

# Zur Theorie der Lagrange-Funktionen

Von I. MAKAI (Debrecen)

## Einleitung

In der mathematischen Behandlung der allgemeinen Naturgesetze spielt eine wichtige Rolle die Theorie der Lagrangeschen (s. z. B. A. NIJENHUIS [17], S. 151., J. A. SCHOUTEN [24], S. 112.), oder Hamiltonschen (s. z. B. A. S. EDDINGTON [6], S. 206.) Ableitung der Lagrange-Funktionen, die über einem Gebiet  $G$  der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X_n$  (in Terminologie der Theorie der geometrischen Objekten, s. z. B. J. ACZÉL—ST. GOLĄB [1]) solche Differentialkomitanten endlicher Ordnung gewisser Grundobjektenfelder (z. B. eines affinen Zusammenhangs  $\Gamma_{jk}^{*i}$ , oder eines metrischen Fundamentaltensors  $g_{ij}$ , oder der Vereinigungsobjekten gewisser differentialgeometrischen Objekten) sind, wie die Weylschen Dichten vom Gewichte  $+1$  (oder, in Terminologie von J. A. SCHOUTEN [24] „scalar  $\Delta$ -densities of weight  $+1$ “) sein sollen. In der heutigen mathematischen Literatur können wir neue Ergebnisse finden, die sich auch auf die funktionale Gestalt der Lagrange-Funktionen beziehen (s. z. B. H. RUND [21], [22], [23], J. C. DU PLESSIS [19], [20]).

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Charakterisierung, möglichst die Bestimmung der funktionalen Gestalt der Lagrange-Funktion mit wenigstens Regularitätsannahmen in gewissen Spezialfällen. Wir werden z. B. ein neuer Beweis eines bekannten Satzes von E. NOETHER geben, der die Abhängigkeit der Lagrange-Funktion vom metrischen Fundamentaltensor ausdrückt (s. E. NOETHER [18], R. WEITZENBÖCK [27], A. S. EDDINGTON [6], H. RUND [22]). In den Bezeichnungen werden wir möglichst die Arbeiten von H. RUND ([21], [22], [23]) und J. C. DU PLESSIS ([19], [20]) folgen.

Es sei ein *differentialgeometrisches Objektenfeld*  $r$ -ter Klasse ( $r \geq 0$ , s. [1], S. 15—16.)

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(x^j) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

in einem Gebiet  $G$  der Mannigfaltigkeit  $X_n$  gegeben, wo  $x^j$  die lokalen Koordinaten der Punkten des Gebietes  $G$  bezeichnet. Nehmen wir an, daß die Funktionen  $\psi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) in  $G$  stetige partielle Ableitungen einschließend bis  $K$ -ter Ordnung besitzen, wo  $K$  eine natürliche Zahl ist. Wir bezeichnen diese Ableitungen mit

$$\psi_{\alpha, i_1 \dots i_k} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^k \psi_\alpha}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}, \quad (k = 1, \dots, K)$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß das Objekt  $\psi_\alpha$  bezüglich der zulässigen

Koordinatentransformationen wenigstens  $r + K$ -ter Regularitätsklasse

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x^j) \\ \left( \det \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) \neq 0; \quad B_{j_1 \dots j_p}^i &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^p x^i}{\partial \bar{x}^{j_1} \dots \partial \bar{x}^{j_p}}, \right. \\ \left. \bar{B}_{j_1 \dots j_p}^i &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial^p \bar{x}^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_p}}, \quad p = 1, 2, \dots, r + K \right) \end{aligned}$$

eine (bestimmte) Transformationsformel von der Gestalt

$$\bar{\psi}_\alpha = \bar{\psi}_\alpha(\bar{x}^i) = \Psi_\alpha(\psi_1, \dots, \psi_N, B_j^i, B_{j_1 j_2}^i, \dots, B_{j_1 \dots j_r}^i) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

hat. Wenn  $\Psi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) in allen ihren Veränderlichen stetige partielle Ableitungen bis  $K$ -ter Ordnung besitzt, so bietet das Funktionensystem

$$(2) \quad \{\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}\} \quad (1 \leq k \leq K)$$

wieder ein differentialgeometrisches Objekt (höchstens  $r + k$ -ter Klasse). Die Transformationsformel dieses Objektes kann allein mit Hilfe des Funktionensystems  $\bar{\psi}_\alpha$  bestimmt werden.

Es sei noch ein differentialgeometrisches Objekt erster Klasse  $\mathcal{L}_\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, L$ ) in  $G$  erklärt, so daß  $\mathcal{L}_\lambda$  eine (algebraische) *Komitante* (s. [1], S. 16.) des Objektes (2), d. h. eine *Differentialkomitante*  $k$ -ter Ordnung von  $\psi_\alpha$  (s. [1], S. 17.)

$$(3) \quad \mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k})$$

ist. Die Funktionen  $\Phi_\lambda$  sollen gegenüber den Koordinatentransformationen invariant sein, die Gleichung (3) soll also in jedem Koordinatensystem ( $\bar{x}^j$ ) bestehen

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Phi_\lambda(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots, \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}),$$

wo die Koordinaten  $\bar{x}^j$  mit der Koordinaten  $x^i$  nach (1) verknüpft sind. Schreibt man die Transformationsformel von  $\mathcal{L}_\lambda$  in der Form

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_L, B_j^i),$$

so folgen die Identitäten

$$(4) \quad \Phi_\lambda(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots, \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}), B_j^i),$$

die man als weitere Voraussetzung bezüglich der Transformationsformel von  $\mathcal{L}_\lambda$  auffassen kann.

Ist  $L = 1$  und hat die Funktion  $\Lambda = \Lambda_1$  die Gestalt

$$\Lambda(\mathcal{L}, B_j^i) = |\det(B_j^i)| \mathcal{L}$$

so werden wir das Objekt  $\mathcal{L}$  *Lagrange-Funktion*  $k$ -ter Ordnung bezüglich des Objektes  $\psi_\alpha$  nennen. (Eine Lagrange-Funktion soll daher eine Weylsche Dichte vom Gewichte  $+1$  sein.) Die Identität (4) lautet in diesem Fall

$$(5) \quad \Phi(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots, \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}) = |\det(B_j^i)| \Phi(\psi_\alpha; \dots, \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}).$$

Wir bemerken, daß sich die soeben gegebene Definition der Lagrange-Funktion von der von H. RUND ([22], S. 243—245.) herrührenden Definition der Lagrange-

Funktion in gewissen Einzelheiten unterscheidet. Wir setzen keine Regularitätsannahme bezüglich der funktionalen Gestalt der Lagrange-Funktion voraus, dagegen ist die Unabhängigkeit der Lagrange-Funktion von den Koordinaten  $x^i$  als getrennten Variablen erfordert (s. die Bemerkungen z. B. am Ende der Paragraphen 1. und 2. dieser Arbeit).

Mit Rücksicht darauf, daß die Identität (5) in einem beliebigen fixen Punkt  $x_0^i$  von  $G$  in eine Identität von der Form

$$(6) \quad \Phi(\bar{\psi}_x; \bar{\psi}_{x,i_1}; \dots \bar{\psi}_{x,i_1 \dots i_k}) = |\det(B_j^i)| \Phi(\psi_x; \dots \psi_{x,i_1 \dots i_k}) \quad (x^i = x_0^i)$$

übergeht, die als Funktionalgleichung bezüglich der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L} = \Phi$  mit freien Parametern  $B_j^i$  ( $\det(B_j^i) \neq 0$ ),  $B_{j_1 j_2}^i, \dots, B_{j_1 \dots j_{r+k}}^i$  aufgefaßt werden kann, können wir die Methoden der Theorie der Funktionalgleichungen zur Untersuchung der Lagrange-Funktion jeweils verwenden.

### § 1. Lagrange-Funktionen über $X_1$

Es seien  $u = u(x)$ ,  $u_x = u_x(x)$  kovariante,  $v = v(x)$ ,  $v_x = v_x(x)$  kontravariante Vektorfelder ( $\alpha = 1, \dots, N$ ), so daß die Funktionen  $u(x)$ ,  $u_x(x)$ ,  $v(x)$ ,  $v_x(x)$  über  $X_1$   $k$ -mal differenzierbar sind. Wir bezeichnen die Ableitungen von  $u(x)$ ,  $u_x(x)$ ,  $v(x)$ ,  $v_x(x)$  mit

$$\begin{aligned} u', u'', \dots u^{(k)}, u'_x, u''_x, \dots u_x^{(k)}, \\ v', v'', \dots v^{(k)}, v'_x, v''_x, \dots v_x^{(k)}. \end{aligned}$$

Wir werden in diesem Paragraphen solche Lagrange-Funktionen untersuchen, die die Gestalt

$$\begin{aligned} L &= L_1(u, u', \dots u^{(k)}), \\ L &= L_2(v, v', \dots v^{(k)}), \\ L &= L_3(u, u', \dots u^{(k)}, v, v', \dots v^{(k)}), \\ L &= L_4(u, u', \dots u^{(k)}, u_x, u'_x, \dots u_x^{(k)}), \\ L &= L_5(v, v', \dots v^{(k)}, v_x, v'_x, \dots v_x^{(k)}) \end{aligned}$$

haben. Die Nachstehenden bieten die Verallgemeinerungen der Ergebnisse von G. KNAPEČZ ([8]) und des Verfassers ([13]).

Mit Anwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \beta_i &\stackrel{\text{df}}{=} B_{\underbrace{1 \dots 1}_{i\text{-mal}}}^1 = \frac{d^i x}{d\bar{x}^i}, & \bar{\beta}_i &\stackrel{\text{df}}{=} \bar{B}_{\underbrace{1 \dots 1}_{i\text{-mal}}}^1 = \frac{d^i \bar{x}}{dx^i}, \\ \bar{u}^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{u}}{d\bar{x}^j}, & \bar{u}_x^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{u}_x}{d\bar{x}^j}, \\ \bar{v}^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{v}}{d\bar{x}^j}, & \bar{v}_x^{(j)} &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{v}_x}{d\bar{x}^j}, \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, k+1, j = 0, 1, 2, \dots, k)$$

beweisen wir vor allem zwei Hilfssätze.

**Hilfssatz 1.** *Es gelten die Relationen*

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= \beta_1 u, \\ \begin{cases} \bar{u}' &= \beta_2 u + \beta_1^2 u', \\ \bar{u}'' &= \beta_3 u + 3\beta_1 \beta_2 u' + \beta_1^3 u'', \\ \bar{u}''' &= \beta_4 u + 4\beta_1 \beta_3 u' + (3\beta_2^2 u' + 6\beta_1^2 \beta_2 u'') + \beta_1^4 u''', \end{cases} \end{aligned}$$

und für jedes  $i$  ( $2 \leq i \leq k$ )

$$(8) \quad \bar{u}^{(i)} = \beta_{i+1} u + (i+1) \beta_1 \beta_i u' + \sum_{p=1}^{i-1} P_p^i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p+1}) u^{(i-p)} + \beta_1^{i+1} u^{(i)},$$

wo  $P_p^i$  homogene Polynome von  $\beta_2, \dots, \beta_{p+1}$  sind.

