

## Perspektivdeutung einer speziellen hyperbolischen oder parabolischen Netzprojektion

Von Dr. AURELIAN TĂNĂSESCU (București)

### a) Einleitung

Im vorliegenden Beitrag werden wir eine Perspektivinterpretation einer besonderen Netzprojektion angeben, die durch eine Regelstrahlfläche zweiter Ordnung mit Leitebene  $(\Psi, S, D)$  definiert wurde, und die aus einer speziellen Biaxialprojektion mittels Durchführung einer topologischen Wandlung  $\Psi_A$  zwischen den Punkten zweier disjunkten Linearräumen  $S$  und  $D$  abgeleitet wurde [1].

In dieser Weise wurde einerseits eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten der allgemeinen Geraden  $D$  und dem Netz von Parabeln  $\Gamma_A$ , andererseits zwischen den Punkten derselben allgemeinen Geraden  $D$  und dem Netz von Hyperbolen  $\Gamma_A$  erzielt, die durch topologische Wandlung  $(\Psi_A, \theta)$  definiert ist, wobei  $\theta$  das Winkelmodul des Risses ist.

Diese Netze  $\Gamma_A$  von Parabeln oder von Hyperbolen wurden als Schnitte in den kegeligen Flächen  $(A_S C_A)$ , die durch den Punkt  $A_S$ , also vom Zentrum des speziellen Linearkomplexes und von den Leitkurven  $C_A$  — das Kreisbündel  $C_A = (s, d, D_A^*)$  — definiert wurden, erzeugt mit den Grundpunkten  $s$  und  $d$  (die Spuren der Linearräume auf eine nicht parallele und nicht senkrechte Bezugsebene gegenüber der disjunkten Geraden  $S$  und  $D$ ), wo die Gesamtheit der Spuren  $(d, D_A^*)$  den Netzriss der allgemeinen Geraden  $D$  in topologischer Wandlung  $\Psi_A$  definieren ([2], [3]).

Gleichfalls wurden die zu diesen kegeligen Flächen  $(A_S, C_A)$  tangentialen Ebenen  $T_A$  entlang der vom Netzstrahl  $G_A$  gebildeten Erzeugenden geführt.

### b) Perspektivdeutung

Sei  $\Omega$  der Gesichtspunkt und  $P_\Omega$  der Hauptpunkt, d.h. die orthogonale Projektion auf der Perspektivtafel  $\Pi$  des Gesichtspunktes. Offensichtlich ist  $P_\Omega$  der Mittelpunkt des Distanzkreises  $C_{\Omega_0}$  dessen Radius gleich der Hauptdistanz ist. (Fig. 1).

Die Fluchtpunkte beider disjunkten Linearräume  $S$  und  $D$  (Stützgerade  $S$  und allgemeine Gerade  $D$ ) werden  $s^*$  bzw.  $d^*$  sein. Sei gleichfalls  $P^{\Psi*}$  die Fluchtlinie des Ebenenbündels  $P_A$  parallel zur Leitebene  $\Psi$  der Strahlfläche zweiter Ordnung, die vom hyperbolischen Paraboloid  $(\Psi, S, D)$  gebildet ist. Dieses hyperbolische

Paraboloid gestattet eine zweite Leitebene  $\Psi'$ , für die wir die von uns in dieser Perspektivdeutung gemachten Überlegungen wieder aufnehmen könnten.

