

О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I.

Т. Ж. МОЛЛОВ (Пловдив)

В [1] С. Д. Берман исследовал мультипликативную группу групповой алгебры KG счетной абелевой p -группы G над произвольным алгебраическим расширением K характеристики p простого поля Π .

В настоящей статье рассматривается мультипликативная группа $M(LG)$ группового кольца LG абелевой p -группы G произвольной мощности над коммутативным кольцом L с единицей характеристики p . Силовская p -подгруппа $S^*(LG)$ мультипликативной группы $M(LG)$ является прямым произведением своей подгруппы

$$S(LG) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\}$$

и силовской p -подгруппой мультипликативной группы $\tilde{L}$ кольца L . Описывается группа $S(LG)$, когда G — прямое произведение циклических групп.

Укажем на некоторые обозначения и понятия, которые будем употреблять неизменно в статье.

G — абелева p -группа с мощностью μ ;

L — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей характеристики p с мощностью λ ; L_p -силовская p -подгруппа мультипликативной группы $\tilde{L}$ кольца L ;

$S^*(LG)$ — силовская p -подгруппа мультипликативной группы $M(LG)$ группового кольца LG ;

$G^{p^k}(L^{p^k})$, где $k=0, 1, 2, \dots$ — множество p^k -ых степеней элементов группы G (кольца L), которое, очевидно, является группой (кольцом);

$N(H)$ — нижний слой абелевой p -группы H , т. е. множество всех ее элементов порядка p (вместе с единицей 1 группы H);

$|M|$ — мощность множества M , $\mu_i = |G^{p^i}|$ и $\lambda_i = |L^{p^i}|$, $i=0, 1, 2, \dots$ ($\lambda_0 = \lambda$, $\mu_0 = \mu$);

знак „ Π ”, или „ $\times$ ” — знак прямого произведения групп.

Терминология абелевых p -групп, которую будем употреблять, соответствует монографии [2], однако в отличие от [2] групповую операцию абелевых p -групп будем записывать мультипликативно.

Во многих утверждениях относительно группового кольца LH абелевой p -группы H , существенно используется следующая очевидная формула:

$$(1) \quad \left(\sum_{h \in H} \alpha_h h\right)^{p^n} = \sum_{h \in H} \alpha_h^{p^n} h^{p^n} \quad (\alpha_h \in L).$$

Пусть i и n — натуральные числа и $n \geq i$, а $\gamma \neq 0$ — произвольное кардинальное число. Через $C_\gamma^{i,n}$ (соответственно через C_γ^i) обозначаем прямое произведение циклических p -групп порядков $p^i, p^{i+1}, \dots, p^n$ (соответственно порядков $p^i, p^{i+1}, \dots, p^{i+s}, \dots$, где s — произвольное натуральное число), причем каждая из циклических групп порядка p^k , $i \leq k \leq n$ (соответственно каждая из циклических групп порядка p^l , $l \geq i$) встречается γ раз. Кроме того положим $C_\gamma^{i+1,i} = 1$.

Предложение 1. *Произвольный элемент $x = \sum_i \alpha_i g_i$ ($\alpha_i \in L, g_i \in G$) группового кольца LG принадлежит группе $M(LG)$ тогда и только тогда, когда элемент $\delta = \sum_i \alpha_i$ — обратимый элемент кольца L .*

Доказательство. Пусть $x = \sum_i \alpha_i g_i$, $\alpha_i \in L, g_i \in G$ и $\sum_i \alpha_i = \delta$ — обратимый элемент кольца L . Пусть p^r — максимум порядков элементов g_i , которые входят в представление элемента x . Тогда $x^{p^r} = \delta^{p^r}$, следовательно $x \in M(LG)$.