**BEWEIS.** (7) kann man durch Differenzieren verifizieren. Wir durchführen den Beweis durch Induktion. Nach (7) ist (8) für  $i=2$  gültig. Vorausgesetzt, daß die Gleichung (8) für ein  $i$  schon gültig ist, derivieren wir (8) bezüglich  $x$ :

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{u}^{(i+1)} = \beta_{i+2} u + (i+2) \beta_1 \beta_{i+1} u' + (i+1) \beta_2 \beta_i u' + (i+1) \beta_1^2 \beta_i u'' + \\ + \sum_{p=1}^{i-1} \left( \sum_{q=1}^{p+1} \frac{\partial P_p^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} u^{(i-p)} + \beta_1 P_p^i u^{(i+1-p)} \right) + (i+1) \beta_1^i \beta_2 u^{(i)} + \beta_1^{i+2} u^{(i+1)}, \end{cases}$$

und wir sehen, daß (9) mit den Bezeichnungen

$$(10) \quad \begin{cases} P_1^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} (i+1) \beta_1 \beta_2 + \beta_1 P_1^i, \\ P_r^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \beta_1 P_r^i + \sum_{q=1}^r \frac{\partial P_{r-1}^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} \quad (1 < r < i), \\ P_i^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} (i+1) \beta_2 \beta_i + \sum_{q=1}^i \frac{\partial P_{i-1}^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} \end{cases}$$

ein Formel von der Gestalt (8) ist, womit der Induktionsbeweis beendet ist.

**Hilfssatz 2.** *Es gelten die Relationen:*

$$(11) \quad \begin{aligned} v &= \beta_1 \bar{v}, \\ v' &= \bar{\beta}_1 \beta_2 \bar{v} + \bar{v}', \\ v'' &= \bar{\beta}_1^2 \beta_3 \bar{v} + \bar{\beta}_2 \beta_2 \bar{v} + \bar{\beta}_1^2 \beta_2 \bar{v}' + \beta_1 \bar{v}'', \\ v''' &= \bar{\beta}_1^3 \beta_4 \bar{v} + (3\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \beta_3 + \beta_2 \bar{\beta}_3) \bar{v} + (3\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \beta_2 + 2\bar{\beta}_1^3 \beta_3) \bar{v}' + (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1^3 \beta_2) \bar{v}'' + \bar{\beta}_1^2 \bar{v}''' \end{aligned}$$

und für jedes  $i$  ( $2 \leq i \leq k$ ) gilt

$$(12) \quad v^{(i)} = \bar{\beta}_1^i \beta_{i+1} \bar{v} + \sum_{p=1}^i Q_p^i(\bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_{p+1}, \bar{\beta}_{p+1}) \bar{v}^{(i-p)} + \bar{\beta}_1^{i-1} \bar{v}^{(i)},$$

wo  $Q_p^i$  homogene Polynome von  $\beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_{p+1}, \bar{\beta}_{p+1}$  sind.

BEWEIS. Dies ist dem Beweis des Hilfssatzes 1 analog, wenn wir (8) bezüglich  $x$  derivieren. (Der Formel (9), bzw. (10) entspricht die Formel

$$\begin{aligned} v^{(i+1)} &= \bar{\beta}_1^{i+1} \beta_{i+2} \bar{v} + i \bar{\beta}_1^{i-1} \bar{\beta}_2 \beta_{i+1} \bar{v} + \bar{\beta}_1^{i+1} \beta_{i+1} \bar{v}' + \\ &+ \sum_{p=1}^i \left[ \bar{v}^{(i+1-p)} \bar{\beta}_1 Q_p^i + \bar{v}^{(i-p)} \sum_{q=2}^{p+1} \left( \frac{\partial Q_p^i}{\partial \beta_q} \bar{\beta}_1 \beta_{q+1} + \frac{\partial Q_p^i}{\partial \bar{\beta}_q} \bar{\beta}_{q+1} \right) + \bar{v}^{(i-p)} \frac{\partial Q_p^i}{\partial \bar{\beta}_1} \bar{\beta}_2 \right] + \\ &+ (i-1) \bar{\beta}_1^{i-2} \bar{\beta}_2 \bar{v}^{(i)} + \bar{\beta}_1^i \bar{v}^{(i+1)} \end{aligned}$$

bzw.

$$Q_1^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \bar{\beta}_1 Q_1^i + (i-1) \bar{\beta}_1^{i-2} \bar{\beta}_2,$$

$$Q_r^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \delta_{ri} \bar{\beta}_1^{i+1} \beta_{i+1} + \bar{\beta}_1 Q_r^i + \sum_{q=2}^r \left( \frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial \beta_q} \bar{\beta}_1 \beta_{q+1} + \frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial \bar{\beta}_q} \bar{\beta}_{q+1} \right) + \frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial \bar{\beta}_1} \bar{\beta}_2$$

( $1 < r < i+1$ ),

$$Q_{i+1}^{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} i \bar{\beta}_1^{i-1} \bar{\beta}_2 \beta_{i+1} + \sum_{q=2}^{i+1} \left( \frac{\partial Q_i^i}{\partial \beta_q} \bar{\beta}_1 \beta_{q+1} + \frac{\partial Q_i^i}{\partial \bar{\beta}_q} \bar{\beta}_{q+1} \right) + \frac{\partial Q_i^i}{\partial \bar{\beta}_1} \bar{\beta}_2.$$

Wir beweisen nachher den folgenden

**Satz 1.** Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion

$$L = L_1(u, u', \dots, u^{(k)}) \quad (u \neq 0)$$

bzw.

$$L = L_2(v, v' \dots v^{(k)}) \quad (v \neq 0)$$

ist

$$L_1 = c_1 |u|$$

bzw.

$$L_2 = c_2 |v|^{-1},$$

wo  $c_1$  und  $c_2$  beliebige konstante Skalarenfaktoren sind.

BEWEIS. Die Gleichheit (6) geht in diesen Fällen in

$$(13.1) \quad L_1(\bar{u}, \bar{u}', \bar{u}'', \dots, \bar{u}^{(k)}) = |\beta_1| L_1(u, u', u'', \dots, u^{(k)})$$

bzw.

$$(13.2) \quad L_2(\bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'', \dots, \bar{v}^{(k)}) = |\beta_1| L_2(v, v', v'', \dots, v^{(k)})$$

über. Es seien hier die Parameter  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$  nach

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

gewählt, somit gelten

$$\bar{\beta}_1 = 1, \quad \bar{\beta}_2 = \dots = \bar{\beta}_k = 0, \quad \bar{\beta}_{k+1} = -\beta_{k+1}$$

(vgl. [1], S. 26., Korollar 3), und wir erhalten wegen (7) und (8), bzw. (11) und (12) die Gleichungen

$$(14.1) \quad L_1(u, u', \dots, u^{(k-1)}, u^{(k)} + \beta_{k+1} u) = L_1(u, u', \dots, u^{(k)})$$

bzw.

$$(14.2) \quad L_2(v, v', \dots, v^{(k-1)}, v^{(k)} - \beta_{k+1} v) = L_2(v, v', \dots, v^{(k)}).$$

Setzen wir jetzt in (14. 1)

$$\beta_{k+1} = -\frac{u^{(k)}}{u}$$

bzw. in (14. 2)

$$\beta_{k+1} = \frac{v^{(k)}}{v},$$

so folgt

$$(14.3) \quad L_1(u, u', \dots u^{(k-1)}, 0) = L_1(u, u', \dots u^{(k-1)}, u^{(k)})$$

bzw.

$$(14.4) \quad L_2(v, v', \dots v^{(k-1)}, 0) = L_2(v, v', \dots v^{(k-1)}, v^{(k)}),$$

d. h. die Funktion  $L_1$  bzw.  $L_2$  ist von ihren Veränderlichen  $u^{(k)}$  bzw.  $v^{(k)}$  unabhängig ( $k \geq 1$ ). Nach  $k$ -maliger Wiederholung des Verfahrens, das aus (14. 1) bzw. (14. 2) zu (14. 3) bzw. zu (14. 4) geführt hat, können wir feststellen, daß  $L_1$  bzw.  $L_2$  allein von  $u$  bzw.  $v$  abhängt:

$$L_1 = L_1(u)$$

bzw.

$$L_2 = L_2(v).$$

Setzen wir diese Gestalt der Lagrange-Funktionen in (13. 1) bzw. (13. 2) ein, so bekommen wir

$$L_1(\beta_1 u) = |\beta_1| L_1(u)$$

bzw.

$$L_2(\beta_1^{-1} v) = |\beta_1| L_2(v),$$

und es folgt hieraus mit  $\beta_1 = u^{-1}$  bzw.  $\beta_1 = v$

$$(15.1) \quad L_1(u) = c_1 |u|, \quad (c_1 \stackrel{\text{df}}{=} L_1(1))$$

bzw.

$$(15.2) \quad L_2(v) = c_2 |v|^{-1}, \quad (c_2 \stackrel{\text{df}}{=} L_2(1)).$$

Mann kann sich leicht überzeugen, daß die Lagrange-Funktion (15. 1) bzw. (15. 2) mit beliebigem Skalarenfaktor  $c_1$  bzw.  $c_2$  der Forderung (13. 1) bzw. (13. 2) genügt.

Für die Struktur der Funktion  $L_3$  gilt der folgende

**Satz 2.** Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion

$$L = L_3(u, u', \dots u^{(k)}, v, v', \dots v^{(k)}) \quad (v \neq 0)$$

ist

$$L_3 = L_3^0(u, u_1, u_2, \dots u_k, v),$$

wo

$$u_1 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx}(vu), \quad u_{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx}(vu_i) \quad (i = 1, 2, \dots k-1)$$

*kovariante Vektorfelder sind, und die Funktion  $L_3^0$  soll in ihren Veränderlichen im folgenden Sinne homogen sein:*

$$(16) \quad L_3^0(tu, tu_1, tu_2, \dots, tu_k, t^{-1}v) = |t| L_3^0(u, u_1, u_2, \dots, u_k, v)$$

(wo  $t \neq 0$ , sonst aber  $t$  ein beliebiger Skalar ist).

