ldots, 1, \ldots, \alpha_m) \neq 0$ dans E_m. Mais, d'après (34), aucun des sous-ensembles infinis de l'ensemble de toutes les valeurs x_j n'est borné et ainsi pour une suite partielle infinie $\bar{\mathbf{x}} \to A$ des points considérés on a $F(\bar{\mathbf{x}}) \to 0$ d'après (35), c'est-à-dire vu la continuité de F on a finalement $F(A)=0$.

Si l'on a $r=0$ où r est défini par (11), alors on obtient une contradiction (indépendamment de la vérité de la conjecture $A \Leftrightarrow B$). Dans le cas contraire il existe au moins un i tel que $L^{(i)}(A)=0$. Désignons par v le nombre des facteurs linéaires de F qui sont égaux à zéro dans A et soient par exemple ces facteurs $L^{(i_1)}, \ldots, L^{(i_v)}$. D'après le lemme 4 on a évidemment $v \leqq r$. De plus il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$0 < c_2 < \frac{|F(\bar{\mathbf{x}})|}{|L^{(i_1)}(\bar{\mathbf{x}}) \ldots L^{(i_v)}(\bar{\mathbf{x}})|} \tag{36}$$

pour une infinité d'éléments de la suite partielle considérée $\bar{\mathbf{x}}$, vu que $L^{(i)}(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$ pour chaque i. D'après (35) on en déduit

$$|L^{(i_1)}(\bar{\mathbf{x}}) \dots L^{(i_v)}(\bar{\mathbf{x}})| < \frac{|F(\bar{\mathbf{x}})|}{c_2} < \frac{c_3}{|x_j|^{n-s}}$$

c'est-à-dire pour un h et pour une infinité de $\bar{\mathbf{x}}$ on a

$$|L^{(i_h)}(\bar{\mathbf{x}})| < \frac{c_4}{|x_j|^{\frac{n-s}{v}}}$$

avec des constantes $c_3 > 0$ et $c_4 > 0$ convenablement choisies. Donc, l'inégalité

$$|x_1 + x_2 \mu_2^{(i_h)} + \dots + x_m \mu_m^{(i_h)}| < \frac{c_4}{|x_j|^{\frac{n-s}{v}-1}}$$

admet une infinité de solutions $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ayant en dehors de x_j au moins encore une inconnue fixée qui est toujours différente de zéro. D'après (34) on en conclut

$$0 < \max \{|x_2|, \dots, |x_m|\} = X \leqq |x_j|$$

pour ces solutions, autrement dit l'inégalité

$$(37) \qquad |x_1 + x_2 \mu_2^{(i_h)} + \dots + x_m \mu_m^{(i_h)}| < \frac{c_4}{X^{\frac{n-s}{v}-1}}; \quad X = \max \{|x_2|, \dots, |x_m|\} > 0$$

a également une infinité de solutions $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ en nombres entiers.

Si maintenant la conjecture A $\Leftrightarrow$ B est vraie pour chaque entier $< m$, alors d'après le lemme 5 on en conclut

$$\frac{n-s}{v} - 1 \leqq m - 1,$$

d'où

$$n - s \leqq mv \leqq mr$$

et finalement

$$n - mr \leqq s,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse (12). Cela démontre notre théorème.

DÉMONSTRATION du corollaire 2. En vue du résultat cité de Schmidt et de la remarque suivant le lemme 5, on déduit de (37) dans le cas spécial $m = 4$, que

$$\frac{n-s}{v} - 1 \leqq 5,$$

d'où

$$n - s \leqq 6v \leqq 6r$$

et par conséquent

$$n - 6r \leqq s,$$

contrairement à l'hypothèse (12″).

Bibliographie

[1] S. I. Borewicz—I. R. Šafarevič, Zahlentheorie, *Basel und Stuttgart*, 1966.
[2] J. W. S. Cassels, An introduction to diophantine approximation, *Cambridge Tracts*, 1957.
[3] C. Chabauty, Sur certaines équations diophantiques ternaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 202 (1936), 2117—2119.
[4] H. Davenport—K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 160—167.
[5] K. Győry, Note sur un théorème de H. Davenport et de K. F. Roth, *Publ. Math. Debrecen*, **14** (1967), 331—335.
[6] A. Khintchine, Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **50** (1926), 170—195.
[7] W. J. LeVeque, Topics in number theory, vol. II, *Reading Mass.*, 1956.
[8] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1—20.
[9] W. M. Schmidt, Über simultane Approximation algebraischer Zahlen durch rationale, *Acta Math.*, **114** (1965), 159—206.
[10] W. M. Schmidt, On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals, *Acta Math.*, **119** (1967), 27—50.
[11] C. L. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Z.*, **10** (1921), 173—213.
[12] Th. Skolem, Einige Sätze über p-adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen, *Math. Ann.*, **111** (1935), 399—424.
[13] A. Thue, Om en general i store hele tal uløsbar ligning, *Skrifter udgivne of Videnskabs-Selskabet i Christiania*, 1908.

(*Reçu le 20 juin 1967, et dans une forme modifiée le 29 novembre 1967.*)