

Ein neuer Beweis des Linnikschen Nullstellensatzes

Von W. HANEKE (Marburg/Lahn)

1. Es sei $p(k, l)$ die kleinste Primzahl in der arithmetischen Reihe

$$kn + l, \quad (l, k) = 1, \quad 0 < l < k \leq 3, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Man verdankt YU. V. LINNIK (vgl. [2] und [3]) die Abschätzung

$$(1.1) \quad p(k, l) \ll k^C$$

mit einer von k und l unabhängigen Zahl $C > 0$. Zur Herleitung bewies er zwei fundamentale Sätze über die Nullstellenverteilung der Dirichletschen L -Funktionen, einen Dichte- und einen Nullstellensatz. Während der Dichtesatz ein Maß für die Zahl der Nullstellen der L -Funktionen in der Umgebung von $s=1$ angibt (vgl. [5], 331), besagt der Nullstellensatz [5], 349, Satz 3. 1):

Es gibt positive Konstanten A_1 und A_2 mit folgender Eigenschaft: Es sei $k \equiv 3$ und β_1 die Ausnahmenullstelle einer L -Funktion $L(s, \chi_1)$ zu einem reellen Charakter $\chi_1 \pmod k$, welche in

$$1 - \frac{A_1}{\log k} < \sigma < 1, \quad t = 0$$

liegen möge: es möge $\delta_1 = 1 - \beta_1$ gesetzt werden. Dann liegen im Bereich

$$(1.2) \quad \sigma > 1 - \frac{A_2}{\Omega} \log \frac{eA_1}{\delta_1 \Omega}, \quad \delta_1 \Omega < A_1, \quad \Omega = \log(k(|t| + 1))$$

keine Nullstellen $\neq \beta_1$ irgendeiner der mit Charakteren $\pmod k$ gebildeten L -Funktionen.

In der Literatur gibt es bisher nur zwei wesentlich verschiedene Methoden, den Dichte- und den Nullstellensatz zu beweisen: Die von Linnik entwickelte und später von K. A. RODOSKII ([6]) vereinfachte und P. TURÁN diophantische Abschätzungsmethode [7]. Mit diesem Verfahren bewies TURÁN ([8]) den Dichtesatz und S. KNAPOWSKI ([1]) den Nullstellensatz. Beide Autoren verwendeten Linienintegrale der Gestalt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} e^{Aw} \left(\frac{e^{Bw} - e^{-Bw}}{2Bw} \right)^r dw \quad (A, B > 0; r = 1, 2, \dots)$$

S. Knapowski zog außerdem Linienintegrale anderer Bauart zu Hilfe.

Wir wollen in dieser Arbeit den Nullstellensatz mit der Turánschen Methode aufs neue beweisen. Dazu verwenden wir nur Integrale der Form

$$(1.3) \quad J_n(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{x^s}{\sin^n \frac{\pi s}{\varepsilon}} ds \quad (n=1, 2, \dots; \varepsilon > 0, x > 0)$$

Gewisse arithmetische Überlegungen, die in den Beweisen von Knapowski und Rodosskii notwendig werden (vgl. [1], 176—177, [6], 347—349, [5], 359—362) können wir mit Hilfe der Funktionen $J_n(x, \varepsilon)$ etwas einfacher durchführen.

Die im folgenden auftretenden Konstanten $c_1, c_2, \dots$ bzw. die 0- und $\ll$ -Konstanten sind positiv, absolut und konstruierbar; χ bezeichnet einen beliebigen Charakter mod k , χ_0 den Hauptcharakter, χ_1 einen reellen Ausnahmecharakter, und damit werde

$$L(s, \chi_1) = L(s)$$

gesetzt.