BEWEIS. Die Funktion  $L_3$  soll nach (6) der Funktionalgleichung

$$(17) \quad L_3(\bar{u}, \bar{u}', \dots, \bar{u}^{(k)}, \bar{v}, \bar{v}', \dots, \bar{v}^{(k)}) = |\beta_1| L_3(u, \dots, u^{(k)}, v, \dots, v^{(k)})$$

genügen, woraus man durch die Substitution

$$\beta_1 = 1, \beta_3 = \dots = \beta_k = \beta_{k+1} = 0,$$

d. h.

$$\bar{\beta}_1 = 1, \bar{\beta}_3 = \dots = \bar{\beta}_k = \bar{\beta}_{k+1} = 0$$

(vgl. [1], S. 26., Korollar 3) wegen der Hilfssätze 1 und 2 die Identität

$$L_3(u, u' + \beta_2 u, u'' + 3\beta_2 u', \dots, v, v' - \beta_2 v, v'' - \beta_2 v' + 2\beta_2^2 v, \dots) = L_3(u, u', \dots, v, v', \dots)$$

(18)

erhalten kann. Es sei in (18)

$$(19) \quad \beta_2 = \frac{v'}{v},$$

so folgen

$$u' + \beta_2 u = \frac{1}{v} u_1,$$

$$v' - \beta_2 v = 0,$$

bzw. (wegen

$$(20) \quad u' = \frac{1}{v} (u_1 - uv') \equiv \varphi_1(u, u_1, v, v'),$$

wo  $\varphi_1$  Polynom von  $u, u_1, \frac{1}{v}, v'$  ist) bezüglich  $u'', \dots, u^{(k)}$  die folgenden Ausdrücke

$$(21) \quad \begin{cases} u'' = \varphi_2(u, u_1, u_1', v, v', v'') \\ \vdots \\ u^{(k)} = \varphi_k(u, u_1, u_1', \dots, u_1^{(k-1)}, v, v', \dots, v^{(k)}) \end{cases}$$

(wo  $\varphi_2, \dots, \varphi_k$  wieder Polynome von  $u, u_1, \dots, u_1^{(k-1)}, \frac{1}{v}, v', \dots, v^{(k)}$  sind). Wir bekommen aus (18) (wegen (20) und (21)) eine Identität vom Typ

$$L_3 = L_3^*(u, u_1, u_1', \dots, u_1^{(k-1)}, v, v', \dots, v^{(k-1)}, v^{(k)}).$$

Setzen wir diese Form von  $L_3$  in (17) ein und wählen wir die Parameter  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$  nach

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \dots = \beta_k = 0, \beta_{k+1} = \frac{v^{(k)}}{v},$$

so kann man sehen, daß die Funktion  $L_3^*$  von ihrer separierten Veränderliche  $v^{(k)}$  unabhängig ist:

$$L_3 = L_3^1(u, u_1, u_1', \dots, u_1^{(k-1)}, v, v', \dots, v^{(k-1)}).$$

Mit Wiederholen unseres obigen Verfahrens gewinnen wir schrittweise die folgenden Ausdrücke bezüglich  $L_3$ :

$$L_3 = L_3^{1*}(u, u_1, u_2, u_2', \dots, u_2^{(k-2)}, v, v', \dots, v^{(k-1)}),$$

$$L_3 = L_3^{2*}(u, u_1, u_2, u_2', \dots, u_2^{(k-2)}, v, v', \dots, v^{(k-2)});$$

$$\vdots$$

$$L_3 = L_3^{(k-1)*}(u, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k, v, v'),$$

$$L_3 = L_3^0(u, u_1, u_2, \dots, u_k, v).$$

Wenn wir diese letzte Form von  $L_3$  in (17) einsetzen und wir den Parameter  $\beta_1$  nach

$$t \stackrel{\text{df}}{=} \beta_1 \quad (\neq 0, \text{sonst ein beliebiger Wert})$$

bezeichnen, so bekommen wir die Identität (16) als einzige Forderung bezüglich der Funktion  $L_3^0$ , w. z. b. w.

Auf analoge Weise können wir die folgenden Sätze beweisen:

**Satz 3.** Die Lagrange-Funktion

$$L = L_4(u, u', \dots, u^{(k)}, u_x, u_x', \dots, u_x^{(k)})$$

ist, falls  $u \neq 0$ , eine invariante Funktion der folgenden Größen

$$u, u_x, \dots, u_k, \sigma_x, \sigma_x', \dots, \sigma_k,$$

wo

$$\sigma_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{u_x}{u}, \quad u_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sigma_x,$$

$$\sigma_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{u_x}{u}, \quad u_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sigma_x \quad (i=1, \dots, k-1)$$

ist ( $u, u_x, \dots, u_k$  sind kovariante Vektorfelder,  $\sigma_x, \dots, \sigma_k$  sind Skalarfelder).

**Satz 4.** Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion  $L_5$  ist im Fall  $v \neq 0$ :

$$L_5 = L_5^0(v, v_x, v_x', \dots, v_k, \sum_x, \sum_x', \dots, \sum_k),$$

wo

$$\sum_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{v_x}{v}, \quad v_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sum_x,$$

$$\sum_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{v_x}{v}, \quad v_x \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sum_x \quad (i=1, \dots, k-1)$$

ist ( $v_x, \dots, v_k$  sind kontravariante Vektorfelder,  $\sum_x, \dots, \sum_k$  sind Skalarfelder),



und  $L_5^0$  ist eine beliebige, in ihren Veränderlichen  $v, v_x, v_{1x}, \dots, v_{kx}$  im folgenden Sinne homogene Funktion:

$$L_5^0(tv, tv_x, tv_{1x}, \dots, tv_{kx}, \sum_1 \dots \sum_k) = |t| L_5^0(v, v_x, \dots, \sum_k)$$

( $t$  ist ein beliebiger, von Null verschiedener Skalar).

Wir beweisen hier nur den Satz 3, der Beweis des Satzes 4 kann man ähnlicherweise durchführen.

Die Funktion  $L_4$  soll (nach (6)) die Gleichung

$$(22) \quad L_4(\bar{u}, \bar{u}', \dots, \bar{u}^{(k)}, \bar{u}_x, \bar{u}'_x, \dots, \bar{u}_x^{(k)}) = |\beta_1| L_4(u, u', \dots, u_x^{(k)})$$

befriedigen. Setzen wir hier

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -\frac{u'}{u}, \quad \beta_3 = \dots = \beta_{k+1} = 0$$

ein, so erhalten wir an der linken Seite von (22) wegen

$$u_x = u \sigma_x, \quad u'_x = u' \sigma_x + u \sigma'_x, \dots, u_x^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u^{(i)} \sigma_x^{(k-i)}$$

einen Ausdruck, der nur von  $u, u', \dots, u^{(k)}, \sigma_x, u_x, u'_x, \dots, u_x^{(k-1)}$  abhängt:

$$L_4 = L_4^{1*}(u, u' \dots u^{(k)}, \sigma_x, u_x, u'_x, \dots, u_x^{(k-1)}).$$

Es sei jetzt  $L_4^{1*}$  in (22) eingesetzt, und es seien danach in (22) die Parameter  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}$  nach

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \dots = \beta_k = 0, \quad \beta_{k+1} = -\frac{u^{(k)}}{u}$$

gewählt, so kann man sehen, daß  $L_4$  von  $u^{(k)}$  unabhängig ist:

$$L_4 = L_4^1(u, u', \dots, u^{(k-1)}, \sigma_x, u_x, u'_x, \dots, u_x^{(k-1)}).$$

Nach  $k-1$ -maligen Wiederholung dieses Verfahrens bekommen wir

$$L_4 = L_4^0(u, u_x, u_{2x}, \dots, u_{kx}, \sigma_x, \sigma_{2x}, \dots, \sigma_{kx}).$$

Die Funktion  $L_4^0$  soll wieder der Gleichung (22) genügen:

$$L_4^0(\beta_1 u, \beta_1 u_x, \beta_1 u_{2x}, \sigma_x, \dots, \sigma_{kx}) = |\beta_1| L_4^0(u, u_x, \dots, \sigma_{kx}),$$

wo man den Wert  $t = \beta_1 (\neq 0)$  beliebig wählen kann. Die Funktion  $L_4^0$  ist folglich in ihren Veränderlichen  $u, u_x, \dots, u_{kx}$  im folgenden Sinne homogen:

$$(23) \quad L_4^0(tu, tu_x, \dots, tu_{kx}, \sigma_x, \dots, \sigma_{kx}) = |t| L_4^0(u, \dots, \sigma_{kx})$$

( $t \neq 0$ ). Umgekehrt, man kann einsehen, daß eine beliebig gewählte, im Sinne (23) homogene Funktion der Größen  $u, u_x, \dots, u_x, \sigma_x, \dots, \sigma_x$  eine Lösung der Funktionalgleichung (22) ist.

Bemerkungen.

H. RUND hat in seiner Arbeit [22] (S. 245) die Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L_6(x, s_m, s'_m, s''_m)$$

als Beispiel untersucht, wo  $s_m = s_m(x)$  ( $m = 1, \dots, N$ ) Skalaren sind. Mit Hilfe der „Invarianzbedingung“

$$(24) \quad L_6(\bar{x}, \bar{s}_m, \bar{s}'_m, \bar{s}''_m) = |\beta_1| L_6(x, s_m, s'_m, s''_m)$$

(vgl. [22], (1. 6)) können wir zuerst einsehen, daß die Funktion  $L_6$  von ihrer Veränderliche  $x$  unabhängig ist. (Wir wählen aus diesem Zwecke die Koordinatentransformation  $\bar{x} = \bar{x}(x)$  nach

$$\bar{x} = x + \xi,$$

wo  $\xi$  ein beliebiger Wert ist, somit bekommen wir aus (24) wegen  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$  die Beziehung

$$L_6(x + \xi, s_m, s'_m, s''_m) = L_6(x, s_m, s'_m, s''_m),$$

die zeigt, daß  $L_6$  von ihrer Veränderliche  $x$  tatsächlich unabhängig ist.) Die Größen  $s'_m$  sind kovariante Vektorfelder

$$u_m \stackrel{\text{df}}{=} s'_m \quad (m = 1, \dots, N)$$

und  $L_6$  besitzt die Form

$$L_6 = L_6(s_m, u_m, u'_m).$$

Es ist klar, daß unser Satz 3 auch im Falle gültig ist, in dem die Funktion  $L_4$  auch von weiteren Skalarfelder  $S_m$  abhängt (das entsprechende Resultat wäre

$$L_4 = L_4^0(u, u_x, \dots, u_x, \sigma_x, \dots, \sigma_x, s_m),$$

wo die Funktion  $L_4^0$  in ihren Veränderlichen  $u, u_x, \dots, u_x$  im Sinne (23) homogen ist), folglich kann  $L_6$  z. B. falls  $u_1 \neq 0$  die allgemeinste Gestalt

$$L_6 = L_6^0(s_m, u_1, u_\gamma, u_{1\gamma}, \sigma_\gamma) \quad \left( \sigma_\gamma \stackrel{\text{df}}{=} (u_1)^{-1} u_\gamma, u_\gamma \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dx} \sigma_\gamma, \gamma = 2, \dots, N \right)$$

mit der Homogenitätsbedingung

$$L_6(s_m, tu_1, tu_\gamma, tu_{1\gamma}, \sigma_\gamma) = |t| L_6(s_m, u_1, \dots, \sigma_\gamma) \quad (t \neq 0)$$

besitzen.