Следствие. *Имеет место прямое разложение:*

$$(2) \quad M(LG) = S(LG) \times \tilde{L},$$

где $\tilde{L}$ — мультипликативная группа кольца L , а $S(LG)$ — p -подгруппа группы $M(LG)$:

$$S(LG) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\}.$$

Предложение 2. *Пусть L — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей характеристики p , а G — абелева p -группа. Тогда*

1) *силовская p -подгруппа L_p мультипликативной группы $\tilde{L}$ кольца L состоит из всевозможных элементов вида $1 + \alpha$, где α — нильпотентные элементы кольца L ;*

2) *для силовской p -подгруппы $S^*(LG)$ мультипликативной группы $M(LG)$ имеет место $S^*(LG) = S(LG) \times L_p$, т. е.*

$$(3) \quad S^*(LG) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 1 + \alpha\},$$

где α — нильпотентный элемент кольца L , следовательно группа $S^*(LG)$ совпадает с группой $S(LG)$ тогда и только тогда, когда L — кольцо без нильпотентных элементов.

Доказательство. Если $\alpha \in L$ — произвольный нильпотентный элемент, то для некоторого натурального N имеет место $\alpha^{p^N} = 0$ и следовательно $(1 + \alpha)^{p^N} = 1$ т. е. $1 + \alpha \in L_p$. Обратно, если $x \in L_p$, то $x^{p^n} = 1$ для некоторого натурального n , следовательно $(x - 1)^{p^n} = 0$, или $x - 1 = \alpha$, где α — нильпотентный элемент кольца L , откуда получаем $x = 1 + \alpha$.

Из формулы (2) и из первой части утверждения вытекает $S^*(LG) = S(LG) \times L_p$, откуда следует (3) и остальная часть предложения.

Куликов ([2], стр. 144) доказал, что абелева p -группа G разлагается в прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда она является объединением возрастающей последовательности

$$(4) \quad G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n \subseteq \dots$$

таких своих подгрупп, что высоты элементов каждой из подгрупп G_n в группе G конечны и ограничены в совокупности.

Используя этот критерий, докажем следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть G — абелева p -группа и L -коммутативное кольцо с единицей характеристики p . Тогда p -подгруппа $S(LG)$ мультипликативной группы $M(LG)$ группового кольца LG разлагается в прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда группа G разлагается в прямое произведение циклических групп.

Доказательство. Необходимость. Группа G разлагается в прямое произведение циклических групп, так как она является подгруппой группы $S(LG)$.

Достаточность. Группу G можно представить как объединение возрастающей последовательности (4) подгрупп G_n с вышеуказанным свойством. Тогда группу $S(LG)$ можно представить как объединение возрастающей последовательности

$$(5) \quad S(LG_1) \subseteq S(LG_2) \subseteq \dots \subseteq S(LG_n) \subseteq \dots$$

Высоты элементов каждой подгруппы $S(LG_n)$ в группе $S(LG)$ ограничены в совокупности. Действительно, высота произвольного элемента $x = \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \in S(LG_n)$, $\alpha_i \in L$, $g_i \in G_n$, не превосходит минимум высот элементов $g_1, g_2, \dots, g_s$ группы G_n . Следовательно высоты элементов группы $S(LG_n)$ не превосходят точную верхнюю грань высот элементов подгруппы G_n в группе G .

Итак, группа $S(LG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп.

Лемма 1. Если $|S(LG)| = v$, то $\mu = 1 + \log_A v$.

Доказательство. Очевидно число v элементов $x = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_\mu g_\mu$ группы $S(LG)$, ввиду того, что $\sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i = 1$, равняется $A^{\mu-1}$, откуда следует искомая формула.

Теорема 1. Пусть L — конечное коммутативное кольцо с единицей характеристики p . Конечная абелева p -группа G с точностью до изоморфизма определяет группу $S(LG)$ и обратно.

Доказательство. Так как кольцо L — линейное пространство над простым полем Π с характеристикой p , то каждый элемент кольца L имеет вид $\pi_1 a_1 + \dots + \pi_l a_l$, где $\pi_i = 0, 1, 2, \dots, p-1$. Следовательно, число элементов кольца L равняется p^l .

Вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} |L| = \Lambda = p^l, \quad U = \{z \in L, z^p = 0\}, \quad |U| = p^u, \\ |G| = \mu = p^n, \quad N = N(G), \quad |N| = p^t, \quad |G/N| = p^s = \mu', \\ S = S(LG), \quad |S| = v = p^v, \quad \tilde{N} = N[S(LG)], \quad |\tilde{N}| = r = p^w. \end{aligned}$$

Очевидно $|U| = p^u$, так как U — подгруппа адитивной группы L .