2. Hilfssatz 1. Es sei $\varepsilon < 1$, $g = [1/\varepsilon]$, $g\varepsilon < \sigma_0 < (g+1)\varepsilon$, $f(s)$ auf der Geraden (σ_0) integrierbar und dort

$$f(s) \ll M e^{|t|} \quad (M > 0).$$

Dann gilt

$$(2.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{f(s)}{\sin^n \frac{\pi s}{\varepsilon}} ds \ll \frac{M\varepsilon}{\sin^n \frac{\pi \sigma_0}{\varepsilon}} e^{-\max\left(\frac{r}{\varepsilon}-1, 0\right)n}$$

$|t| > r$

für alle $r \geq 0$ mit $r \ll \varepsilon$

und insbesondere

$$(2.2) \quad J_n(x, \varepsilon) \ll \frac{x^{\sigma_0 \varepsilon}}{\left| \sin^n \frac{\pi \sigma_0}{\varepsilon} \right|} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Ferner gilt

$$(2.3) \quad J_1(x, \varepsilon) = (-1)^g \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{x^{g\varepsilon}}{1+x^{-\varepsilon}} \quad \text{für alle } x > 0.$$

BEWEIS. Wegen

$$\operatorname{Re}(\sin s) = (\sin \sigma) \cos it, \quad \cos it = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \equiv \omega(t),$$

$$\omega(t) := \max\left(1, \frac{e^{|t|}}{2}\right)$$

ist das Integral auf der linken Seite von (2.1)

$$\ll \frac{M}{\left| \sin^n \frac{\pi \sigma_0}{\varepsilon} \right|} J' \quad \text{mit } J' = \int_r^\infty e^t \omega^{-n}\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right) dt.$$

Wegen $\varepsilon \leq 1$ ist

$$J' \ll \varepsilon \int_{r/\varepsilon}^{\infty} e^{t/\pi\omega} e^{-n} dt.$$

Im Falle $r' = \frac{r}{\varepsilon} - 1 \geq 0$ schätzen wir dies durch

$$O\left(\varepsilon 2^n \int_{r'+1}^{\infty} e^{(1/\pi-n)t} dt\right)$$

und im Falle $r' < 0$ durch

$$O\left(\varepsilon \left[\int_0^1 dt + 2^n \int_1^{\infty} e^{(1/\pi-n)t} dt \right] \right) ab$$

und erhalten so unmittelbar (2. 1).

(2. 2) folgt daraus nach (1. 3) sofort mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes. Im Falle $n=1$, $x>1$ liefert der Residuensatz

$$J_1(x, \varepsilon) = \sum_{v=-\infty}^g \operatorname{Res}_{s=v\varepsilon} \frac{x^s}{\sin \frac{\pi s}{\varepsilon}} = \sum_{v=-\infty}^g (-1)^v \frac{\varepsilon}{\pi} x^{v\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\pi} (-1)^g x^{g\varepsilon} \frac{1}{1 - (-x^{-\varepsilon})}.$$

Das ist aber (2. 3) im Falle $x>1$. Der Fall $0 < x \leq 1$ ergibt sich daraus mit dem Prinzip der analytischen Fortsetzung.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß man ohne Mühe

$$(-1)^n [1/\varepsilon] J_n(x, \varepsilon) \geq 0 \text{ für alle } x > 0$$

zeigen kann. Mit dieser Ungleichung könnte man den nachstehenden Beweis erheblich vereinfachen, wenn man (1. 2) nur mit $L(1, \chi_1)$ an Stelle von δ_1 beweisen wollte.

Hilfssatz 2. $z_1, \dots, z_N$ seien beliebige komplexe Zahlen mit

$$\max_{1 \leq j \leq N} |z_j| \geq 1.$$

Dann gilt für alle natürlichen m

$$\max_{\substack{m \leq v \leq m+N \\ v \text{ ganz}}} |z_1^v + \dots + z_N^v| > \left(\frac{N}{22(m+N)} \right)^N.$$

BEWEIS. Vgl. [9], S. 311, (1. 7).

Hilfssatz 3. Die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ in

$$\{s: |s - (1 + i\gamma)| \leq r\} \quad (\gamma, r \text{ reell})$$

ist

$$< c_1 r \log(k(|\gamma| + 2 + r)), \text{ falls } r \geq \frac{1}{\log(k(|\gamma| + 2))}$$

BEWEIS. Vgl. [5], S. 331, 332 und Satz 3. 3 (S. 220).

Hilfssatz 4. Für jeden Charakter χ und alle reellen γ gilt

$$\frac{L'}{L}(s+i\gamma, \chi) = \sum'_{q^* \in B_r} \frac{1}{s-q^*} + O(\Omega), \text{ falls } \frac{1}{\Omega} \equiv r \equiv \frac{1}{2}, s \in B_{r/2}.$$

Dabei ist

$$B_r = \{s: |1-\sigma| \equiv r, |t| \equiv r\}, \quad \Omega = \log(k(|\gamma|+2)),$$

und $\sum'$ bedeutet die Summation über alle Nullstellen $q^* = \beta^* + i\gamma^*$ von $L(s+i\gamma, \chi)$ mit $0 \equiv \beta^* < 1$.