## § 2. Über Lagrange-Funktionen, die Komitanten kovarianter Vektorfelder in $X_n$ sind

Es sei ein System von kovarianten Vektorfeldern  $\overset{\alpha}{u}_i$  ( $\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$ ) mit seinen partiellen Ableitungen  $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$  über einem Gebiet  $G (\subseteq X_n, n > 1)$  erklärt und wir stellen uns zuerst die Aufgabe aus diesem System von kovarianten Vektorfeldern eine Differentialkomitante erster Ordnung  $\mathcal{L}_\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, N$ ) aufzubauen. Es ist also  $\mathcal{L}_\lambda$  von der Form:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{u}_{i,j}), \quad (\lambda = 1, \dots, N)$$

und da  $\mathcal{L}_\lambda$  ein Objekt erster Klasse ist, besteht:

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i).$$

Wir werden im folgenden  $\Lambda_\lambda$  als gegebenes,  $\Phi_\lambda$  als gesuchtes Funktionensystem betrachten. Das System  $\Phi_\lambda$  soll nach (4) in einem beliebigen fixen Punkt  $x_i^0 (\in G)$  der Funktionalgleichung

$$(25) \quad \Phi_\lambda(B_k^i \overset{\alpha}{u}_k, B_k^i B_j^m \overset{\alpha}{u}_{k,m} + B_{ij}^k \overset{\alpha}{u}_k) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{u}_{i,j}); B_j^i)$$

genügen. Natürlich sollen die Funktionen  $\Lambda_\lambda$  unter anderen auch die *Identitätsbedingung* (vgl. [1], S. 12.)

$$(26) \quad \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu; \delta_j^i) = \mathcal{L}_\lambda$$

befriedigen, wo  $\delta_j^i$  das Kronecker-Symbol ist.

Setzen wir noch die lineare Unabhängigkeit der Vektorfelder  $\overset{\alpha}{u}_i$  über  $G$  (d. h. die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $\overset{\alpha}{u}_i(\xi_0)$  in jedem einzelnen Punkt  $\xi_0$  von  $G$ ) voraus.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\overset{\beta}{T}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\beta}{u}_{[i,j]}, \quad \overset{\beta}{t}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\beta}{u}_{(i,j)}$$

ein und wir stellen fest, daß  $\overset{\beta}{T}_{ij}$  ein rein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist, bzw. für  $\overset{\beta}{t}_{ij}$  die Relationen

$$(27) \quad \overset{\beta}{t}_{ij} = B_i^k B_j^m \overset{\beta}{t}_{km} + B_{ij}^m \overset{\beta}{u}_m$$

gelten.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir den folgenden Satz beweisen:

**Satz 5.** Alle Objekte  $\mathcal{L}_\lambda$  erster Klasse, die Differentialkomitanten erster Ordnung des Systems von linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern  $\overset{\alpha}{u}_i$  ( $\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$ ) sind, müssen algebraische Komitanten der Vektorfelder  $\overset{\alpha}{u}_i$  und der nach

$$\overset{\beta}{T}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}$$

definierten Tensorfelder sein.

BEWEIS. Es folgt aus den Relationen

$$\overset{\alpha}{u}_{i,j} = \overset{\alpha}{T}_{ij} + \overset{\alpha}{t}_{ij}; \quad \overset{\alpha}{T}_{ij} = \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}, \quad \overset{\alpha}{t}_{ij} = \overset{\alpha}{u}_{(i,j)},$$

daß wir die Größen  $\overset{\alpha}{T}_{ij}$ ,  $\overset{\alpha}{t}_{ij}$  in dem Funktionensystem  $\Phi_\lambda$  statt  $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$  als neue Veränderlichen auffassen können:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij})$$

und das Funktionalgleichungssystem (25) geht wegen (27) in

$$(28) \quad \Phi_\lambda(B_i^k \overset{\alpha}{u}_k; B_i^k B_j^m \overset{\alpha}{T}_{km}; B_i^k B_j^m \overset{\alpha}{t}_{km} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}); B_j^i)$$

über. Setzen wir in (28) die Werte

$$B_j^i = \delta_j^i$$

ein, so folgt aus (28) wegen (26) die Identität

$$(29) \quad \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m) = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}),$$

wo  $B_{ij}^m = B_{ji}^m$  beliebig gewählt werden kann.\*)

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $\overset{\alpha}{u}_i = \overset{\alpha}{u}_i(x_0)$ , hat das algebraische Gleichungssystem

$$\overset{\alpha}{t}_{ij} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m = 0$$

bei jedem festen Wertepaar  $i, j$  bezüglich der „Unbekannten“  $B_{ij}^m$  mindestens eine Lösung:

$$(30) \quad B_{ij}^m = \overset{\circ}{B}_{ij}^m,$$

Setzen wir diese Werte von  $B_{ij}^m$  in (29) ein, so bekommen wir die Identität

$$(30.1) \quad \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; 0) = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}),$$

die eben den Satz 5 beweist.

Im speziellen erhielten wir auch den

**Satz 6.** Jede Lagrange-Funktion von der Gestalt

$$L = L(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j})$$

ist eine algebraische Komitante der Größen  $\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}$  ( $\alpha = 1, \dots, p$ ,  $\overset{\alpha}{u}_i$  sind linear unabhängige Vektorfelder).

\*) Der hier folgende Beweis des Satzes 5 stammt von Herrn A. MOÓR; der ursprüngliche Beweis des Verfassers war wesentlich komplizierter.

Nimmt man an, daß die Vektorfelder  $\overset{\alpha}{u}_i$  ( $\alpha = 1, \dots, p$ ) mit Hilfe eines Systems von Skalarfelder  $\overset{\alpha}{\sigma}$  als

$$\overset{\alpha}{u}_i \stackrel{\text{df}}{=} \overset{\alpha}{\sigma}_{,i} \quad (\alpha = 1, \dots, p, i = 1, \dots, n, p \leq n)$$

erklärt sind, vorausgesetzt, daß die Funktionen  $\overset{\alpha}{\sigma} = \overset{\alpha}{\sigma}(x)$  über  $G$  stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben, so folgen aus dieser letzten Voraussetzung die Identitäten

$$\overset{\alpha}{u}_{[i,j]} = 0,$$

und die Sätze 5, 6 lauten in diesem Fall folgendermaßen:

**Satz 7.** Alle Differentialkomitanten  $\mathcal{L}_\lambda$  zweiter Ordnung der über  $G$  zweimal stetig-differenzierbaren Skalarfelder  $\overset{\alpha}{\sigma}$  ( $\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$ ;  $\overset{1}{\sigma}_{,i}, \dots, \overset{p}{\sigma}_{,i}$  sind linear unabhängige Vektorfelder) sind algebraische Komitanten der Größen  $\overset{\alpha}{\sigma}, \overset{\alpha}{\sigma}_{,i}$ , vorausgesetzt, daß  $\mathcal{L}_\lambda$  ein Objekt erster Klasse (z. B. eine Lagrange-Funktion) ist.

Als Folgerung bekamen wir auch den folgenden Satz (bezüglich der Terminologie s. z. B. [22]):

**Satz 8.** Es gibt kein homogenes Variationsproblem zweiter Art, welches durch ein solches System von Skalarfelder  $\overset{\alpha}{\sigma}$  ( $\alpha = 1, \dots, p, p \leq n$ ) bestimmt ist, wo  $\overset{\alpha}{\sigma}_{,i}$  ( $\alpha = 1, \dots, p$ ) linear unabhängige Vektorfelder sind.

\* \* \*

Es sei von nun an die Gleichheit  $p = n$  vorausgesetzt.

Wir können in diesem Fall auf einfachere Weise (vgl. [12], Beweis des Satzes 1) zur Ergebnis gelangen. Wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ u_1 & \dots & u_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ n & \dots & n \\ u_1 & \dots & u_n \end{vmatrix} \neq 0$$

gibt es (in jedem Punkt von  $G$ ) ein kontravariantes  $n$ -Bein  $v^i_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ), das nach den Relationen

$$(31) \quad v^i_\alpha u_i = \delta^\beta_\alpha, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{\alpha=1}^n v^i_\alpha u_j = \delta^i_j$$

bestimmt ist, folglich existieren auch die partiellen Ableitungen  $v^i_{\alpha,j}$  über  $G$ . Die Ableitungen  $\overset{\alpha}{u}_{,j}$  und  $v^i_{\alpha,j}$  erfüllen die Relationen

$$(32) \quad \overset{\alpha}{u}_{k,m} = -\overset{\alpha}{u}_q v^q_{\beta,m} \overset{\beta}{u}_k,$$

die man aus (31) leicht herleiten kann. Wir bemerken, daß die Größen

$$(33) \quad \sum_{\alpha\beta}^{\gamma} \stackrel{\text{df}}{=} u_i^{\gamma} v_{[\alpha}^k v_{\beta]}^i{}_{,k}$$

die Rotationskoeffizienten von Ricci (s. [24], S. 171.), Skalaren sind.

Das Funktionalgleichungssystem (25) kann man nach den oben gesagten folgendermaßen auflösen. Setzen wir die Werte

$$B_j^i = v_j^i, \quad B_{ij}^q = v_{(i}^m v_{j),m}^q$$

in (25) ein, so bekommen wir wegen (31) und (32)

$$B_i^k u_k^z = \delta_i^z,$$

$$B_i^k B_j^m u_{k,m}^z + B_{ij}^q u_q^z = -v_i^k v_j^m u_q^z v_{\beta}^q u_k^{\beta} + u_q^z v_{(i}^m v_{j),m}^q = -u_q^z v_{[i}^m v_{j],m}^q = -\sum_{ij}^z,$$

dementsprechend geht (25) in

$$(34) \quad \Phi_{\lambda}^*(\sum_{ij}^z) = \Lambda_{\lambda}(\Phi_{\mu}(u_i^z, u_{i,j}^z); v_j^i)$$

$(\Phi_{\lambda}^*(\sum_{ij}^z) \stackrel{\text{df}}{=} \Phi_{\lambda}(\delta_i^z, -\sum_{ij}^z))$  über. Wir können die Funktionenwerte  $\Phi_{\lambda}$  aus (34) leicht ausdrücken. Die Transformationsformel

$$\bar{\mathcal{L}}_{\lambda} = \Lambda_{\lambda}(\mathcal{L}_{\mu}, B_j^i)$$

des Objektes  $\mathcal{L}_{\lambda}$  soll die Forderung

$$(35) \quad \Lambda_{\lambda}(\Lambda_{\mu}(\mathcal{L}_{\gamma}^0, X_j^i), Y_j^i) = \Lambda_{\lambda}(\mathcal{L}_{\mu}^0, X_k^i Y_j^k)$$

(die „fundamentale Funktionalgleichung“ der Transformationsformel, s. [1], S. 12.) für alle Werte  $\mathcal{L}_{\mu}^0$  des Objektes  $\mathcal{L}_{\mu}$  und für alle reguläre Matrizen  $(X_j^i), (Y_j^i)$  befriedigen. Es sei in (35)

$$\mathcal{L}_{\mu}^0 = \Phi_{\mu} = \Phi_{\mu}(u_i^z; u_{i,j}^z), \quad X_j^i = v_j^i, \quad Y_j^i = u_j^i$$

eingesetzt, so kann man (wegen (26) und (34)) die Gültigkeit der Identitäten

$$(36) \quad \Phi_{\lambda} = \Lambda_{\lambda}(\Phi_{\mu}^*(\sum_{ij}^z), u_j^i)$$

leicht einsehen.