При доказательстве используется теорема 1, 2 статьи [1]. Пусть p^x — показатель группы G , следовательно и группы S . Каждой элемент $x \in S(LG)$, как элемент группового кольца LG , можно записать в виде

$$x = \sum_{j=1}^{p^s} b_j \sum_{a \in N} \alpha_{ja} a,$$

где $b_1 = 1, b_2, \dots, b_{\mu'}$ — система представителей смежных классов группы G по подгруппе N , $\alpha_{ja} \in L$ и $\sum_{j,a} \alpha_{ja} = 1$.

Определим число различных элементов x , которые принадлежат группе $\tilde{N}$. Для этой цели принимаем, что α_{ja} , участвующие в выражении элемента x , являются неизвестными. Если $x \in \tilde{N}$, то

$$(6) \quad x^p = \sum_{j=1}^{p^s} b_j^p \sum_{a \in N} \alpha_{ja}^p = 1.$$

Равенство $b_k^p = b_l^p$ (k и l различные натуральные числа) невозможно, так как тогда $(b_k b_l^{-1})^p = 1$, или $b_k \in b_l N$, что является противоречием. Следовательно, из (6) получаем систему

$$\left(\sum_{a \in N} \alpha_{1a} \right)^p = 1, \quad \left(\sum_{a \in N} \alpha_{ja} \right)^p = 0,$$

или

$$(7) \quad \left(\sum_{a \in N} \alpha_{1a} - 1 \right)^p = 0, \quad \left(\sum_{a \in N} \alpha_{ja} \right)^p = 0, \quad j = 2, 3, \dots, p^s = \mu'$$

Мощность $|U|$ известна, так как U определяется инвариантным способом в кольце L . Если считаем, что $\alpha_{ja} (j=1, 2, \dots, p^s; a \in N)$ — неизвестные, то уравнения (7) показывают, что элементы $\sum_{a \in N} \alpha_{1a} - 1$ и $\sum_{a \in N} \alpha_{ja} (j=2, 3, \dots, p^s)$ могут быть произвольными элементами из U , если только они удовлетворяют условию $\sum_{j,a} \alpha_{ja} = 1$.

Из (7) получаем систему

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum_{a \in N} \alpha_{1a} &= 1 + \lambda_1 \\ \sum_{a \in N} \alpha_{2a} &= \lambda_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{a \in N} \alpha_{\mu', a} &= \lambda_{\mu'}, \end{aligned}$$

где $\lambda_i \in U (i=1, 2, \dots, \mu')$; следовательно $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\mu'} = 0$.

Число решений каждого из уравнений (8) при фиксированных элементах $\lambda_i \in U$ равняется $\lambda^{p^t-1} = p^{l(p^t-1)}$. Можем предполагать, что первые $\mu'-1$ элементы λ_i в (8) — произвольные элементы U , а последний элемент $\lambda_{\mu'}$ определяется однозначно. Следовательно система (5) имеет $p^{[u+l(p^t-1)](\mu'-1)} \cdot p^{l(p^t-1)}$ решений, откуда

$$(9) \quad r = p^w = p^{[u+l(p^t-1)]p^s-u}.$$

1. При данном кольце L , группа G определяет однозначно порядок нижнего слоя $\tilde{N}$ группы S . Действительно, нам известны числа u и l , а также s и t . Тогда r можно найти по формуле (9).

2. При данном кольце L , группа $S(LG)$ определяет однозначно порядок нижнего слоя группы G . В самом деле, известны числа u , l , λ , w , v , а надо определить t . Из (9) имеем $u+w = [u+l(p^t-1)]p^s$. Однако $p^s = \frac{\mu}{p^t}$, где по лемме 1 определяем $\mu = 1 + \log_A v$, или

$$(10) \quad p^t = \frac{u-l}{u+w-l(1+\log_A v)} (1 + \log_A v).$$

Учитывая 1., нетрудно показать, что группа G^{p^i} , т. е. группа G , определяет однозначно порядок нижнего слоя $\tilde{N}_i$ группы $S(L^{p^i}G^{p^i}) = S^{p^i}(LG)$, $i=0, 1, 2, \dots, \alpha-1$.