BEWEIS. Nach [5], S. 225, (4. 1) und Satz 4. 1 gilt wegen $r \ll 1$ für $s \in B_{r/2}$

$$\frac{L'}{L}(s+i\gamma, \chi) = \sum'_{\substack{q^* \in B_r \\ |\gamma^*-t| \equiv 1}} \frac{1}{s-q^*} + O(\Omega).$$

Für $s \in B_{r/2}$, $q^* \in B_r$ ist $|\gamma^*-t| \equiv \frac{3}{2}r < 1$, also folgt

$$(2.4) \quad \frac{L'}{L}(s+i\gamma, \chi) = \sum'_{q^* \in B_r} \frac{1}{s-q^*} + R_0(s) + O(\Omega) \text{ für } s \in B_{r/2}$$

mit

$$R_0(s) = \sum'_{\substack{q^* \notin B_r \\ |\gamma^*-t| \equiv 1}} \frac{1}{s-q^*}.$$

Für $s \in B_{r/2}$, $q^* \notin B_r$ hat man

$$|1-q^*| \equiv r, \quad \left| \frac{1-q^*}{s-q^*} \right| \equiv \left| 1 + \frac{1-s}{s-q^*} \right| \equiv 1 + \frac{r/2+r/2}{r/2} \ll 1.$$

Damit ergibt sich für $s \in B_{r/2}$, $r \equiv 1/\Omega$ nach Hilfssatz 3

$$\begin{aligned} |R_0(s) - R_0(1)| &\ll \sum'_{\substack{q^* \\ |1-q^*| \equiv r}} \frac{|1-s|}{|1-q^*|^2} \ll r \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v r} \sum'_{|1-q^*| < 2^{v+1}r} \frac{1}{|1-q^*|^2} \ll \\ &\ll r \sum_{v=0}^{\infty} \frac{2^{v+1}r(\Omega+v)}{(2^v r)^2} \ll \Omega, \end{aligned}$$

und insbesondere

$$(2.5) \quad |R_0(s)| \ll \Omega + |R_0(1+r/2)| \text{ für } s \in B_{r/2}.$$

Andererseits gilt nach (2. 4) und Hilfssatz 3 für $\sigma = 1+r/2$, $r \equiv 1/\Omega$

$$R_0(\sigma) \ll \left| \frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma, \chi) \right| + O\left(\frac{r\Omega}{r}\right) + O(\Omega) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} + O(\Omega) \ll \frac{1}{\sigma-1} + O(\Omega) \ll \Omega.$$

Mit (2. 5) folgt daraus die Behauptung.

3. BEWEIS des Nullstellensatzes. Für einen Charakter χ und reelle β, γ sei

$$(3.1) \quad L(\beta + i\gamma, \chi) = 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1,$$

und es existiere ein $\beta_1 \in (1/2, 1)$ mit

$$(3.2) \quad L(\beta_1) = 0, \quad \beta_1 \neq \beta,$$

$$(3.3) \quad \delta_1 := 1 - \beta_1 < \frac{C_3}{\Omega}, \quad \Omega := \log(k(|\gamma| + 2)).$$

Die Konstante c_3 denken wir uns im folgenden immer genügend klein gewählt. Nach [5], S. 130, Satz 6.9 a) folgt zunächst

$$(3.4) \quad f(s) := \prod_{l=0,1} L(s + i\gamma, \chi\chi_l) \neq 0 \text{ in } 1 - \frac{C_3}{\Omega} \leq \sigma \leq 1, \quad |t| \leq 1, \quad s \neq \beta_1 - i\gamma,$$

und

$$(3.5) \quad \delta := 1 - \beta \geq 2\delta_1.$$

Für ein natürliches g sei

$$(3.6) \quad \varepsilon = \left(\frac{1}{2} + g\right)^{-1}, \quad \text{also} \quad g\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für ein $y > 1$ und eine natürliche Zahl v setzen wir nun