Nehmen wir an, daß  $\Phi_{\mu}^*$  in (36) ein beliebig-gewähltes Funktionensystem der Rotationskoeffizienten  $\sum_{ij}^z$  ist; wir behaupten, daß (36) die allgemeinste Form der Lösungen des Funktionalgleichungssystems (25) darstellt. Die Größen

$$\sum_{\mu} \stackrel{\text{df}}{=} \Phi_{\mu}^*(\sum_{ij}^z)$$

sind nämlich Skalaren, folglich geht (25), falls

$$\Phi_{\lambda} = \Lambda_{\lambda}(\sum_{\mu}, u_j^i)$$

ist, in

$$\Lambda_{\lambda}(\sum_{\mu}, B_j^i u_k^i) = \Lambda_{\lambda}(\Lambda_{\mu}(\sum_v, u_j^i), B_j^i)$$

über, die wegen der Gleichung (35) eine Identität ist, w. z. b. w.

Die erhaltenen Resultate können wir im folgenden Satz formulieren.

**Satz 9.** Es sei ein System von linear-unabhängigen kovarianten Vektorfeldern  $\overset{\alpha}{u}_i$  ( $\alpha=1, \dots, n$ ) mit seinen partiellen Ableitungen  $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$  über einem Gebiet des Raumes  $X_n$  gegeben, und  $v^i$  bezeichne das zu  $\overset{\alpha}{u}_i$  adjungierte  $n$ -Bein. Die allgemeinste Form der Differentialkomitanten  $\mathcal{L}_\lambda$  erster Ordnung und erster Klasse der Felder  $\overset{\alpha}{u}_i$  ist

$$(36) \quad \mathcal{L}_\lambda = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^*(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}), \overset{i}{u}_j),$$

wo  $\Lambda_\lambda$  nach der Transformationsformel von  $\mathcal{L}_\lambda$

$$\overline{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

bestimmt ist, die Größen  $\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}$  die (nach (33) bestimmte) Rotationskoeffizienten des  $n$ -Beins  $\overset{\alpha}{u}_i$  sind und  $\Phi_\lambda^*$  sind beliebige Funktionen.

#### Bemerkungen

1. Wir haben in [14] die Differentialkomitanten erster Ordnung von zwei linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern charakterisiert, die Objekte erster Klasse sind. Der Satz 5 bietet eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Resultates.

2. Die Ergebnisse der Sätze 5 und 9 sind anscheinend unverträglich, wenn wir die Behauptung des Satzes 5 im Falle  $p=n$  beachten. In der Tat ist (36) (mit Vertauschung ihrer Seiten) im Fall  $p=n$  eine Relation der Form (30. 1), nämlich kann man die Beziehungen

$$\sum_{\beta\gamma} \overset{\alpha}{u}_{\beta\gamma} = v^k v^m \overset{\alpha}{u}_{[k,m]} = v^k v^m T_{km}^\alpha$$

aus (31), (32), (33) ableiten.

3. Mit den Voraussetzungen des Satzes 9 können wir feststellen, daß die Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}) \quad (\det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0)$$

die Form

$$L = |\det(\overset{\alpha}{u}_i)| \Phi^*(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij})$$

hat, wo  $\Phi^*$  eine willkürliche Funktion der Skalare  $\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}$  ist.

4. Die Formel (36) gibt auch die tensoriellen Differentialkomitanten erster Ordnung der Felder  $\overset{\alpha}{u}_i$  ( $\det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0$ ) in der Form

$$T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = C_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p}(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}) v_{a_1}^{i_1} \dots v_{a_p}^{i_p} u_{j_1}^{b_1} \dots u_{j_p}^{b_p}$$

wieder ( $C_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p}(\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij})$  bezeichnet ein beliebiges Funktionensystem der Skalare  $\sum_{ij} \overset{\alpha}{u}_{ij}$ ), somit können wir die Behauptung des Satzes 9 als eine Verallgemeinerung des Satzes 2 von [12] auffassen.

5. Der Satz 9 gibt eine Verallgemeinerung auch einiger der Ergebnisse von M. KUCHARZEWSKI ([9], [10], [11]) und A. ZAJTZ ([28], S. 43—45.), die sich auf algebraische Komitanten eines Systems von rein kovarianten, bzw. rein kontravarianten Vektoren beziehen (s. auch der folgende Satz 10).

Aus dem Satz 9 können wir die Gültigkeit des folgenden Satzes einsehen:

**Satz 10.** Es sei ein System von linear unabhängigen kontravarianten Vektorfeldern  $v^i$  ( $\alpha=1, \dots, n$ ) mit seinen partiellen Ableitungen  $v^i_{,j}$  über einem Gebiet des  $X_n$  gegeben, und  $\bar{u}_i$  bezeichne das zu  $v^i$  adjungierte  $n$ -Bein. Alle Differentialkomitanten  $\mathcal{L}_\lambda$  erster Ordnung der Felder  $v^i$  haben die Gestalt

$$\mathcal{L}_\lambda = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^*(\sum_{ij}^\alpha), u_j^i),$$

die Objekte erster Klasse sind

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i).$$

(Die Skalargrößen  $\sum_{ij}^\alpha$  — die Rotationskoeffizienten des  $n$ -Beines  $v^i$  — sind nach (33) bestimmt und  $\Phi_\lambda^*$  bezeichnen beliebig gewählte Funktionen von  $\sum_{ij}^\alpha$ ).

(Zu dem Beweis dieses Satzes ist es hinreichend zu beachten, daß die Felder  $v^i$  ein System von kovarianten Vektorfeldern  $\bar{u}_i$  nach (31) (wegen  $\det(v^i) \neq 0$ ) ein System von kovarianten Vektorfeldern  $\bar{u}_i$  nach (31) (wegen  $\det(v^i)$ ) Objekt  $\mathcal{L}_\lambda$  eine Differentialkomitante erster Ordnung der Felder  $v^i$ , u. u.

$$\mathcal{L}_\lambda = \Psi_\lambda(v^i, v^i_{,j}),$$

dann ist  $\mathcal{L}_\lambda$  nach (31) und (32) eine Differentialkomitante erster Ordnung der Felder  $\bar{u}_i$ ,

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

usw.)

Zum Schluß geben wir noch eine Bemerkung.

Gibt man z. B. die Definition der Lagrange-Funktion  $L$  bezüglich der Felder  $\bar{u}_i$  nach

$$L = L(x^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

an — vorausgesetzt, daß  $L(x^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$  eine zu (24) analoge Invarianzbedingung

$$(37) \quad L(\bar{x}^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j}) = |\det(B_j^i)| L(x^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

in allen Punkte  $x_0^i$  von  $G$  befriedigt —, so soll  $L$  wieder von den Veränderlichen  $x_0^i$  unabhängig sein. Setzen wir nämlich in (37)  $\bar{x}^i = x_0^i + c^i$  ( $c^i$  sind beliebige Werte,  $i=1, \dots, n$ ), so geht (37) wegen  $B_j^i = \delta_j^i$ ,  $B_{jk}^i = 0$  in die Identität

$$L(x_0^i + c^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j}) = L(x_0^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{i,j})$$

über, die eben die behauptete Unabhängigkeit beweist.



### § 3. Lagrange-Funktionen des metrischen Grundtensors und gewisser Vektorfelder

Es sei ein kovariantes Tensorfeld  $g_{ij}$ , ein System von kovarianten und ein System von kontravarianten Vektorfeldern ( $\overset{x}{u}_i$  und  $\overset{x}{v}^i, \alpha = 1, \dots, N$ ) über  $G(\subseteq X_n, n > 1)$  gegeben. Wir setzen voraus, daß der Tensor  $g_{ij}$  den Bedingungen

$$(38) \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad \det(g_{ij}) \neq 0$$

in jedem Punkt von  $G$  genügt, und  $g_{ij} = g_{ij}(x)$ ,  $\overset{x}{u}_i = \overset{x}{u}_i(x)$ ,  $\overset{x}{v}^i = \overset{x}{v}^i(x)$  Funktionen der Klasse  $C_2(G)$  sind. Aus diesen Forderungen folgen u. a. die Existenz der Christoffelschen Symbole erster und zweiter Art:

$$\Gamma_{ijk} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

bzw.

$$\Gamma_{ij}^k \stackrel{\text{df}}{=} g^{kr} \Gamma_{ijr}$$

(wo  $g^{jr}$  der durch die Gleichungen  $g^{jr} g_{ri} = \delta_i^j$  definierte kontravariante Tensor ist), die durch die symmetrischen Übertragungsparameter  $\Gamma_{ij}^k$  bestimmten kovarianten Ableitungen

$$\overset{x}{u}_{i;j} \stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{u}_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \overset{x}{u}_k, \quad \overset{x}{v}^i_{;j} \stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{v}^i_{,j} + \Gamma_{jk}^i \overset{x}{v}^k,$$

ferner folgt die Existenz des kovarianten Krümmungstensors

$$R_{imkj} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} (g_{ij,mk} + g_{mk,ij} - g_{ik,mj} - g_{mj,ik}) + \Gamma_{mk}^p \Gamma_{ijp} - \Gamma_{mj}^p \Gamma_{ikp}.$$

Der Tensor  $R_{imkj}$  befriedigt die folgenden bekannten Symmetrierelationen (s. z. B. [7], S. 21.)

$$(39) \quad R_{imkj} = -R_{mikj} = -R_{imjk} = R_{kjim},$$

$$(40) \quad R_{imkj} + R_{ikjm} + R_{ijmk} = 0.$$

Wir werden uns im folgenden mit den Differentialkomitanten (höchstens) zweiter Ordnung der Objekte  $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^i$  beschäftigen, welche Objekte erster Klasse sind. Als Folgerungen ergeben sich auch Ergebnisse für die algebraische Form der Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

$$L = L_2(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{u}_{i,jk}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}^i_{,j}, \overset{x}{v}^i_{,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}).$$

\* \* \*

Für die Differentialkomitanten zweiter Ordnung von  $g_{ij}$ , die Objekte erster Klasse sind, ist der folgende Satz gültig:

**Satz 11.** Ist das Objekt  $\mathcal{L}_\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, L$ ) erster Klasse eine Differentialkomitante zweiter Ordnung des Tensorfeldes  $g_{ij}$  mit den Eigenschaften (38)

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

so ist es eine algebraische Komitante der Tensorfelder  $g_{ij}$  und  $R_{imkj}$ .