Аналогично рассуждению 2., группа $S^{p^i}(LG) = S(L^{p^i}G^{p^i})$, т. е. группа $S(LG)$ определяет однозначно порядок нижнего слоя N_i группы G^{p^i} ($i=0, 1, 2, \dots, \alpha-1$).

Так как порядки нижних слоев N_i и $\tilde{N}_i$ ($i=0, 1, \dots, \alpha-1$) групп G и S определяют соответственно группы G и S с точностью до изоморфизма, то этим теорема доказана.

Для точного описания группы $S(LG)$ при заданных группе G и кольце L , а также для описания группы G при заданных кольце L и группе $S(LG)$, дополнительно вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} |L^{p^i}| &= \lambda_i = p^{l_i} & U^{(i)} &= \{z \in L^{p^i}, z^p = 0\} & |U^{(i)}| &= p^{u_i} \\ |G^{p^i}| &= \mu_i = p^{n_i} & N_i &= N(G^{p^i}), & |N_i| &= p^{t_i} & |G^{p^i}/N_i| &= p^{s_i} = \mu'_i \\ |S(L^{p^i}G^{p^i})| &= v_i = p^{q_i} & \tilde{N}_i &= N[S(L^{p^i}G^{p^i})] & |\tilde{N}_i| &= r_i = p^{w_i} \\ i &= 0, 1, \dots, \alpha; & \lambda_0 &= \lambda, & l_0 &= l, & u_0 &= u, & \mu_0 &= \mu \\ n_0 &= n, & t_0 &= t, & s_0 &= s, & v_0 &= v, & r_0 &= r, & w_0 &= w \end{aligned}$$

Эти обозначения используем для формулировки следующего утверждения.

Следствие. Если обозначим $w_i = [u_i + l_i(p^{t_i} - 1)]p^{s_i} - u_i$, $i = 0, 1, \dots, \alpha$; $\delta_{i+1} = w_i - w_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, \alpha-1$, то группа G и кольцо L определяют группу $S(LG)$ следующим образом:

$$(11) \quad S(LG) \cong \prod_{i=1}^{\alpha} C_{\delta_i}^{i,i}.$$

И наоборот, если обозначим

$$p^{t_i} = \frac{u_i - l_i}{u_i + w_i - l_i(1 + \log_{A_i} v_i)} (1 + \log_{A_i} v_i), \quad i = 0, 1, \dots, \alpha$$

$\varepsilon_{i+1} = t_i - t_{i-1} v$, $i=0, 1, \dots, \alpha-1$, то кольцо L и группа $S(LG)$ определяют группу G следующим образом;

$$(12) \quad G \cong \prod_{i=1}^{\alpha} C_{\varepsilon_i}^{i,i}.$$

Доказательство. Следуя теореме 1, получаем формулы, которые аналогичны формулам (9) и (10): (в них буквы w, u, l, t, s и μ занумерованы буквами $i, i=0, 1, \dots, \alpha$) в которых w_i и t_i определены в зависимости от характеристик соответственно групп G и S , и разумеется, от характеристик кольца L .

Так как w_i и w_{i+1} — числа прямых множителей в прямом разложении соответственно групп $\tilde{N}_i$ и $\tilde{N}_{i+1}$ на циклические группы, то число прямых множителей порядка p^{i+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется числу δ_{i+1} и следовательно, имеет место формула (11); аналогично получается формула (12).

Определение 1. Пусть бесконечная абелева p -группа G разлагается в прямое произведение циклических групп таким способом, что в этом разложении мощность множества прямых множителей порядка p^n (n натуральное) — число τ_n . Говорят, что последовательность

$$(13) \quad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots,$$

образованная для группы G , — последовательность первого рода, если

1. в случае, когда порядки элементов группы G неограниченны в совокупности, то или

1.1. $\mu > \tau_n$ для каждого натурального n , или

1.2. $\mu = \tau_n$ для бесконечно многих индексов n , т. е. для каждого натурального i существует натуральное n , так что $n > i$ и $\mu = \tau_n$.

2. В случае, когда p^x показатель группы G , то $\mu = \tau_x$.

В противном случае последовательность (13) будем называть последовательностью второго рода.