$$(3.7) \quad S_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{f'}{f}(s) \left(\frac{y}{\sin \frac{\pi s}{\varepsilon}}\right)^v ds \quad (1 < \sigma_0 < (g+1)\varepsilon)$$

und zur Abkürzung

$$(3.8) \quad x = y^v.$$

Mit Hilfssatz 1 (2.2) und (1.3) erhält man die obere Abschätzung

$$(3.9) \quad \begin{aligned} |S_v| &\ll \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)(1 + \chi_1(n)) \Lambda(n)}{n^{i\gamma}} J_v\left(\frac{x}{n}, \varepsilon\right) \right| \ll \sum_p (1 + \chi_1(p)) (\log p) \left| J_v\left(\frac{x}{p}, \varepsilon\right) \right| + \\ &+ 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_p (\log p) \left| J_v\left(\frac{x}{p^m}, \varepsilon\right) \right| \ll \varepsilon \sum_{p \equiv \sqrt{x}} c_4^v \left(\frac{x}{p}\right)^{1-\varepsilon/4} \log p + \\ &+ \varepsilon (\log x) \sum_{\sqrt{x} < p \leq x^2} (1 + \chi_1(p)) \frac{x}{p} + \varepsilon \sum_{p > x^2} c_4^v \left(\frac{x}{p}\right)^{1+\varepsilon/4} \log p + \\ &+ \varepsilon \sum_{m=2}^{\infty} c_4^v \sum_p (\log p) \left(\frac{x}{p^m}\right)^{1-\varepsilon/4}. \end{aligned}$$

Hierzu betrachten wir

$$\Sigma(X) := \sum_{n \leq X} a_n n^{-\beta_1}, \quad \Sigma^*(X) := -\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\delta_1} J_1\left(\frac{X}{n}, 1\right) \quad (X > 0),$$

wo die a_n durch

$$Z(s) := \zeta(s)L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \text{also} \quad a_n = \sum_{d|n} \chi_1(d) \geq 0$$

definiert sind. Nach Hilfssatz 1 (2. 3) gilt

$$(3.10) \quad X'^{-1}(\Sigma^*(X') - R_1(X')) \ll \Sigma(X) \ll X^{-1} \Sigma^*(X) \quad \text{für} \quad 1 \leq X' \leq X$$

mit

$$R_1(X') = \sum_{n > X} a_n n^{\delta_1} \left| J_1 \left(\frac{X'}{n}, 1 \right) \right|.$$

Nun ist nach (1. 3)

$$\Sigma^*(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_1)} \frac{\pi}{-\sin \pi s} X^s Z(s - \delta_1) ds \quad (1 < \sigma_1 < 3/2),$$

und der darin auftretende Integrand ist in $1/4 \leq \sigma \leq \sigma_1$ wegen (3. 2) bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = 1 + \delta_1$ mit dem Residuum

$$\frac{\pi L(1)}{-\sin \pi(1 + \delta_1)} X^{1 + \delta_1}$$

holomorph. Wegen

$$(3.11) \quad Z(s) \ll (k(|t| + 2)^2)^{3/4} \quad \text{für} \quad \sigma = 1/4$$

(vgl. [5], S. 219, Satz 3. 1) folgt daraus mit dem Residuensatz

$$(3.12) \quad \Sigma^*(X) = X^{1 + \delta_1} \frac{L(1)}{\delta_1} (1 + O(\delta_1)) + O(X^{1/4} k^{3/4}) \quad \text{für} \quad X \geq 2, \quad \delta_1 \log X \leq 1.$$

Damit hat man bei genügend großem c_5 wegen (3. 3) und (3. 10), $a_1 \geq 1$

$$1 \leq \Sigma(c_5 k) \leq c_6 \frac{L(1)}{\delta_1} + \frac{1}{2},$$

insbesondere also

$$(3.13) \quad \frac{L(1)}{\delta_1} \gg 1.$$

Andererseits folgt wegen $0 \leq a_n \leq \theta(n) \ll n^{1/16}$, $\delta_1 < 1/16$ mit Hilfssatz 1 (2. 2) für $1 \leq X' \leq X$

$$R_1(X') \ll \sum_{n > X} n^{1/8} \left(\frac{X'}{n} \right)^{3/2} \ll X'^{3/2} X^{1/8 - 1/2},$$

also wegen (3. 10), (3. 12) und (3. 13)

$$\Sigma(X) \gg X'^{\delta_1} \frac{L(1)}{\delta_1} + O((k/X')^{3/4}) - X'^{1/2} X^{-3/8} \gg \frac{L(1)}{\delta_1} \gg 1 \quad \text{für} \quad X' = c_5 k, \quad X = c_5 k^2.$$