BEWEIS. Die Identitäten (4) werden jetzt die Form

$$(41) \quad \Phi_\lambda(\bar{g}_{ij}, \bar{g}_{ij,k}, \bar{g}_{ij,km}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}), B_j^i)$$

haben, wo

$$(42) \quad \begin{cases} \bar{g}_{ij} = B_i^p B_j^q g_{pq}, \bar{g}_{ij,k} = B_i^p B_j^q B_k^r g_{pq,r} + (B_{ik}^p B_j^q + B_i^p B_{jk}^q) g_{pq}, \\ \bar{g}_{ij,km} = B_i^p B_j^q B_k^r B_m^s g_{pq,rs} + (B_{im}^p B_j^q B_k^r + B_{jm}^q B_i^p B_k^r + B_{km}^r B_i^p B_j^q + B_{ik}^r B_j^q B_m^p + \\ + B_{jk}^q B_i^p B_m^r) g_{pq,r} + (B_{ik}^p B_{jm}^q + B_{im}^p B_{jk}^q) g_{pq} + (B_{ikm}^p B_j^q + B_{jkm}^q B_i^p) g_{pq} \end{cases}$$

sind. Wir werden die Identitäten (41) sofort in einem fixen Punkt  $x_0^i$  von  $G$  betrachten, somit wird (41) ein Funktionalgleichungssystem mit freien Parametern  $B_j^i, B_{jk}^i, B_{jkm}^i$ . Durch die Substitution

$$B_j^i = \delta_j^i, \quad B_{jk}^i = 0,$$

wobei  $B_{jkm}^i (= B_{(jkm)}^i)$  beliebige Werte sind, ergibt sich unter Beachtung von (42) und der dem (26) entsprechenden Eigenschaften der in (41) vorkommenden Funktionen  $\Lambda_\lambda$ :

$$(43) \quad \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km} + B_{ikm}^p g_{pj} + B_{jkm}^p g_{pi}) = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

Es sei nun

$$B_{ikm}^p = \frac{1}{6} g^{pj} (g_{ik,jm} + g_{im,jk} + g_{km,ij} - 2(g_{ij,km} + g_{jk,im} + g_{jm,ik})),$$

somit geht (43) in

$$(44) \quad \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, T_{ijkm}) = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

über, wo

$$(45) \quad T_{ijkm} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{3} (R_{ikmj} + R_{imkj}) + \frac{1}{6} (\Gamma_{kj}^p \Gamma_{im}^p + \Gamma_{mj}^p \Gamma_{ik}^p - 2\Gamma_{km}^p \Gamma_{ij}^p)$$

ist.

Es sei der Tensor  $\bar{R}_{imkj}^*$  nach

$$(46) \quad \bar{R}_{imkj}^* \stackrel{\text{df}}{=} R_{ikmj} + R_{imkj}$$

definiert, d. h. (mit Anwendung von (39) und (40))

$$(47) \quad R_{imkj} = \frac{1}{3} (2\bar{R}_{imkj}^* + \bar{R}_{ikjm}^*),$$

dann sieht man aus (44), (45), (46), (47), daß  $\Phi_\lambda$  nur von  $g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj}$  abhängt:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj}).$$

Das Funktionalgleichungssystem (41) wird dementsprechend wegen

$$(48) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \bar{B}_p^i B_j^q B_k^r \Gamma_{qr}^p + \bar{B}_p^i B_j^p B_{jk}^p,$$

(42) und auf Grund des Tensorcharakters von  $R_{imkj}$  durch die Substitution

$$B_j^i = \delta_j^i$$

die Form

$$(49) \quad \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k} + B_{ik}^p g_{pj} + B_{jk}^p g_{ip}, \Gamma_{jk}^i + B_{jk}^i, R_{imkj}) = \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj})$$

haben, wo  $B_{jk}^i = B_{kj}^i$  beliebig gewählte Größen sind. Nehmen wir jetzt (s. [16], Beweis der Sätze 2, 4, 5, 6) für  $B_{jk}^i$  die Werte

$$B_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i,$$

so bekommen wir wegen

$$g_{ij,k} + \Gamma_{ik}^p g_{pj} + \Gamma_{jk}^p g_{ip} = 0$$

die Identitäten

$$\Phi_\lambda^1(g_{ij}, 0, 0, R_{imkj}) = \Phi_\lambda^1(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma_{jk}^i, R_{imkj}),$$

d. h.  $\mathcal{L}_\lambda (= \Phi_\lambda = \Phi_\lambda^1)$  hängt allein von  $g_{ij}$  und  $R_{imkj}$  ab, w. z. b. w.

Aus dem Beweis dieses Satzes folgt auch der folgende

**Satz 12.** *Es gibt keine Differentialkomitante erster Ordnung und erster Klasse des Tensorfeldes  $g_{ij}$  ( $= g_{ji}$ ,  $\det(g_{ij}) \neq 0$ ), die von den partiellen Ableitungen  $g_{ij,k}$  von  $g_{ij}$  in expliziter Weise abhängt.*

Die Sätze 11, 12 gelten natürlich auch für Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

bzw.

$$L = L_2(g_{ij}, g_{ij,k})$$

ohne irgendwelche Regularitätsannahmen bezüglich der Funktionen  $L_1$  bzw.  $L_2$ . Deswegen können wir diese Sätze für  $L_1$  bzw.  $L_2$  auch als Verallgemeinerungen gewisser Sätze der allgemeinen Relativitätstheorie auffassen (s. z. B. [19], [20], [21], [22], [25]), die man zu den Rechnungen mit Lagrange-Hamiltonschen Ableitungen üblich zugrunde legt (s. z. B. [2], [3], [4], [5]), und welche von E. Noether ([18], s. noch [26], [27]) herrühren.

Die Funktion  $\sqrt{|g|}$  ( $g \stackrel{\text{df}}{=} \det(g_{ij})$ ) bildet eine Weylsche Dichte vom Gewichte +1, die über  $G$  wegen (38) nirgendswo verschwindet. Wenn  $L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$  eine Lagrange-Funktion ist, so können wir nach

$$\sigma \stackrel{\text{df}}{=} |g|^{-\frac{1}{2}} L_1$$

ein Skalarfeld erklären, das natürlich wieder Differentialkomitante zweiter Ordnung des Feldes  $g_{ij}$  ist:

$$\sigma = \sigma(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

folglich gilt die Behauptung des Satzes 11 auch für  $\sigma$ :

$$\sigma = \sigma^*(g_{ij}, R_{imkj}).$$

Um die allgemeinste Form der Lagrange-Funktionen der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

zu bestimmen, genügt es demgemäß die allgemeinste Form der Skalarkomitanten zweiter Ordnung des Feldes  $g_{ij}$  klarzustellen. Zur Zeit beschäftigen sich M. LORENS (Katowice, s. [29]), A. ZAJTZ (Krakow) (dem Wissen nach des Verfassers) mit dem letzteren Problem. Wir weisen an dieser Stelle noch auf die Resultate von M. A. MCKIERNAN and H. RICHARDS ([15]) hin.

Gehen wir zur Untersuchung der Differentialkomitanten erster Klasse der Form

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}, v_{\alpha}^i, v_{\alpha,j}^i, v_{\alpha,jk}^i, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

über. Bekanntlich bilden

$$t_{ij}^{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} u_{i;j}^{\alpha}, \quad t_j^i \stackrel{\text{df}}{=} v_{\alpha;j}^i,$$

wo das Semikolon die kovariante Ableitung bezeichnet, bzw.

$$t_{ijk}^{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} t_{ij;k}^{\alpha}, \quad t_{jk}^i \stackrel{\text{df}}{=} t_{j;k}^i$$

Tensorfelder der Valenz (0, 2), (1, 1), bzw. (0, 3), (1, 2), wodurch wir die partiellen Ableitungen von  $u_i^{\alpha}, v_{\alpha}^i$  erster bzw. zweiter Ordnung nach

$$(50) \quad \begin{cases} u_{i,j}^{\alpha} = t_{ij}^{\alpha} + \Gamma_{ij}^p u_p^{\alpha}, \\ u_{ij,k}^{\alpha} = t_{ijk}^{\alpha} + \Gamma_{ij}^p t_{pk}^{\alpha} + \Gamma_{ik}^p t_{pj}^{\alpha} + \Gamma_{jk}^p t_{ip}^{\alpha} + (\Gamma_{ij,k}^p + \Gamma_{ij}^q \Gamma_{qk}^p) u_q^{\alpha}, \\ v_{\alpha,j}^i = t_j^i - \Gamma_{jp}^i v_p^{\alpha}, \\ v_{\alpha,j,k}^i = t_{jk}^i + \Gamma_{jk}^p t_p^i - \Gamma_{pk}^i t_j^p - \Gamma_{jp}^i t_k^p - (\Gamma_{jp,k}^i - \Gamma_{jq}^i \Gamma_{kp}^q) v_p^{\alpha} \end{cases}$$

darstellen können. Diese Formeln zeigen, daß die partiellen Ableitungen  $u_{i,j}^{\alpha}, u_{i,jk}^{\alpha}, v_{\alpha,j}^i, v_{\alpha,jk}^i$  durch die Tensorfelder  $t_{ij}^{\alpha}, t_{ijk}^{\alpha}, t_j^i, t_{jk}^i, g_{ij}$  und durch die partiellen Ableitungen  $g_{ij,k}, g_{ij,km}$  des Tensorfeldes  $g_{ij}$  vollständig bestimmt sind. Auf Grund dieser Relationen folgt:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda^*(u_i, t_{ij}, t_{ijk}, v_{\alpha}^i, t_j^i, t_{jk}^i, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}).$$

Die Funktionen  $\Phi_\lambda^*$  sollen das den Identitäten (41) entsprechendes Relationssystem

$$\Phi_\lambda^*(\overline{u_i}, \overline{t_{ij}}, \dots, \overline{g_{ij,km}}) = A_\lambda(\Phi_\mu^*(u_i, t_{ij}, \dots, g_{ij,km}), B_j^i)$$

(auch in einem beliebigen gewählten fixen Punkt  $x_0^i$  von  $G$ ) erfüllen, aus welchen wir (schrittweise folgend den Beweis des Satzes 11) die Gültigkeit des folgenden Satzes einsehen können:

**Satz 13.** Jede Differentialkomitante  $\mathcal{L}_\lambda$  zweiter Ordnung und erster Klasse der Objektfelder  $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^i, g_{ij}$  ist eine algebraische Komitante der Größen

$$\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{u}_{i;jk}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, \overset{x}{v}_{;jk}^i, g_{ij}, R_{imkj}.$$

Der Beweis ist wesentlich einfacher, wenn das Objekt  $\mathcal{L}_\lambda$  eine Differentialkomitante erster Ordnung (und erster Klasse) der obenerwähnten Felder ist:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, g_{ij}, g_{ij,k}).$$

Die zu (41) analoge Identität ist in diesem Fall

$$\Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, \bar{g}_{ij}, \bar{g}_{ij,k}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{x}{u}_i, \dots, g_{ij,k}), B_j^i),$$

woraus man das Ergebnis

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^{**}(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{t}_{ij}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{t}_j^i, g_{ij}),$$

mit Hilfe der Substitution  $B_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i$ , leicht herleiten kann. Somit gilt der

**Satz 14.** Jedes Objekt erster Klasse, das eine Differentialkomitante erster Ordnung der Größen  $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^i, g_{ij}$  ist, muß eine algebraische Komitante der Größen  $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{v}^i, \overset{x}{v}_{;j}^i, g_{ij}$  sein.