Ясно, что когда (13) — последовательность второго рода, она содержит обязательно и бесконечные кардинальные числа. В этом случае

$$(14) \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \max(\tau_1, \dots, \tau_n, \dots),$$

если порядки элементов группы G неограниченны в совокупности, и

$$(14') \quad \mu = \sum_{n=1}^x \tau_n = \max(\tau_1, \dots, \tau_x)$$

если p^x показатель группы G .

Лемма 2. Если бесконечная абелева p -группа G — прямое произведение циклических групп и последовательность (13), образованная для нее — после-

последовательность $\tau_{\alpha_s+1}, \tau_{\alpha_s+2}, \dots$ будет последовательностью первого рода.

Случай, когда группа G имеет показатель p^2 , не стоит рассматривать подробно, так как он почти тривиальный.

Вторая часть леммы следует из формул (14) и (14'), из леммы 2 и из первой части леммы.

Определение 2. Критическими числами абелевой p -группы G , которая разлагается в прямое произведение циклических групп называем

а) кардинальные числа $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$, определенные в формулировке леммы 3 для абелевой p -группы G с последовательностью (13) второго рода;

б) τ_α , если показатель группы G равняется p_α и $\mu = \tau_\alpha$.

Следующая лемма и следствие 1 хорошо известны.

Лемма 4. Пусть существует „ α ” множеств $M_\lambda, \lambda \in A$ (α — кардинальное число) с соответствующими мощностями β_λ и F — множество всевозможных конечномерных векторов $(\gamma_{\lambda_1}, \dots, \gamma_{\lambda_n})$, где $\gamma_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i}$ (λ_i — произвольный индекс множества A и, кроме того $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$). Тогда, если по крайней мере одно из кардинальных чисел α и $\beta_\lambda, \lambda \in A$, является бесконечным, то множество F имеет мощность $\sup(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\lambda, \dots)$, где $\lambda \in A$.

Следствие 1. Пусть множество F имеет бесконечную мощность κ . Если α — конечное кардинальное число, то существует по крайней мере один индекс $\lambda \in A$, так что $\beta_\lambda = \kappa$, а если все β_λ — конечные кардинальные числа, то $\alpha = \kappa$.

Непосредственно из леммы 4 и из следствия 1 получается следующее утверждение.

Следствие 2. Если по крайней мере одно из кардинальных чисел Λ и μ бесконечно, то $|S(LG)| = \max(\Lambda, \mu)$, ($|G| = \mu, |L| = \Lambda$) и наоборот если $|S(LG)| = \kappa$, то или $\Lambda = \kappa$, или $\mu = \kappa$.

Если абелева p -группа G — прямое произведение циклических групп, то по предложению 2 группа $S(LG)$ также прямое произведение циклических групп. Этот факт используется при формулировке следующей леммы.

Лемма 5. Пусть абелева p -группа G — прямое произведение циклических групп. Если $G^{p^k} \neq 1$ для некоторого k ($k=0, 1, 2, \dots$) и по крайней мере одно из кардинальных чисел $\mu_k = |G^{p^k}|$ и $\Lambda_k = |L^{p^k}|$ бесконечно, то число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется $\max(\Lambda_k, \mu_k)$.

Доказательство. Обозначим $L^{p^k} = L^*, G^{p^k} = G^*, S(L^*G^*) = S^*$. Различаем следующие случаи.

1. $G^{*p} = 1$. Согласно следствию 2 леммы 4 получаем $|S^*| = \max(\Lambda_k, \mu_k)$. Так как группа S^* разлагается в прямое произведение циклических групп порядка p , то по следствию 1 леммы 4 вытекает, что число прямых множителей в этом разложении равняется $\max(\Lambda_k, \mu_k)$, т. е. число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется $\max(\Lambda_k, \mu_k)$.

2. $G^{*p} \neq 1$. Обозначим $N(S^{*p^i}) = \tilde{N}'_i$. Если

$$G^* = \prod_{\lambda \in A} (b_\lambda),$$

то с соответствующей пренумерацией можно предполагать, что (b_1) — прямой множитель в этом разложении порядка p^m , $m > 1$, т. е. $b_1^{p^{m-1}} \neq 1$.