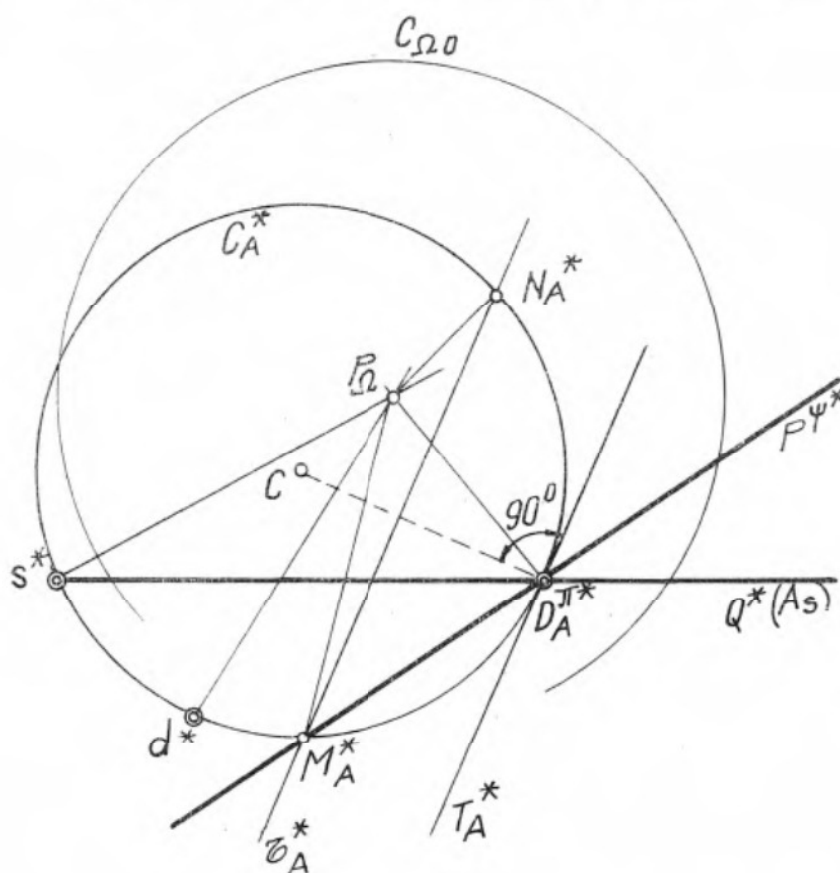


Fig. 1

Wir haben gezeigt, daß die Gesamtheit der Netzsrisse der Punkte der allgemeinen Geraden  $D$  mit der Gesamtheit der Netzsrisse  $G_A$  zusammenfallen. Unter diesen Umständen können wir folgendes formulieren:

**Satz 1.** Die Fluchtlinie  $P^{\Psi^*}$  ist der geometrische Ort der Fluchtpunkte  $D_A^{\pi^*}$  für die Gesamtheit der Netzstrahlen  $G_A$ , durch die die topologische Wandlung  $(\Psi_A, \theta)$  zwischen den disjunkten Linearräumen  $S$  und  $D$  festgestellt wird.

Da der Netzriss  $D_A^{\pi^*}$  des Netzstrahles  $G_A$  eindeutig bestimmt ist, wie auch der Punkt  $A_s$  eindeutig bestimmt ist, können wir den speziellen linearen Geradenkomplex betrachten, in dem der Mittelpunkt des Linearkomplexes  $A_s$  ist und die Unterlage des Linearkomplexes die Spur  $Q(A_s)$  der von den Elementen  $(S, D_A^{\pi^*})$  definierten Ebene ist.

Demnach können wir wiederum formulieren:

**Satz 2.** Die Fluchtlinie  $Q^*(A_s)$  ist der geometrische Ort der Fluchtpunkte für die Gesamtheit des speziellen linearen Strahlenkomplexes des Mittelpunktes  $A_s$  und der Unterlage  $Q(A_s)$ .



dann, erscheint uns die Gerade als eine Fluchtlinie des Ebenenbündels, welches parallel zu den Erzeugenden  $A_S M_A$  und  $A_S N_A$  der kegeligen Flächen  $(A_S, C_A)$  ist.

Also  $\tau_A^* \parallel T_A^*$  ist die durch den Fluchtpunkt  $M_A^*$  geführte Fluchtlinie der radialen Ebene. Diese radiale Ebene durchschneidet die sichtbare kegelige Fläche  $(\Omega, C_A)$  nach den Erzeugenden  $\Omega M_A^*$  und  $\Omega N_A^*$ .