Es sei schließlich vorausgesetzt, daß ein Objekt  $\mathcal{L}_\lambda$  erster Klasse

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der über  $G$  linear unabhängigen kovarianten Vektorfelder  $\overset{x}{u}_i$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ,  $\det(\overset{x}{u}_i) \neq 0$ ) und des metrischen Tensorfeldes  $g_{ij}$  ( $=g_{ji}$ ,  $\det(g_{ij}) \neq 0$ ) ist:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{u}_{i;jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}).$$

Nach dem Satz 13 soll  $\mathcal{L}_\lambda$  die Gestalt

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda^1(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i;j}, \overset{x}{u}_{i;jk}, g_{ij}, R_{imkj})$$

haben, wo die Funktionen  $\Phi_\lambda^1$  in allem Punkt  $x_0^i$  von  $G$  das Funktionalgleichungssystem

$$(51) \quad \Phi_\lambda^1(B_i^r \overset{x}{u}_r, B_i^r B_j^s \overset{x}{u}_{r;s}, \dots, B_i^r B_m^s B_k^t B_j^u R_{rstu}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^1(\overset{x}{u}_i, \dots, R_{imkj}); B_j^i)$$

befriedigen. Setzen wir hier die Werte  $B_j^i$  nach

$$B_j^i = \overset{x}{v}_j^i$$

( $v^i$  bezeichnet wieder das zu  $\bar{u}_i^\alpha$  adjungierte  $n$ -Bein), so folgen aus (51) die Identitäten

$$(52) \quad \Phi_\lambda^*(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, Q_{imkj}) = A_\lambda(\Phi_\mu^1, v_j^i),$$

( $\Phi_\lambda^*(\bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj}) \stackrel{\text{df}}{=} \Phi_\lambda^1(\delta_i^\alpha, \bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj})$ ), wo die Grössen  $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, Q_{imkj}$  nach

$$(53) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} v_i^r v_j^s \bar{u}_{rs}, & \bar{\sigma}_{ijk} \stackrel{\text{df}}{=} v_i^r v_j^s v_k^t \bar{u}_{rst}, \\ \gamma_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} v_i^r v_j^s g_{rs}, & Q_{imkj} \stackrel{\text{df}}{=} v_i^r v_m^s v_k^t v_j^u R_{rstu} \end{cases}$$

Skalarfelder sind. Das für  $\Phi_\mu^1$  implizite Gleichungssystem (52) kann man auf ähnliche Weise auflösen, wie wir aus (34) zu (36) gelangt sind. Das Ergebnis ist

$$(54) \quad \Phi_\lambda^1 = A_\lambda(\Phi_\mu^*(\bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj}); \bar{u}_j^i)$$

und wir können uns wieder leicht überzeugen, daß (54) mit beliebig gewähltem Funktionensystem  $\Phi_\lambda^*$  eine Lösung des Gleichungssystems (51) darstellt.

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 15.** Die allgemeinste Form der Differentialkomitanten  $\mathcal{L}_\lambda$  zweiter Ordnung der kovarianten Vektorfelder  $\bar{u}_i^\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, n$ ,  $\det(\bar{u}_i^\alpha) \neq 0$ ) und des Tensorfeldes  $g_{ij}$  ( $=g_{ji}$ ,  $\det(g_{ij}) \neq 0$ ), die Objekte erster Klasse mit den Transformationsformeln

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda = A_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

sind, ist

$$\mathcal{L}_\lambda = A_\lambda(\Phi_\mu^*(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, Q_{imkj}); \bar{u}_j^i),$$

wo  $\Phi_\lambda^*$  beliebige Funktionen der Skalarfelder  $\sigma_{ij}, \dots, Q_{imkj}$  bedeuten ( $\bar{\sigma}_{ij}, \dots, Q_{imkj}$  sind nach (53) erklärt und  $v^i$  bezeichnet das zu  $\bar{u}_i^\alpha$  adjungierte  $n$ -Bein).

Wir bemerken, daß man die Skalare  $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ijk}$  mit Hilfe von  $\sum_{p\gamma} \bar{\sigma}_{p\gamma}$  und mit dem Tensor

$$T_{jk}^i \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma_{jk}^i - v_j^i \bar{u}_{(j,k)}^\alpha$$

nach

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{ij}^\alpha \bar{u}_p^\alpha v_i^q v_j^r T_{qr}^p,$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ijk} = & v_k^p \sum_{ij,p}^\alpha \bar{u}_p^\alpha v_i^q v_j^r T_{rs}^p - \sum_{ip}^\alpha \bar{u}_q^\alpha v_j^r v_k^s T_{rs}^q - \sum_{pj}^\alpha \bar{u}_q^\alpha v_i^r v_k^s T_{rs}^q - \\ & - \sum_{pk}^\alpha \bar{u}_q^\alpha v_i^r v_j^s T_{rs}^q + \bar{u}_p^\alpha v_i^q v_j^r v_k^s T_{ms}^p T_{qr}^m - \bar{u}_p^\alpha v_i^q v_j^r v_k^s T_{qr;s}^p \end{aligned}$$

ausdrücken kann.

## Bemerkungen

1) Ist  $L$  eine Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L_1(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha,j}, \overset{i}{v}_{\alpha,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

bzw.

$$L = L_2(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha,j}, g_{ij}, g_{ij,k})$$

bzw.

$$L = L_3(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}), \quad \det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0,$$

so können wir nach dem Satz 13, 14, bzw. 15 feststellen, daß diese Lagrange-Funktionen die Form

$$L_1 = \Phi_1(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j}, \overset{\alpha}{u}_{i;jk}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha;j}, \overset{i}{v}_{\alpha;jk}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

$$L_2 = \Phi_2(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j}, \overset{i}{v}_{\alpha}, \overset{i}{v}_{\alpha;j}, g_{ij}),$$

$$L_3 = |\det(\overset{i}{u}_j)| \Phi^*(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, \varrho_{imkj})$$

haben (das letzte ist wieder die allgemeinste Form für  $L_3$ , wo man die Funktion  $\Phi^*$  beliebig wählen kann).

2) Man kann leicht einsehen, daß die Forderung der Unabhängigkeit der obigen Lagrange-Funktionen von  $x^i$  als eine Folgerung der zu (24) und (37) analogen Invarianzbedingung aufgefaßt werden kann.

3) Aus der Bemerkung 1) folgt für die Lagrange-Funktion

$$L = L_{11}(u_i, u_{i,j}, g_{ij})$$

(s. [2], [22]) bzw.

$$L = L_{12}(u_i, u_{i,j}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

(s. [22]) bzw.

$$L = L_{13}(u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

(s. [2]) die Darstellungen

$$L_{11} = \Phi_{11}(u_i, u_{[i,j]}, g_{ij}),$$

bzw.

$$L_{12} = \Phi_{12}(u_i, u_{i;j}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

bzw.

$$L_{13} = \Phi_{13}(u_i, u_{i;j}, u_{i;jk}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

wo die Funktionen  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{13}$  solche Invarianzbedingungen erfüllen sollen, in welchen nur die partiellen Ableitungen  $B_j^i$  vorkommen.

#### § 4. Lagrange-Funktionen einer affinen Übertragung und gewisser Vektorfelder

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraph mit der Kennzeichnung der Differentialkomitanten  $\mathcal{L}_\lambda$  zweiter, bzw. erster Ordnung einer affinen Übertragung  $\Gamma_{jk}^i (= \Gamma_{kj}^i)$  und eines Systems von kovarianten und kontravarianten Vektorfeldern  $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^i$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ), vorausgesetzt, daß  $\mathcal{L}_\lambda$  wieder ein Objekt erster Klasse ist, d. h.

$$(55) \quad \bar{\mathcal{L}}_\lambda = A_\lambda(\mathcal{L}_\mu, B_j^i)$$

gilt. Zu diesem Zweck setzen wir voraus, daß die Funktionen  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x)$  bzw.  $\overset{x}{u}_i = \overset{x}{u}_i(x)$ ,  $\overset{x}{v} = \overset{x}{v}^i(x)$  über  $G(\subseteq X_n)$  stetige partielle Ableitungen erster bzw. zweiter Ordnung haben.

Im folgenden sind die aus

$$(56) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \bar{B}_p^i B_j^q B_k^r \Gamma_{qr}^p + \bar{B}_p^i B_{jk}^p$$

folgenden Relationen

$$(57) \quad \begin{cases} \bar{\Gamma}_{jk,m}^i = \bar{B}_p^i B_j^q B_k^r B_m^s \Gamma_{qr,s}^p - \bar{B}_p^i \bar{B}_r^q B_{jk}^r B_{qm}^p + \bar{B}_p^i B_{jkm}^p + \\ + (\bar{B}_p^i B_k^q B_{jm}^r + \bar{B}_p^i B_j^q B_{km}^r - \bar{B}_s^i \bar{B}_p^q B_j^r B_k^s B_{im}^p) \Gamma_{qr}^p \end{cases}$$

nötig.

Wir nehmen zuerst an, daß das Objekt  $\mathcal{L}_\lambda$  mit der Transformationsformel (55) eine Differentialkomitante erster Ordnung von  $\Gamma_{jk}^i$  ist:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i).$$

Die Funktionen  $\Phi_\lambda$  genügen folglich in jedem Punkt  $x_0^i (\in G)$  dem Funktionalgleichungssystem

$$(58) \quad \Phi_\lambda(\bar{\Gamma}_{jk}^i, \bar{\Gamma}_{jk,m}^i) = A_\lambda(\Phi_\mu(\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i); B_j^i),$$

aus welchem wir durch Einsetzen von

$$B_j^i = \delta_j^i, \quad B_{jk}^i = 0, \quad B_{jkm}^i = -\frac{1}{3}(\Gamma_{jk,m}^i + \Gamma_{mk,j}^i + \Gamma_{jm,k}^i)$$

(wegen der (26) entsprechenden Eigenschaft von  $A_\lambda$ , ferner wegen (56) und (57)) die Identitäten

$$(59) \quad \Phi_\lambda \left( \Gamma_{jk}^i, -\frac{1}{3}(R_{kjm}^i + R_{jkm}^i - \Gamma_{km}^p \Gamma_{pj}^i - \Gamma_{jm}^p \Gamma_{pk}^i + 2\Gamma_{jk}^p \Gamma_{pm}^i) \right) = \Phi_\lambda(\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

erhalten, wo

$$R_{jkm}^i \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma_{jm,k}^i - \Gamma_{jk,m}^i + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{jm}^p - \Gamma_{pm}^i \Gamma_{jk}^p$$

den Krümmungstensor der affinen Übertragung  $\Gamma_{jk}^i$  bezeichnet. Die Formeln (59) zeigen, daß die Funktionen  $\Phi_\lambda$  nur von  $\Gamma_{jk}^i$  und von dem Tensor

$$\overset{*}{R}_{jkm}^i \stackrel{\text{df}}{=} R_{jkm}^i + R_{kjm}^i$$



abhängen. Den Tensor  $R_{jkm}^i$  kann man einfach durch  $R_{jkm}^{*i}$  ausdrücken, wenn wir die bekannte Relationen

$$R_{j(km)}^i = 0, \quad R_{[jkm]}^i = 0$$

(s. z. B. [24], S. 144.) verwenden:

$$R_{jkm}^i = \frac{1}{3} (2R_{jkm}^{*i} + R_{kmj}^{*i}),$$

folglich können wir festlegen, daß  $\Phi_\lambda$  die Form

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^1(\Gamma_{jk}^i, R_{jkm}^i)$$

hat. Setzen wir jetzt diese Gestalt von  $\Phi_\lambda$  in (58) ein und wählen wir die Werte  $B_j^i, B_{jk}^i$  nach

$$B_j^i = \delta_j^i, \quad B_{jk}^i = -\Gamma_{jk}^i,$$

so bekommen wir

$$\Phi_\lambda^1(0, R_{jkm}^i) = \Phi_\lambda^1(\Gamma_{jk}^i, R_{jkm}^i),$$

d. h. die Funktion  $\Phi_\lambda^1$  hängt allein von dem Krümmungstensor  $R_{jkm}^i$  ab.