2.1. Пусть $\mu_k \leq \Lambda_k$. Образует элементы

$$(16) \quad A_\beta = 1 + \beta b_1 - \beta b_1^{1+p^{m-1}} \quad (B \in L^*).$$

Так как $A_\beta \in S^*$ и $A_\beta^p = 1$, то $A_\beta \in \tilde{N}'_0$. При $\beta \neq \gamma$ ($\gamma \in L^*$) элементы A_β и A_γ лежат в разных смежных классах по подгруппе $\tilde{N}'_1$. В противном случае

$$(17) \quad 1 + \beta b_1 - \beta b_1^{1+p^{m-1}} = (1 + \gamma b_1 - \gamma b_1^{1+p^{m-1}}) \sum_{i_1, \dots, i_s} \lambda_{i_1, \dots, i_s} b_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \dots b_{i_s}^{p\beta_{i_s}}.$$

В правой части этого равенства при умножении элементов суммы Σ с 1 получаются всегда степени элемента b_1 , показатели которого кратны числу p , а при умножении этих элементов на γb_1 и $-\gamma b_1^{1+p^{m-1}}$, ввиду

$$1 + lp \not\equiv 0 \pmod{p}$$

и $1 + p^{m-1} + lp \not\equiv 0 \pmod{p}$ при $m-1 \equiv 1$,

(l — целое число), такие степени не появляются. Следовательно,

$$\sum_{i_1, \dots, i_s} \lambda_{i_1, \dots, i_s} b_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \dots b_{i_s}^{p\beta_{i_s}} = 1,$$

что ведет к противоречию с равенством (17), так как $\beta \neq \gamma$. Получаем $|\tilde{N}'_0/\tilde{N}'_1| \equiv \equiv \Lambda_k$; однако $|S^*| = \Lambda_k$, откуда $|\tilde{N}'_0/\tilde{N}'_1| = \Lambda_k$. Согласно следствию 1 леммы 4 получаем, что число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется $\Lambda_k = \max(\Lambda_k, \mu_k)$.

2.2. Пусть $\Lambda_k < \mu_k$. Образует элементы

$$(18) \quad A_s = 1 + b_s(b_1^{p^{m-1}} - 1),$$

где $s \in A$. Так как $A_s \in S^*$ и $A_s^p = 1$, то $A_s \in \tilde{N}'_0$. Покажем, что элементы A_i и A_j , $i, j \in A$, образованные по закону (18), при $i \neq j$, лежат в разных смежных классах группы $\tilde{N}'_0$ по подгруппе $\tilde{N}'_1$. Действительно, в противном случае

$$1 + b_i(b_1^{p^{m-1}} - 1) = [1 + b_j(b_1^{p^{m-1}} - 1)] \sum_{i_1, \dots, i_s} \lambda_{i_1, \dots, i_s} b_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \dots b_{i_s}^{p\beta_{i_s}},$$

$i_1, i_2, \dots, i_s \in A$, откуда получаем, или

а) $b_i = b_i^{p\beta} b_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \dots b_{i_s}^{p\beta_{i_s}},$
или

б) $b_i = b_i^{p\beta} b_j^{1+p\beta'} b_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \dots b_{i_s}^{p\beta_{i_s}},$
или

в) $b_i = b_i^{p^{m-1}+p\beta} b_j^{1+p\beta'} b_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \dots b_{i_s}^{p\beta_{i_s}},$

что невозможно, так как $m-1 \geq 1$. Далее, аналогично случаю 2.1., заключаем, что число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется $\mu_k = \max(\lambda_k, \mu_k)$.

Теорема А. Пусть абелева p -группа G — прямое произведение

$$(19) \quad G = \prod_{\lambda \in A} (a_\lambda)$$

циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка p^i равняется числу τ_i . Пусть L — коммутативное кольцо с единицей характеристики p . Тогда группа $S = S(LG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем различаем следующие случаи.

1. Группа G — конечная и L — конечное кольцо. Тогда описание группы $S(LG)$ дано в следствии теоремы 1.