Damit haben wir wegen (3. 3)

$$(3. 14) \quad \sum_{n \equiv c_5 k^2} \frac{a_n}{n} \gg \frac{L(1)}{\delta_1} \gg 1.$$

Auf Grund der Multiplikativität der a_n ist

$$(3. 15) \quad \sum_{m \equiv \sqrt{x}} \frac{a_m}{m} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x^2} \frac{a_p}{p} \leq \sum_{\sqrt{x} < n \leq x^3} \frac{a_n}{n}.$$

Wegen

$$\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1+v} = \frac{v-u}{(1+u)(1+v)} \geq \frac{1}{2} \frac{v}{2(1+v)} \geq \frac{1}{8} \text{ für } 0 < u \leq 1 \leq v, \quad 2u \leq v$$

ist nach Hilfssatz 1 (2. 3) und (1. 3)

$$\sum_{Y < n < X} \frac{a_n}{n} \leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n/X} - \frac{1}{1+n/Y} \right) \frac{a_n}{n}$$

und daher

$$\ll \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_1)} \pi \frac{X^{s-1} - Y^{s-1}}{-\sin \pi s} Z(s) ds \text{ für } 1 < \sigma_1 < 2, \quad X \geq 2Y \geq 2.$$

Dies ist aber nach dem Residuensatz und (3. 11) unter der zusätzlichen Voraussetzung $\delta_1 \log X \leq 1$

$$(3. 16) \quad \ll L(1) \log \frac{X}{Y} + O\left(\left(\frac{k}{Y}\right)^{3/4}\right).$$

Wir setzen nun

$$(3. 17) \quad x \equiv (c_5 k^2)^2, \quad Y = \sqrt{x}, \quad X = x^3, \quad \delta_1 \log x \leq 1/3$$

voraus.

Da nach PAGE [4]

$$L(1) \gg \frac{1}{\sqrt{k} \log^2 k}$$

ist, folgt mit (3. 14), (3. 15) und (3. 16)

$$(3. 18) \quad \sum_{\sqrt{x} < p \leq x^2} \frac{a_p}{p} \ll \delta_1 \log x.$$

Der Primzahlsatz liefert für $0 < \eta \leq 1$, $X \geq 3$

$$\sum_{p \leq X} p^{\eta-1} \log p \ll \frac{X^\eta}{\eta}, \quad \sum_{p > X} p^{-\eta-1} \log p \ll \frac{X^{-\eta}}{\eta};$$

ferner gilt

$$\sum_{m \geq 2} \sum_p \frac{\log p}{p^{3m/4}} \ll \sum_p \frac{\log p}{p^{3/2}} \ll 1.$$

In Verbindung mit (3. 9) und (3. 18) folgt nunmehr

$$(3. 19) \quad S_v \ll x((\varepsilon \log x) \delta_1 \log x + O(c_4^v x^{-\varepsilon/8})).$$

Nun sei bei genügend großem c_7

$$(3.20) \quad \begin{cases} \varepsilon = c_7 \delta \\ r = c_7 \varepsilon < 1/2 \\ 2c_7 \Omega \cong \log x \cong c_7 \Omega. \end{cases}$$

Hilfssatz 1 (2. 1) werde mit $\sigma_0 = 1 + 1/\log x$, $r/2$ an Stelle von r und f'/f an Stelle von f angewendet. Ferner setzen wir die durch Hilfssatz 4 gegebene Darstellung von f'/f in (3. 7) ein und berücksichtigen Hilfssatz 3. Die dazu notwendige Voraussetzung $r \cong 1/\Omega$ ist mit (3. 4) und (3. 20) erfüllt. Wir bemerken noch

$$1 - i\gamma \in B_r \Leftrightarrow \beta_1 - i\gamma \in B_r \quad (\text{vgl. (3. 5)})$$