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 16.** *Alle Differentialkomitanten erster Ordnung einer affinen Übertragung  $\Gamma_{jk}^i$ , die Objekte erster Klasse sind, sind die algebraischen Komitanten allein des zu den  $\Gamma_{jk}^i$  gehörigen Krümmungstensors.*

**Satz 17.** *Es gibt keine algebraische Komitante der symmetrischen Übertragung  $\Gamma_{jk}^i$  über  $G$ , die ein Objekt erster Klasse ist und welche ausschließlich von den Übertragungsparametern  $\Gamma_{jk}^i$  abhängt.*

Wir können die folgenden, zu den Sätzen 13, 14, 15 analoge Sätze mit ähnlichem Verfahren, die zu den Ergebnissen der Sätze 13, 14, 15 geführt haben, beweisen:

**Satz 18.** *Wenn das Objekt  $\mathcal{L}_\lambda$  erster Klasse eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der Felder  $\overset{\alpha}{u}_i, v_\alpha^i$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) und gleichzeitig eine Differentialkomitante erster Ordnung der symmetrischen Übertragung  $\Gamma_{jk}^i$  über  $G$  ist, d. h.*

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, v_\alpha^i, v_{\alpha,j}^i, v_{\alpha,jk}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i),$$

so muß  $\mathcal{L}_\lambda$  eine algebraische Komitante der Tensoren

$$\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j} \left( \stackrel{\text{df}}{=} \overset{\alpha}{u}_{i,j} - \Gamma_{ij}^p \overset{\alpha}{u}_p \right), \overset{\alpha}{u}_{i;jk},$$

$$v_\alpha^i, v_{\alpha;j}^i \left( \stackrel{\text{df}}{=} v_{\alpha,j}^i + \Gamma_{pj}^i v_\alpha^p \right), v_{\alpha;jk}^i$$

und  $R_{jkm}^i$  sein.

**Satz 19.** *Ist  $\mathcal{L}_\lambda$  ein Objekt erster Klasse und gleichzeitig eine Differentialkomitante erster Ordnung der Vektorfelder  $\overset{\alpha}{u}_i, v_\alpha^j$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ), bzw. algebraische Komitante der symmetrischen Übertragung  $\Gamma_{jk}^i$ , d. h.*

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, v_\alpha^i, v_{\alpha,j}^i, \Gamma_{jk}^i),$$

dann ist  $\mathcal{L}_\lambda$  eine algebraische Komitante der Größen

$$\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{v}_i, \overset{x}{v}_{i,j}.$$

**Satz 20.**  $\mathcal{L}_\lambda$  sei ein Objekt erster Klasse mit der Transformationsformel

$$(60) \quad \bar{\mathcal{L}}_\lambda = A_\lambda(\mathcal{L}_\mu; B_j^i)$$

und wir setzen voraus, daß  $\mathcal{L}_\lambda$  eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der in jedem Punkt von  $G$  linear-unabhängigen kovarianten Vektorfelder  $\overset{x}{u}_i$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) und eine Differentialkomitante erster Ordnung der symmetrischen Übertragung  $\Gamma_{jk}^i$  ist:

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{u}_{i,jk}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i).$$

Dann gibt es ein Funktionensystem  $\Phi_\lambda^*$  der Skalarfelder

$$\overset{x}{\sigma}_{ij} \left( \stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{v}_p \overset{x}{v}_q \overset{x}{u}_{p;q} \right), \quad \overset{x}{\sigma}_{ijk} \left( \stackrel{\text{df}}{=} \overset{x}{v}_p \overset{x}{v}_q \overset{x}{v}_r \overset{x}{u}_{p;qr} \right),$$

$$\overset{i}{Q}_{jkm} \left( \stackrel{\text{df}}{=} \overset{i}{u}_p \overset{i}{v}_q \overset{i}{v}_r \overset{i}{v}_s R_{qrs}^p \right),$$

mit welchem man das Objekt  $\mathcal{L}_\lambda$  in der Form

$$(61) \quad \mathcal{L}_\lambda = A_\lambda(\Phi_\mu^*(\overset{x}{\sigma}_{ij}, \overset{x}{\sigma}_{ijk}, \overset{i}{Q}_{jkm}); \overset{i}{u}_j)$$

darstellen kann ( $\overset{i}{v}$  bezeichnet das zu  $\overset{x}{u}_i$  adjungierte  $n$ -Bein). Umgekehrt, es seien die Funktionen  $\Phi_\lambda^*$  in (61) beliebig gewählt, so erweist sich das nach (61) erklärte Funktionensystem  $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda(x)$  über  $G$  als ein Objekt erster Klasse mit der Transformationsformel (60).

### Bemerkungen

1. Die Behauptung des Satzes 16 gibt ein noch von E. B. Christoffel und G. Ricci herrührendes Ergebnis, den „ersten Reduktionssatz“ für Differentialkomitanten erster Ordnung von  $\Gamma_{jk}^i$  wieder (s. [24], S. 164.), während die Sätze 18, 19, 20 in ihren Spezialfällen eine Verallgemeinerung des „zweiten Reduktionssatzes“ von E. Noether ([18], s. auch [24], S. 165.) angeben.

2. Man folgert einfach, daß auch die folgenden Verallgemeinerungen des Satzes 18, bzw. 19 bestehen:

Es sei über  $G$  außer den Vektorfeldern  $\overset{x}{u}_i, \overset{x}{v}^j$  und dem Übertragungsparameter  $\Gamma_{jk}^i$  auch ein Tensorfeld  $t_{ij}$  erklärt, dann ist jede Differentialkomitante  $\mathcal{L}_\lambda$  erster Klasse von der Gestalt

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(t_{ij}, \overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{u}_{i,jk}, \overset{x}{v}_i, \overset{x}{v}_{i,j}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

bzw.

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(t_{ij}, \overset{x}{u}_i, \overset{x}{u}_{i,j}, \overset{x}{v}_i, \overset{x}{v}_{i,j}, \Gamma_{jk}^i)$$

eine algebraische Komitante der Größen

$$t_{ij}, u_i^z, u_{i;j}^z, \dots, v_{;jk}^i, R_{jkm}^i$$

bzw.

$$t_{ij}, u_i^z, u_{i;j}^z, v_{;j}^i, v_{;j}^i.$$

Im Spezialfall, wobei die Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(t_{ij}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

bzw.

$$L = L_2(t_{ij}, u_i, u_{i;j}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

(s. [23]) sind, ist  $L_1$  bzw.  $L_2$  eine algebraische Komitante der Felder

$$t_{jk}, R_{jkm}^i \text{ bzw. } g_{ij}, u_i, u_{i;j}, R_{jkm}^i.$$

3. Man kann sich von der Unabhängigkeit von  $x^i$  einer Lagrange-Funktion von der Gestalt

$$L = L(x^i, g_{ij}, u_i^z, u_{i;j}^z, u_{i;jk}^z, v_{;j}^i, v_{;j}^i, v_{;jk}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk,m}^i)$$

wieder leicht überzeugen.

### Literaturverzeichnis

- [1] J. ACZÉL—ST. GOLAB, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, *Warszawa*, 1960.
- [2] H. A. BUCHDAHL, The hamiltonian derivatives of a class of fundamental invariants, *Quart. J. Math. Oxford. Ser.* **19** (1948), 150—159.
- [3] H. A. BUCHDAHL, Über die Variationsableitung von Fundamentalinvarianten beliebig hoher Ordnung, *Acta Math.*, **85** (1950), 63—72.
- [4] H. A. BUCHDAHL, On the hamiltonian derivatives arising from a class of gauge-invariant action principles in a  $W_n$ , *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 139—149.
- [5] H. A. BUCHDAHL, An identity between the hamiltonian derivatives of certain fundamental invariants in a  $W_4$ , *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 150—152.
- [6] A. S. EDDINGTON, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, *Berlin*, 1925.
- [7] L. P. EISENHART, Riemannian geometry, *Princeton*, 1926.
- [8] G. KNAPECZ, General relativistic theory of lagrangeian functions, Part I. (Fields in the space  $X_1$ ) (*in Vorbereitung*).
- [9] M. KUCHARZEWSKI, Über die Vektorkomitanten der Vektorfelder, *Ann. Polon. Math.*, **9** (1961), 299—309.
- [10] M. KUCHARZEWSKI, Die kovarianten Vektorkomitanten, die aus kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor*, N. S., **12** (1962), 140—150.
- [11] M. KUCHARZEWSKI, Die skalaren Komitanten, welche aus kovarianten und kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor*, N. S., **12** (1962), 158—166.
- [12] I. MAKAI, Über geometrische Objekte, die aus adjungierten  $n$ -Beinen gebildet sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 219—222.
- [13] I. MAKAI, (Briefwechsel mit Herr G. KNAPECZ), 1966.
- [14] I. MAKAI, Über Differentialkomitanten erster Ordnung von kovarianten Vektorfeldern, *Ann. Polon. Math.*, **18** (1970), (*im Druck*).
- [15] M. A. MCKIERNAN—H. RICHARDS, Characterization of some concomitants of the metric tensor and vector fields under restricted groups of transformation, *Ann. Polon. Math.*, **18** (1970), (*im Druck*).

- [16] A. MOÓR, Über die aus  $g_{ik}$  bestimmte kovariante Ableitung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 175—186.
- [17] A. NIJENHUIS, Theory of geometric object, *Amsterdam*, 1952.
- [18] E. NOETHER, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke, *Göttinger Nachr.*, (1918), 37—44.
- [19] J. C. DU PLESSIS, Tensorial concomitants and conservation laws, *Tensor*, N. S., **20** (1969), 347—360.
- [20] J. C. DU PLESSIS, Conformal concomitants and continuity equations, *Tensor*, N. S., **21** (1970), 1—14.
- [21] H. RUND, Variational problems in which the unknown functions are tensor components, 2<sup>nd</sup> *Colloquium on the Calculus of Variations*, Univ. of South Africa (1964), 129—174.
- [22] H. RUND, Variational problems involving combined tensor fields, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **29** (1966), 243—263.
- [23] H. RUND, Invariant theory of variational problems for geometric objects, *Tensor*, N. S., **18** (1967), 239—258.
- [24] J. A. SCHOUTEN, Ricci-Calculus, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.
- [25] E. SCHRÖDINGER, Space—time structure, *Cambridge*, 1954.
- [26] H. WEYL, Raum, Zeit, Materie, *Berlin*, 1921.
- [27] R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, *Noordhoff, Groningen*, 1923.
- [28] A. ZAJTZ, Komitanten der Tensoren zweiter Ordnung, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego*, **74.**, *Prace Matematyczne*, Zeszyt 8., Kraków, 1964.
- [29] M. LORENS, Remarks on differential concomitants of the covariant tensor, *Prace Matematyczne* **1**, 1969 (Katowice), 71—77.

(Eingegangen am 25. Juni 1968.)