2. Группа G — конечная с показателем p^α и L — бесконечное кольцо. Тогда

2.1. если $\lambda_{\alpha-1}$ — бесконечное кардинальное число, то

$$S \cong \prod_{i=1}^{\alpha} C_{\lambda_{i-1}}^{i,i};$$

2.2. Если λ_{s-1} бесконечное число, а λ_s конечное, $1 \leq s \leq \alpha-1$ и конечная группа $S(L^{p^s}G^{p^s}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-s} C_{\delta_i}^{i,i}$, то

$$S \cong \prod_{i=1}^s C_{\lambda_{i-1}}^{i,i} \times \prod_{i=s+1}^{\alpha} C_{\delta_{i-s}}^{i,i}.$$

3. Группа G — бесконечная с показателем p^α и L — конечное кольцо. Пусть $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_s}$ — критические числа группы G . Тогда

$$S \cong C_{\tau_{\alpha_1}}^{1, \alpha_1} \times \dots \times C_{\tau_{\alpha_s}}^{\alpha_s-1+1, \alpha_s} \times B,$$

где группа B характеризуется тем же самым способом, как множитель $\prod_{i=s+1}^{\alpha} C_{\delta_{i-s}}^{i,i}$ в случае 2.2. (эventуально $B=1$), причем s заменяем числом α_s .

4. Порядки элементов группы G неограничены в совокупности и L — конечное кольцо. Тогда

4.1. если последовательность (13) группы G — последовательность первого рода, то

$$S \cong C_\mu^1;$$

4.2. Если последовательность (13) группы G — последовательность второго рода с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_s}$, то

$$S \cong C_{\tau_{\alpha_1}}^{1, \alpha_1} \times \dots \times C_{\tau_{\alpha_s}}^{\alpha_s-1+1, \alpha_s} \times C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1}.$$

5. Группа G — бесконечная с показателем p^α и L — бесконечное кольцо. Пусть $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_s}$ — критические числа группы G . Тогда

$$S \cong \left(\prod_{i=1}^s B_i \right) \times S'.$$

Группы $B_i (i=1, 2, \dots, s)$ описываются следующим образом. Обозначим $\max (\tau_{\alpha_i}, \Lambda_k) = \omega_{i,k}, i=1, \dots, s; k=0, 1, \dots, \alpha_s-1; \alpha_0=0$. Тогда

$$(20) \quad B_i \cong C_{\omega_i, \alpha_i-1}^{\alpha_{i-1}+1, \alpha_{i-1}+1} \times \dots \times C_{\omega_i, \alpha_i-1}^{\alpha_i, \alpha_i}.$$

Группа S' характеризуется следующим образом. $S'=1$, если последовательность (13) группы G — последовательность первого рода (тогда $s=1, \tau_{\alpha_1}=\mu$). Пусть последовательность (13) группы G — последовательность второго рода. Тогда

а) если $\Lambda_{\alpha-1}$ — бесконечное кардинальное число, то

$$S' \cong C_{\Lambda_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1, \alpha_s+1} \times \dots \times C_{\Lambda_{\alpha-1}}^{\alpha, \alpha};$$

б) если $\Lambda_{k-1} (\alpha_s \leq k-1 < \alpha-1)$ — бесконечное, а Λ_k — конечное и конечная группа $S(L^{p^k} G^{p^k}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-k} C_{\delta_i}^{i,i}$, то

$$S' \cong C_{\Lambda_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1, \alpha_s+1} \times \dots \times C_{\Lambda_{k-1}}^{k,k} \times \prod_{i=k+1}^{\alpha} C_{\delta_{i-k}}^{i,i};$$

в) если Λ_{α_s} — конечное и конечная группа $S(L^{p^{\alpha_s}} G^{p^{\alpha_s}}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-\alpha_s} C_{\delta_i}^{i,i}$, то

$$S' \cong \prod_{i=\alpha_s+1}^{\alpha} C_{\delta_{i-\alpha_s}}^{i,i}.$$

6. Порядки элементов группы G — неограничены в совокупности и L — бесконечное кольцо. Тогда

6.1. если последовательность (13) группы G — последовательность первого рода, и $\max (\Lambda_i, \mu) = \omega_i, i=0, 1, 2, \dots$; то

$$S \cong \prod_{i=1}^{\infty} C_{\omega_{i-1}}^{i,i};$$

6.2. если последовательность (13) группы G — последовательность второго рода с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$, то

$$S \cong \left(\prod_{i=1}^s B_i \right) \times S',$$

где описание групп B_i — как в случае 5. дается формулой (20).