und

$$\frac{f'}{f}(s) \ll \log x \quad \text{für } \sigma = \sigma_0.$$

Bezeichnet nun $\sum''$ die Summation über alle Nullstellen

$$\varrho^* = \beta^* + i\gamma^* \neq \beta_1 - i\gamma \quad \text{von } f(s) \quad \text{mit } 0 \leq \beta^* < 1,$$

so ergibt sich wegen (3. 20)

$$(3.21) \quad |S_v| \cong |S'_v| - \sum''_{\substack{\varrho^* \in B_r \\ \beta^* < 1-2\delta}} |\Phi_v(\varrho^*)| - \\ - \int_{\beta_1}^1 \left| \frac{x^{\sigma-i\gamma}}{\sin^v \frac{\pi}{\varepsilon}(\sigma-i\gamma)} \left(\log x - \frac{v\pi}{\varepsilon} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\varepsilon}(\sigma-i\gamma) \right) \right| d\sigma + O(c_4^v x(\log x) r [e^{-rv/2\varepsilon} + x^{-2\delta}])$$

mit

$$S'_v = \sum''_{\substack{\varrho^* \\ \beta^* \geq 1-2\delta}} \tilde{z}_{\varrho^*}^v, \quad \tilde{z}_{\varrho^*}^v := \frac{J^{\varrho^*}}{\sin \frac{\pi}{\varepsilon} \varrho^*}, \quad (\text{vgl. (3. 8)})$$

$$\Phi_v(\varrho^*) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{x^s}{(s-\varrho^*) \sin^v \frac{\pi s}{\varepsilon}} ds.$$

Für $\varrho^* \in B_r$, $\beta^* < 1 - 2\delta$ ist offenbar nach Hilfssatz 1 (2. 2) und (3. 20)

$$\Phi_v(\varrho^*) = x^{\varrho^*} \int_0^x \zeta^{-\varrho^*-1} J_v(\zeta, \varepsilon) d\zeta \ll c_4^v \varepsilon x^{\beta^*} \int_0^x \zeta^{-\beta^*-1+1-3\delta/2} d\zeta \ll c_4^v x^{1-3\delta/2},$$

also nach Hilfssatz 3

$$(3.22) \quad \sum''_{\substack{\varrho^* \in B_r \\ \beta^* < 1-2\delta}} |\Phi(\varrho^*)| \ll c_4^v r \Omega x^{1-3\delta/2}.$$

Schließlich ist $|S'_v|$ bei passendem v nach Hilfssatz 2 abzuschätzen: Nach Hilfssatz 3, (3. 2) und $1 - \delta = \beta \in B_r$ gibt es

$$N := [c_8 r \Omega] \cong 1$$

komplexe Zahlen $z_1, \dots, z_N$ mit $|z_1| = 1$ und

$$|S'_v| = |\tilde{z}_\beta^v| \left| \sum_{l=1}^N z_l^v \right|.$$

Daher können wir uns $v \in [N, 2N]$ so gewählt denken, daß

$$|S'_v| \cong c_9^N |\tilde{z}_\beta^v|$$

also nach (3. 8)

$$(3.23) \quad |S'_v| \cong c_{10}^N x^\beta$$

wird. Zusammenfassend folgt aus (3. 19) bis (3. 23)

$$x^{-2\delta} \cong c_{11}^N x^{-\delta} \cong \delta_1 \Omega$$

und damit (1. 2).

Literatur

- [1] S. Knapowski, On Linnik's theorem concerning exceptional zeros, *Publ. Math. Debrecen* **9** 168—178.
- [2] Ю. В. Линник, О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, I, *Мат. сб.*, **15** (57) (1944), 139—178.
- [3] Ю. В. Линник, ———, II, *Мат. сб.* **15** (57) (1944), 347—368.
- [4] A. Page, On the number of primes in an arithmetical progression, *Proc. London Math. Soc.* **39** (1935), 116—141.
- [5] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin, 1957.
- [6] К. А. Родосский, О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, *Мат. сб.*, **34** (76) (1954), 331—356.
- [7] P. Turán, Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, *Budapest*, 1953.
- [8] P. Turán, On a density theorem of Yu. V. Linnik, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **6** (1961), 165—179.
- [9] P. Turán, A note on the real zeros of Dirichlet's L -Functions, *Acta Arith.* **5** (1959), 309—314.

(Eingegangen am 28. November 1968.)