Sei  $\varrho_A$  der von der Fluchtlinie  $T_A^*$  definierte Winkel der Tangentialebene Zeichnungsebene, und sei  $\bar{\tau}_A^*$  eine zu dieser Tangentialebene parallele Ebene mit der sichtbaren kegeligen Fläche,  $(\Omega, C_A^*)$ , deren Spur auf der Zeichnungsebene auch  $\tau_A^*$  sein soll. Die Ebene  $\tau_A^*$  ist eindeutig bestimmt und durchschneidet die sichtbare kegelige Fläche  $(\Omega, C_A^*)$  nach einer Parabel  $\Gamma_A^*$ . Also:

**Satz 5.** *Einem jeden Punkt  $A_D$  der allgemeinen Geraden  $D$  entspricht in topologischer Wandlung  $(\Psi_A, \theta)$  eine Parabel  $\Gamma_A^*$  als ein Schnitt in der sichtbaren kegeligen Fläche  $(\Omega, C_A^*)$ .*

Die Überlegung, die uns zur Formulierung des Satzes 5 geführt hat, kann zur Formulierung einer anderen Schlußfolgerung führen, wenn wir anstatt der oben erwähnten Betrachtung der Ebene  $\bar{\tau}_A^*$  feststellen, daß die Perspektivstrahlen  $\Omega d^*$  und  $\Omega D_A^{**}$ , unter den Bedingungen des Satzes 2, durch die Fluchtlinie  $Q^*(A_S)$  zwei

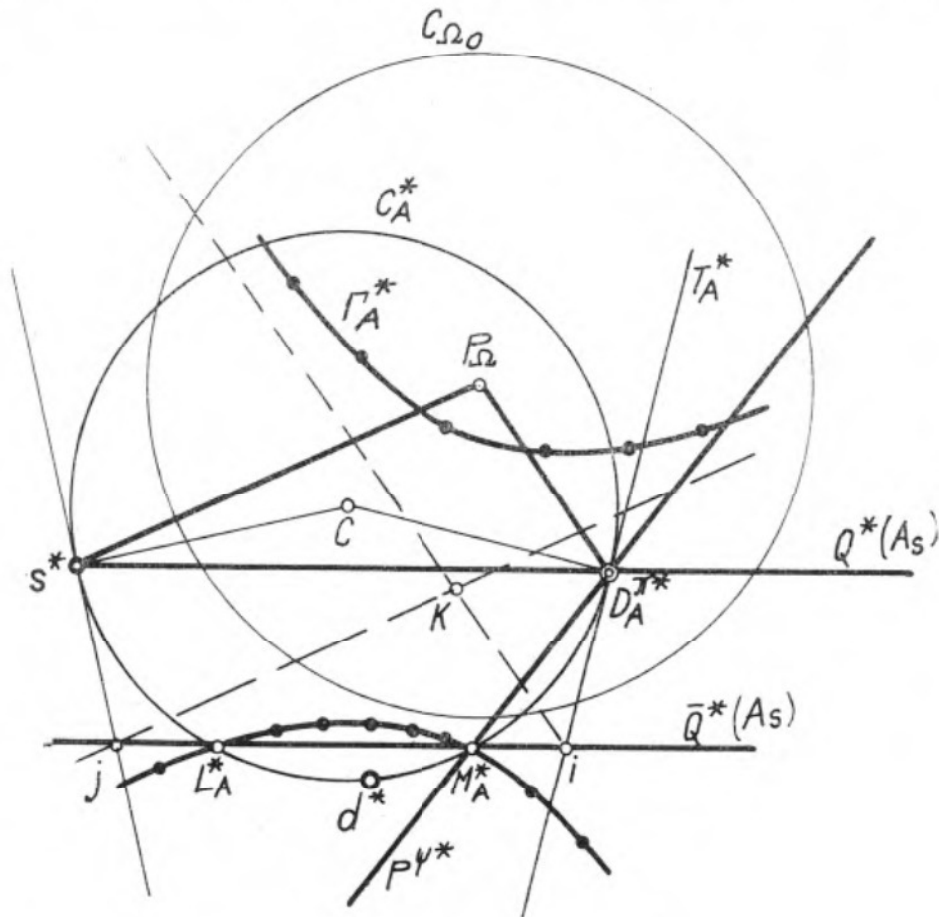


Fig. 3

in der sichtbaren kegeligen Fläche  $(\Omega, C_A^*)$  asymptotische Leitlinien definieren (Fig. 3).