Группа S' характеризуется следующим способом. Обозначим $\varepsilon_i = \max (\mu_{\alpha_s}, \Lambda_i), i=\alpha_s, \alpha_s+1, \dots$. Тогда

$$S' \cong \prod_{i=\alpha_s+1}^{\infty} C_{\varepsilon_{i-1}}^{i,i}.$$

Доказательство. Теорема следует из предложения 3, лемм 2, 3 и 5. Из теоремы А получаем:

Теорема A^* . Пусть абелева p -группа G — прямое произведение

$$(21) \quad G = \prod_{\lambda \in A} (A_\lambda)$$

циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка p^i равняется числу τ_i , а L — поле характеристики p .

Тогда группа $S = S(LG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем

1. если Λ и μ — конечные кардинальные числа, то описание группы $S(LG)$ дано в следствие теоремы 1.

Предположим, что по крайней мере одно из кардинальных чисел Λ и μ — бесконечное. Тогда

2. если $\mu \leq \Lambda$ и

2.1. порядки элементов группы G неограничены в совокупности, то

$$S(LG) \cong C_\Lambda^1;$$

2.2. если показатель группы G равняется числу p^z , то

$$S(LG) \cong C_\Lambda^{1,z}.$$

3. Если $\Lambda < \mu$ и

3.1. последовательность (13) группы G — последовательность первого рода, то

$$S \cong C_\mu^1, \quad \text{или} \quad S \cong C_\mu^{1,z}$$

в зависимости от того, являются ли порядки элементов группы G неограниченными в совокупности, или показатель этой группы равняется числу p^z ;

3.2. если последовательность (13) группы G — последовательность второго рода с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$ и

3.2.1. если L — конечное поле, то

$$S \cong C_{\tau_{\alpha_1}}^{1,\alpha_1} \times \dots \times C_{\tau_{\alpha_s}}^{\alpha_s-1+1,\alpha_s} \times B,$$

где для группы B имеем следующее:

а) если порядки элементов группы G неограничены в совокупности, то

$$B \cong C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1};$$

б) если показатель группы G равняется числу p^z и конечная группа

$$S(L^{p^{\alpha_s}} G^{p^{\alpha_s}}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha_s-\alpha_s} C_{\delta_i}^{i,i}, \quad \text{то}$$

$$B \cong \prod_{i=\alpha_s+1}^z C_{\delta_i-\alpha_s}^{i,i};$$

3.2.2. если L — бесконечное поле и

3.2.2.1. $\tau_{\alpha_s} > \Lambda$, то

$$S \cong C_{\tau_{\alpha_1}}^{1,\alpha_1} \times \dots \times C_{\tau_{\alpha_s}}^{\alpha_s-1+1,\alpha_s} \times B,$$

где группа B характеризуется следующим образом:

а) если порядки элементов группы G неограничены в совокупности, и $\omega = \max(\Lambda, \mu_{\alpha_s})$, то

$$B \cong C_{\omega}^{\alpha_s+1};$$

б) если показатель группы G равняется p^z , то

$$B \cong C_A^{\alpha_s+1, \alpha};$$

3.2.2.2. Если $\tau_{\alpha_r} > \Lambda$, $1 \leq r < s$ (r — натуральное число), а $\tau_{\alpha_{r+1}} \leq \Lambda$, то

$$S \cong C_{\tau_{\alpha_1}}^{1, \alpha_1} \times \dots \times C_{\tau_{\alpha_r}}^{\alpha_{r-1}+1, \alpha_r} \times B,$$

где $B \cong C_A^{\alpha_r+1}$, если порядки элементов группы G неограничены в совокупности, и $B \cong C_A^{\alpha_r+1, \alpha}$, если показатель группы G равняется p^z .

Автор выражает глубокую благодарность проф. С. Д. Берману за руководство настоящей работой.

Литература

- [1] С. Д. Берман, Групповые алгебры счетных абелевых p -групп. *Publ. Math., Debrecen*, **14**, (1967) 365-405.
- [2] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1967.

(Поступило 25. III. 1969.)