Unter diesen Umständen sei  $\varepsilon_A$  der Winkel der Zeichnungsebene und der Ebene die Gesamtheit der Strahlen des linearen Komplexes des Mittelpunktes  $A_S$  und der Unterlage  $Q(A_S)$  enthält. Ziehen wir durch den Fluchtpunkt  $M_A^*$  die Ebene  $\bar{Q}^*(A_S)$  parallel zur radialen Ebene, die durch den Satz 2. definiert ist. Diese Ebene  $\bar{Q}^*(A_S)$  ist gleichfalls eindeutig bestimmt und durchschneidet die sichtbare kegelige Fläche  $(\Omega, C_A^*)$  in einer Hyperbel  $\Gamma_A^*$ . Folglich können wir sagen:

**Satz 6.** *Einem jeden Punkt  $A_D$  der allgemeinen Geraden  $D$  entspricht in topologischer Wandlung  $(\Psi_A, \theta)$  eine Hyperbel  $\Gamma_A^*$  als Schnitt in der sichtbaren kegeligen Fläche  $(\Omega, C_A^*)$ .*

### c) Die Verbindung mit der Methode der Paraspuren

Da die Methode der Paraspuren organisch an der Methode der Perspektivprojektion gebunden ist, werden wir natürlich eine Deutung auch aus diesen Gesichtspunkt für die in diesem Beitrag erörterten Dinge suchen [4]. Es behindert uns in diesem Sinn nichts im Gesichtspunkt  $\Omega$  den Mittelpunkt des Darstellungssystem der Methode der Paraspuren zu betrachten. In diesem Fall kann die Konstante des Darstellungssystems, die im allgemeinen im Verhältniß zum Mittelpunkt beliebig gewählt werden kann, eben die Hauptdistanz sein, so daß unter diesen Umständen der Riß der Paraspuren der geometrischen Elemente selbst die Perspektivtafel ist. Selbstverständlich werden die Paraspuren der beiden disjunkten Linearräume  $S$  und  $D$   $s^*$  bzw.  $d^*$  sein [5].

Die ersten vier oben festgestellten Sätze können in der neuen Auffassung auch folgendermassen formuliert werden:

**Satz 1'.** *Die Paraspur  $P^{\Psi^*}$  schließt die Paraspuren  $D_A^{\Pi}$  der Netzstrahlen  $G_A$  ein, durch die topologische Wandlung  $(\Psi_A, \theta)$  zwischen den disjunkten Linearräumen  $S$  und  $D$  festgestellt wird.*

**Satz 2'.** *Die Paraspur des besonderen linearen Mittelpunktkomplexes  $A_S$  und der Unterlage  $Q(A_S)$  ist  $Q^*(A_S)$ .*

**Satz 3'.** *Die Paraspur der kegeligen Flächen  $(A_S, C_A)$  ist der Kreis  $C_A^*$ .*

**Satz 4'.** *Im Kreis  $C_A^*$  ist die Paraspur  $P^{\Psi^*}$  eine Sekante die immer durch die Paraspur  $D_A^{\Pi^*}$  geführt wird.*

### Literatur

- [1] A. TĂNĂSESCU, Über eine spezielle Netzprojektion, *Bul. Inst. Politehnic București* (1968).
- [2] W. D. KLIX—A. TĂNĂSESCU, Eine spezielle hyperbolische Netzprojektion, *Wiss. Zeitschrift der TU Dresden* (1968).
- [3] R. BEREIS—W. D. KLIX, Parabolische Netzprojektion, *Wiss. Zeitschrift der TU Dresden* (1966).
- [4] A. TĂNĂSESCU, Die Methode der Paraspuren im Mongeschen Projektionssystem, *Bul. Inst. Politehnic, București* 19 (1957), ...
- [5] L. I. LALETIN, Ob odnom metode izobrajenie prostranstvennih obrazov na odnoi ploscosti 1949.

(Eingegangen am 28. Februar 1968.)